习题课
典　型　例　题

一、特征值与特征向量的求法

二、已知A的特征值，求与A相关矩阵的特征值

三、求方阵A的特征多项式

四、关于特征值的其它问题

五、判断方阵A可否对角化

六、利用正交变换将实对称矩阵化为对角阵

一、特征值与特征向量的求法

第一步　计算A的特征多项式；

第二步　求出特征多项式的全部根，即得A的全部特征值；

第三步　将每一个特征值代入相应的线性方程组，求出基础解系，即得该特征值的特征向量.

例1 计算3阶实矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$的全部特征值和特征向量.

解 第一步 计算A的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-4\\-2&\lambda&-2\\-4&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-8)(\lambda+1)^2.$$

第二步　求出特征多项式$f(\lambda)$的全部根，即A的全部特征值.

令$f(\lambda)=0$，解之得$\lambda_1=8$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$，为A的全部特征值.

第三步　求出A的全部特征向量

对$\lambda_1=8$，求相应线性方程组$(\lambda_1E-A)x=0$的一个基础解系.

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -2x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$$

化简求得此方程组的一个基础解系

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

属于$\lambda_1 = 8$的全部特征向量为$k_1\alpha_1$($k_1 \neq 0$为实数).

同理对 $\lambda_2=\lambda_3=-1$,求相应线性方程组 $(\lambda_2 E-A)x=0$ 的一个基础解系：

$$\begin{cases}-4x_1-2x_2-4x_3=0,\\ -2x_1-x_2-2x_3=0,\\ -4x_1-2x_2-4x_3=0,\end{cases}$$

求解得此方程组的一个基础解系：

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

于是A的属于$\lambda_2=\lambda_3=-1$的全部特征向量为

$$k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,$$

k_2,k_3是不全为零的实数.

从而A的全部特征向量为$k_1\alpha_1;k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$,这里$k_1\neq 0$为实数,$k_2,k_3$是不全为零的实数.

二、已知A的特征值，求与A相关矩阵的特征值

例2 设n阶方阵A的全部特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,属于$\lambda_i$的特征向量为$\alpha_i$,求$P^{-1}AP$的特征值与特征向量.

解 首先证明A与$P^{-1}AP$有相同的特征值.只需证明它们有相同的特征多项式.

$$\because f_{P^{-1}AP}(\lambda)=\left|\lambda E-P^{-1}AP\right|$$

$$=\left|\lambda P^{-1}P-P^{-1}AP\right|$$

$$= \left|P^{-1}\right|\left|\lambda E - A\right|\left|P\right| = \left|\lambda E - A\right| = f_A(\lambda),$$

$\therefore \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$就是$P^{-1}AP$的全部特征值.

其次求$P^{-1}AP$属于λ_i的特征向量.

$\because A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i,$

即 $(\lambda_i E - A)\alpha_i = 0,$

又 $$(\lambda_i E - P^{-1}AP)\alpha_i = (\lambda_i P^{-1}P - P^{-1}AP)\alpha_i$$

$$= P^{-1}(\lambda_i E - A)P\alpha_i,$$

$$\therefore (\lambda_i E - P^{-1}AP)P^{-1}\alpha_i$$

$$= P^{-1}(\lambda_i E - A)P\,P^{-1}\alpha_i$$

$$= P^{-1}(\lambda_i E - A)\alpha_i = 0,$$

即 $(P^{-1}AP)(P^{-1}\alpha_i) = \lambda_i(P^{-1}\alpha_i),$

故 $P^{-1}\alpha_i$是$P^{-1}AP$属于λ_i的特征向量.

三、求方阵 A 的特征多项式

例3 设A是n阶方阵，其特征多项式为

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,$$

求：(1)求 A^T 的特征多项式；

(2)当A非奇异时，求 A^{-1}的特征多项式．

解 (1) $f_{A^T}(\lambda)=|\lambda E-A^T|=|(\lambda E-A)^T|$

$$=|\lambda E-A|=f_A(\lambda),$$

$\therefore A$与A^T有相同的特征多项式.

(2)设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的全部特征值,则

$\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$是$A^{-1}$的全部特征值,

故A^{-1}的特征多项式为

$$f_{A^{-1}}(\lambda)=\left|\lambda E-A^{-1}\right|$$

$$=(\lambda-\frac{1}{\lambda_1})(\lambda-\frac{1}{\lambda_2})\cdots(\lambda-\frac{1}{\lambda_n})$$

$$=\lambda^n+\frac{a_1}{a_0}\lambda^{n-1}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\lambda+\frac{1}{a_0}.$$

四、关于特征值的其它问题

1　用特征根计算方阵A的行列式$|A|$

例4　设A是3阶矩阵，它的3个特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$，设$B = A^3 - 5A^2$，求$|B|$；$|A - 5E|$.

解　利用A的行列式与特征值的重要关系$|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$来计算$|A|$.

令$f(x) = x^3 - 5x^2$，

因为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$是$A$的全部特征值，

所以$f(\lambda_i)(1 \le i \le 3)$是$f(A)=A^3-5A^2=B$的全部特征值.故

$$|B| = |f(A)| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)f(\lambda_3)$$

$$= (-4)(-6)(-12) = -288.$$

下面求$|A-5E|$.

方法一

令$g(A)=A-5E$,

因为A的所有特征值为$\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=2$,

所以$g(A)$的所有特征值为$g(\lambda_1), g(\lambda_2), g(\lambda_3)$,

$$\therefore \left|A-5E\right| = \left|g(A)\right| = g(1)g(-1)g(2) = -72.$$

方法二

因为A的所有特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2,$

故 $\left|A\right| = 1 \times (-1) \times 2 = -2.$

又 $B = A^3 - 5A^2 = A^2(A-5E),$

$$\therefore \left|B\right| = \left|A\right|^2 \cdot \left|A-5E\right|, \quad 但\left|B\right| = -288,$$

$$\therefore \left|A-5E\right| = \left|B\right| \big/ \left|A\right|^2 = -288/4 = -72.$$

方法三

因为A的所有特征值为$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2,$

所以 $f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2),$

$$|5E - A| = f_A(5) = (5-1)(5+1)(5-2) = 72,$$

$$|A - 5E| = (-1)^3 |5E - A| = -72.$$

2　用方阵A的特征值,来讨论$kE-A$的可逆性

当k是A的特征值时,$|kE-A|=0$,$kE-A$不可逆;

当k不是A的特征值时,$|kE-A|\neq 0$,$kE-A$可逆.

例5　设A为n阶方阵,

(1)若 $A^2=E$,$8E-A$是否可逆?

(2)设λ是A的特征值,且$\lambda\neq\pm 1$,$A\pm E$是否可逆?

解　(1) $\because A^2=E$,

$\therefore A$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$,

故$k=8$不是A的特征值，从而$8E-A$可逆.

一般地,对$k\neq\pm1$,$kE-A$均可逆.

(2)因为$\lambda\neq\pm1$,所以±1不是A的特征值,于是

$$|1\cdot E-A|\neq 0,|(-1)\cdot E-A|\neq 0.$$

又 $$|-E-A|=|-(E+A)|=(-1)^n|A+E|,$$

$$\therefore |A+E|\neq 0;$$

$$|E-A|=|-(A-E)|=(-1)^n|A-E|,$$

$$\therefore |A-E|\neq 0,$$

故$A\pm E$均为可逆矩阵.

五、判断方阵 A 可否对角化

例6　设A是n阶下三角阵.

(1)在什么条件下 A 可对角化？

(2)如果 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$，且至少有一 $a_{i_0 j_0} \neq 0$ $(i_0 > j_0)$，证明A不可对角化.

解　(1) A 可对角化的充分条件是 A 有 n 个互异的特征值．下面求出 A 的所有特征值.

$$\because A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\therefore f_A(\lambda)=\left|\lambda E-A\right|$$
$$=(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn}).$$

令 $f_A(\lambda)=0$, 即$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})=0$,

得A的所有特征值$\lambda_i=a_{ii}(1\le i\le n)$.

当$\lambda_i\ne\lambda_j(i\ne j,i,j=1,2,\cdots,n)$时,即当$a_{ii}\ne a_{jj}$时,$A$可对角化.

(2)用反证法.

若A可对角化,则存在可逆矩阵P,使

$$P^{-1}AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \lambda_i (1 \le i \le n)$$

是A的特征值.

由(1)可知$\lambda_i = a_{ii} = a_{11}$,所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{11} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}E.$$

$$A = P a_{11} E P^{-1} = a_{11} P P^{-1} = a_{11} E,$$

这与至少有一个$a_{i_0 j_0} \neq 0 (i_0 > j_0)$矛盾,故$A$不可对角化.

六、利用正交变换将实对称矩阵化为对角阵

例7 设实对称阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,求正交变换 T,使 $T^{-1}AT$ 为对角阵 .

解 第一步 求A的特征值. 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0,$$

得 $\lambda_1 = 4,\quad \lambda_2 = 1,\quad \lambda_3 = -2.$

第二步　由$(\lambda_i E - A)x = 0$,求出A的特征向量.

对 $\lambda_1 = 4$,由$(4E - A)x = 0$,得

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 + 4x_3 = 0, \end{cases}$$

解之得基础解系 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

对 $\lambda_2 = 1$,由$(E - A)x = 0$,得

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \qquad\quad = 0, \\ 2x_1 \qquad\quad + 2x_3 = 0, \\ \qquad 2x_2 + \quad x_3 = 0, \end{cases}$$

解之得基础解系 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

对 $\lambda_3 = -2$,由$(-2E - A)x = 0$,得

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

解之得基础解系 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

第三步　将特征向量正交化.因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$是属于$A$的3个不同特征值的特征向量,故它们必两两正交.

第四步　将特征向量单位化.

令 $\eta_i = \dfrac{\alpha_i}{\|\alpha_i\|}, i = 1,2,3,$ 得

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

作 $$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix},$$

则 $$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$