于是

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
$$= a_{i1}a_{i1} + \cdots + a_{ij}a_{ij} + \cdots + a_{in}a_{in} \geqslant a_{ij}^2 > 0.$$

［证法 2］ 反证法若 $|A|=0$，由于 $A^*=A^{\mathrm{T}}$，所以 $AA^{\mathrm{T}}=AA^*=|A|E=O$. 记

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}，则 A^{\mathrm{T}}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

于是
$$AA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

故 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $\alpha_i=0$. 于是 $A=O$，与题设 $A$ 为非零矩阵矛盾，从而 $|A|\neq 0$.

**［典型错误］** 部分考生误认为 $A\neq O$ 便有 $|A|\neq 0$；部分考生不知如何应用条件 $A^*=A^{\mathrm{T}}$. 这都是基本概念不清所致.

## 二、矩阵

### · 考试内容与要求 ·

**考试内容**

矩阵的概念 矩阵的线性运算 矩阵的乘法 方阵的幂 方阵乘积的行列式 矩阵的转置 逆矩阵的概念和性质 矩阵可逆的充分必要条件 伴随矩阵 矩阵的初等变换 初等矩阵 矩阵的秩 矩阵的等价 分块矩阵及其运算

注 数学二不包括“分块矩阵及其运算”.

**考试要求**

1. 理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质.

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.

3. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念. 会用伴随矩阵求逆矩阵.

4. 理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念. 掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

5. 了解分块矩阵及其运算.

注 数学二不要求“了解分块矩阵及其运算”.

### · 考试内容解析 ·

**（一）矩阵及其运算**

**1. 矩阵的概念**

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的 $m$ 行 $n$ 列的矩形数表

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵，简记为 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$. 其中 $a_{ij}$叫做矩阵$A$ 的位于第$i$ 行第$j$ 列元素，元素都是实数的矩阵称为实矩阵；元素是复数的矩阵称为复矩阵，除非特别声明，一般讨论的都是实矩阵.

元素全是 0 的矩阵称为零矩阵，记为 $O$.

行数与列数都等于 $n$ 的矩阵 $A$ 称为$n$ 阶矩阵或$n$ 阶方阵.

两个矩阵的行数相等且列数也相等，则称它们是同型矩阵. 如果 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$与 $B=[b_{ij}]_{m\times n}$是同型矩阵，当它们的对应元素相等. 即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$时，则称矩阵 $A$ 与 $B$ 相等，记为 $A=B$.

2. 矩阵的运算

(1) 矩阵的加法

设同型矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{m\times n}$，则矩阵

$$C=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

称为矩阵 $A$ 与 $B$ 的和，记为 $C=A+B$，矩阵 $A$ 与 $B$ 的差定义为

$$A-B=A+(-B)=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n},$$

其中 $-B=[-b_{ij}]_{m\times n}$称为 $B$ 的负矩阵.

(2) 数乘矩阵

数 $\lambda$ 与矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$的乘积记为$\lambda A$ 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A=A\lambda=[\lambda a_{ij}]_{m\times n}.$$

矩阵的加法与数乘矩阵合起来称为矩阵的线性运算. 矩阵的线性运算满足下述运算规律：

1° 交换律 $A+B=B+A$；

2° 结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$；

3° 分配律 $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$，

$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$；

4° 数与矩阵相乘的结合律

$$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A.$$

(3) 矩阵的乘法

设 $A=[a_{ij}]$是 $m\times s$ 矩阵，$B=[b_{ij}]$是 $s\times n$ 矩阵，则 $A$ 与 $B$ 的乘积$AB$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，记 $C=AB=[c_{ij}]$，它的第 $i$ 行第$j$ 列元素$c_{ij}$是$A$ 的第$i$ 行的$s$ 个元素与 $B$ 的第$j$ 列的$s$ 个对应元素乘积之和，即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},$$
$$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n.$$

因此，矩阵 $A$ 与 $B$ 可乘的条件是：$A$ 的列数必须等于 $B$ 的行数. 积矩阵 $C=AB$ 的行数与 $A$ 的行数相同，列数与 $B$ 的列数相同.

矩阵乘法满足下述运算规律：

① 结合律 $(AB)C=A(BC)$；

② 分配律 $A(B+C)=AB+AC$，

$(A+B)C=AC+BC$；

③ 数与乘积的结合律

$$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B).$$

矩阵的乘法一般不满足交换律，即 $AB\neq BA$；也没有消去律，即由 $AB=AC$ 一般不能推出 $B=C$.

方阵的幂是利用矩阵乘法规定的，即

$$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个}.$$

方阵的幂具有运算规律 $A^kA^l=A^{k+l}$，$(A^k)^l=A^{kl}$，其中 $k$，$l$ 为正整数.

设 $A$ 是$n$ 阶方阵，则方阵 $A$ 的行列式$|A|$是 $n$ 阶行列式，且有如下运算规律：设 $A$，$B$ 都是$n$ 阶方阵，

则

$$|kA| = k^n|A|, \quad |AB| = |A||B|.$$

(4) 矩阵的转置

将矩阵 $A$ 的行与列按原次序互换，所得到的矩阵称为 $A$ 的转置矩阵，记为 $A^T$. 因此，若 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，则 $A^T$ 为 $n\times m$ 矩阵，并且 $A^T$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素等于 $A$ 的第 $j$ 行第 $i$ 列元素.

矩阵的转置是一种运算，满足下述运算规律：

① $(A^T)^T = A$;

② $(A+B)^T = A^T + B^T$;

③ $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

④ $(AB)^T = B^T A^T$.

3. 特殊矩阵

单位矩阵　主对角线上元素全是 1，其余元素均为 0 的 $n$ 阶方阵，叫做 $n$ 阶单位矩阵，记为 $E$（若需强调其阶数时，记为 $E_n$）. 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数 1 在数的乘法中的作用：

$$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}, \quad A_{m\times n}E_n = A_{m\times n}.$$

对于 $n$ 阶方阵 $A$，规定 $A^0 = E$.

对角矩阵　除主对角线上的元素外，其余元素均为 0 的 $n$ 阶方阵，称为 $n$ 阶对角矩阵. 同阶的对角矩阵的和、差、积仍是对角矩阵.

三角矩阵　主对角线以下的元素均为 0 的 $n$ 阶方阵称为 $n$ 阶上三角矩阵；主对角线以上的元素均为 0 的 $n$ 阶方阵称为下三角矩阵. 同阶的上(下)三角矩阵的和、差、积仍是上(下)三角矩阵.

对称矩阵　满足 $A^T = A$ 的 $n$ 阶方阵 $A$，称为 $n$ 阶对称矩阵. 若 $A$，$B$ 是同阶的对称矩阵，则 $A+B$，$A-B$，$\lambda A$ 也是对称矩阵，但 $AB$ 不一定是对称矩阵.

反对称矩阵　满足 $A^T = -A$ 的 $n$ 阶方阵，称为 $n$ 阶反对称矩阵. 若 $A$，$B$ 是同阶的反对称矩阵，则 $A+B$，$A-B$，$\lambda A$ 也是反对称矩阵，但 $AB$ 不一定是反对称矩阵.

4. 伴随矩阵

设 $A=[a_{ij}]$是 $n$ 阶方阵，则由行列式$|A|$的各元素 $a_{ij}$的代数余子式$A_{ij}$所构成的 $n$ 阶矩阵

$$A^* = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

称为矩阵 $A$ 的伴随矩阵.

任意 $n$ 阶方阵 $A$ 与它的伴随矩阵 $A^*$之间有如下的关系

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

这是伴随矩阵的一个重要性质.

5. 可逆矩阵与逆矩阵

$n$ 阶方阵 $A$ 称为可逆的，如果存在一个 $n$ 阶方阵 $B$，使得

$$AB = BA = E.$$

而把矩阵 $B$ 叫做 $A$ 的逆矩阵，记为 $A^{-1}$.

$n$ 阶方阵 $A$ 可逆的充分必要条件是其行列式$|A|\neq 0$. 当 $A$ 可逆时，有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

行列式为零的方阵称为奇异矩阵，行列式不为零的方阵称为非奇异矩阵. 所以，矩阵可逆的充分必要条件是该矩阵是非奇异矩阵.

可逆矩阵有下列性质：

① 若 $A$ 可逆，则 $A$ 的逆矩阵是唯一的；

② 若 $A$ 可逆，则 $A^{-1}$ 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$；

③ 若 $A$ 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 $\lambda A$ 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$；

④ 若 $A$，$B$ 为同阶可逆矩阵，则 $AB$ 可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1};$$

⑤ 若 $A$ 可逆，则 $A^{\mathrm{T}}$ 也可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

**（二）矩阵的初等变换与初等矩阵**

**1. 矩阵的初等变换**

下述三种对矩阵的行施行的变换称为矩阵的初等行变换：

① 互换矩阵的两行；

② 用一个非零数乘矩阵某一行中的所有元素；

③ 把矩阵某一行所有元素的 $k$ 倍加到另一行对应的元素上去.

在上述三种变换中把行换成列，就得到矩阵的初等列变换. 矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.

具有如下特征的矩阵称为行阶梯形矩阵：

① 零行（即元素全为零的行）全都位于非零行的下方；

② 各非零行左起第一个非零元素的列指标由上至下是严格增大的.

一个行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵，如果其非零行的第一个非零元素为 1，并且这些非零元素所在列的其他元素均为 0.

对于任何矩阵 $A$，总可以经过有限次初等行变换把它化为行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

2. 初等矩阵　单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵称为初等矩阵.

初等矩阵必是可逆矩阵，且初等矩阵的逆矩阵仍是初等矩阵. 用初等矩阵左（右）乘矩阵 $A$，相当于对 $A$ 施行一次相应的初等行（列）变换.

3. 矩阵的等价　如果矩阵 $A$ 可经过有限次初等变换化为矩阵 $B$，则称矩阵 $A$ 与 $B$ 等价.

如果矩阵 $A$ 与 $B$ 等价，则矩阵 $B$ 与 $A$ 也等价；并且若 $A$ 与 $B$ 等价，$B$ 与 $C$ 等价，则 $A$ 与 $C$ 等价.

任一矩阵 $A$ 都与一个形如 $\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 的矩阵等价，其中 $E_r$ 是 $r$ 阶单位矩阵，$r$ 是矩阵 $A$ 的秩.

**（三）矩阵的秩**

**1. 矩阵秩的概念及性质**

在 $m\times n$ 矩阵 $A$ 中，任取 $k$ 行 $k$ 列（$k\leqslant\min\{m,n\}$），位于这些行列交叉处的 $k^2$ 个元素按其原来次序组成的一个 $k$ 阶行列式，称为 $A$ 的一个 $k$ 阶子式. 矩阵 $A$ 的不为零的子式的最高阶数称为 $A$ 的秩，记为 $r(A)$.

零矩阵的秩规定为 0.

设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，则有

① $0\leqslant r(A)\leqslant\min\{m,n\}$；

② $r(A^{\mathrm{T}})=r(A)$；

③ $r(kA)=\begin{cases}0, & 当\ k=0,\\ r(A), & 当\ k\neq 0,\end{cases}$ 其中 $k$ 是常数.

$r(A)\geqslant r$ 的充分必要条件是 $A$ 中至少有一个 $r$ 阶子式不为零；$r(A)\leqslant r$ 的充分必要条件是 $A$ 的所有 $r+1$ 阶子式均为零.

特别地，当 $A$ 是 $n$ 阶方阵时，$A$ 的行列式 $|A|$ 是 $A$ 的 $n$ 阶子式，因此，$r(A)=n$ 的充分必要条件是 $|A|\neq 0$. 这时也称方阵 $A$ 为满秩矩阵.

初等变换不改变矩阵的秩. 当 $P$，$Q$ 是可逆矩阵时，有

$$r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)=r(A).$$

但一般地 $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$.

2. 用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵.

由于行阶梯形矩阵和行最简形矩阵的秩等于其非零行的行数，而初等变换又不改变矩阵的秩，所以对矩阵 $A$ 施行初等行变换化为行阶梯形或行最简形矩阵 $B$，则矩阵 $A$ 的秩 $r(A)$ 等于矩阵 $B$ 中非零行的行数.

对矩阵$[A \vdots E]$施行初等行变换，把 $A$ 化为单位矩阵 $E$，则$[A \vdots E]$中的 $E$ 即化为 $A$ 的逆矩阵 $A^{-1}$. 这是因为

$$A^{-1}[A \vdots E]=[E \vdots A^{-1}].$$

类似地，也可对$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{bmatrix}$施行初等列变换把 $A$ 化为单位矩阵，则其下边 $E$ 就化为 $A^{-1}$. 这种方法可以求解矩阵方程：$AX=C$，$XB=C$，$AXB=C$.

**(四) 分块矩阵及其运算(这一段的内容对数学二不作要求.)**

将矩阵 $A$ 用若干条纵线和横线分成一些小矩阵，每一个小矩阵称为 $A$ 的子块，以子块为元素的矩阵称为分块矩阵. 矩阵分块是为了便于运算和揭示某些性质，主要是分块对角矩阵的乘法和求逆，例如，设

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix},$$

则

$$A^k=\begin{bmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^k \end{bmatrix},$$

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|.$$

从而若$|A_i|\neq 0\ (i=1,2,\cdots,s)$，则$|A|\neq 0$，故 $A$ 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

对矩阵分块时，有两种分块法要特别重视，即按行分块和按列分块：$A=[A_1\ A_2 \cdots\ A_n]$或

$$A=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}.$$

## ·例 题 详 解·

**例 2.1** 已知 $\alpha=(1,2,3)$，$\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$. 设 $A=\alpha^{\mathrm{T}}\beta$，其中 $\alpha^{\mathrm{T}}$ 是 $\alpha$ 的转置. 则 $A^n=$________.

[答案] $3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

[提示] 本题主要考查矩阵乘法运算，矩阵乘法运算具有结合律.

[解] 由于 $\beta\alpha^{\mathrm{T}}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=3$，所以

$$A^n=\underbrace{(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)}_{n}=\alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)}_{n-1}\beta=3^{n-1}(\alpha^T\beta).$$

$$=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

[典型错误] 没有或不会运用“结合律”计算.

**例 2.2** 设 $\alpha$ 为 3 维列向量，$\alpha^T$ 是 $\alpha$ 的转置，若 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则 $\alpha^T\alpha=$ ________.

[答案] 3.

[提示] 本题考查矩阵乘法．要看清 $\alpha\alpha^T$ 与 $\alpha^T\alpha$ 的不同.

[解] 若 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，则

$$\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1\quad a_2\quad a_3)=\begin{pmatrix}a_1a_1&a_1a_2&a_1a_3\\a_2a_1&a_2a_2&a_2a_3\\a_3a_1&a_3a_2&a_3a_3\end{pmatrix}.$$

而 $\alpha^T\alpha=(a_1\quad a_2\quad a_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1^2+a_2^2+a_3^3$. 故 $\alpha^T\alpha$ 等于 $\alpha\alpha^T$ 主对角线上元素的和.

本题中由于 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，所以 $\alpha^T\alpha=1+1+1=3$.

[典型错误] 部分同学混淆记号 $\alpha\alpha^T$ 与 $\alpha^T\alpha$. 当 $\alpha$ 为 $n$ 维非零列向量时，$\alpha\alpha^T$ 是秩为 1 的 $n$ 阶矩阵，而 $\alpha^T\alpha$ 是 1 阶矩阵，即为一个数.

**例 2.3** 设矩阵 $A$ 满足 $A^2+A-4E=O$，其中 $E$ 为单位矩阵．则 $(A-E)^{-1}=$ ________.

[答案] $\frac{1}{2}(A+2E)$.

[提示] 本题考查用定义求逆矩阵．题中给出了矩阵方程，需经过恒等变形．得出 $(A-E)B=E$ 的形式，确定 $A-E$ 的逆矩阵.

[解] 由于 $A^2+A-4E=O$，所以

$$A^2-A+2A-2E=2E,$$

于是

$$A(A-E)+2(A-E)=2E.$$

$$(A+2E)(A-E)=2E,$$

从而

$$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E).$$

[典型错误] 题中没有具体给出矩阵的元素，所以不能用初等变换或求伴随矩阵的方法求逆矩阵，只能用定义．从上面的解题过程可以看出，类似于多项式的因式分解，我们配出了因式 $A-E$. 不少考生正是忽视逆矩阵的定义而不知如何下手解题.

**例 2.4** 设 $A$、$B$ 均为 3 阶矩阵．$E$ 是 3 阶单位矩阵．已知 $AB=2A+B$．$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，则 $(A-E)^{-1}=$ ____.

[答案] $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

[提示] 本题考查求逆矩阵，先做恒等变形，再进行数值计算.

[解] 由于 $AB=2A+B$，所以

$$AB-B-2A+2E=2E,$$

$$(A-E)B-2(A-E)=2E,$$

于是

$$(A-E)(B-2E)=2E,$$

从而

$$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(B-2E)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

[典型错误] 本题具体给出了矩阵 $B$，若先求矩阵 $A$ 与 $A-E$ 之后，再求 $(A-E)^{-1}$，计算量就比较大，费时也容易出错.

例 2.5 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$，$E$ 为 4 阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(E+B)^{-1}=$ ________.

[答案] $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}$.

[提示] 本题考查逆矩阵，尽管题中具体给出了矩阵 $A$，但先求出矩阵 $B$，再求 $(E+B)^{-1}$ 计算量比较大. 与前一题类似，先做恒等变形，再进行数值计算.

[解] 由于 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则

$$\begin{aligned}E+B&=E+(E+A)^{-1}(E-A)\\&=(E+A)^{-1}(E+A)+(E+A)^{-1}(E-A)\\&=(E+A)^{-1}(E+A+E-A)=2(E+A)^{-1},\end{aligned}$$

从而

$$(E+B)^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}.$$

[典型错误] 部分考生不会化简. 注意在矩阵的化简中，经常用到单位矩阵的恒等变形，本题中

$$B=(E+A)^{-1}(E-A),$$

提示我们将 $E+B$ 中的 $E$ 变形为 $E=(E+A)^{-1}(E+A)$.

例 2.6 设 3 阶矩阵 $A$，$B$ 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$，且 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$，则 $B=$ ________.

[答案] $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

[提示] 本题考查矩阵运算，先化简再代入具体数值求解.

[解] 在等式 $A^{-1}BA=6A+BA$ 两端左乘矩阵 $A$，右乘矩阵 $A^{-1}$ 得 $B=6A+AB$. 由于 $E-A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&0\\0&\frac{3}{4}&0\\0&0&\frac{6}{7}\end{pmatrix}$ 显然可逆，所以 $B=6(E-A)^{-1}A$. 而

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&0\\0&\frac{3}{4}&0\\0&0&\frac{6}{7}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&0\\0&\frac{4}{3}&0\\0&0&\frac{7}{6}\end{pmatrix}，故 B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例 2.7 设 4 阶矩阵 $A$ 的秩为 2，则其伴随矩阵 $A^*$ 的秩为________.

[答案] 0.

[提示] 本题考查矩阵的秩与伴随矩阵的概念.

[解] 由于矩阵 $A$ 的秩为 2，根据秩的定义，矩阵 $A$ 的 3 阶子式均为零. 从而 $A^*$ 的每一个元素均为零，即 $A^*=O$，故 $A^*$ 的秩为 0.

注 对于一般的 $n$ 阶矩阵 $A$，若 $r(A)=n$，则矩阵 $A$ 可逆. 这时，$A^*=|A|A^{-1}$ 也可逆. 从而 $r(A^*)=n$；若 $r(A)<n-1$，则矩阵 $A$ 的 $n-1$ 阶子式均为零，从而 $A^*=O$，$r(A^*)=0$；若 $r(A)=n-1$，则 $A$ 中有 $n-1$ 阶子式非零，即 $A^*$ 非零矩阵，故 $r(A^*)\geqslant 1$. 另一方面，由于 $AA^*=O$，于是 $r(A)+r(A^*)\leqslant n$，故 $r(A^*)\leqslant n-(n-1)=1$. 因此 $r(A^*)=1$. 总之有

$$r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n,\\1, & r(A)=n-1,\\0, & r(A)<n-1.\end{cases}$$

[典型错误] 填 2 或 1 的都有. 主要原因是对矩阵的秩和 $A^*$ 的结构理解不透.

例 2.8 设 $A$ 是 $4\times 3$ 矩阵，且 $r(A)=2$. 而 $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(AB)=$________.

[答案] 2.

[提示] 本题考查矩阵乘积的秩. 一般我们有 $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$，若矩阵 $B$ 可逆，则

$$r(AB)\leqslant r(A)=r(AE)=r[(AB)B^{-1}]\leqslant r(AB)，从而 r(AB)=r(A).$$

[解] 由于 $|B|=10\neq 0$，所以矩阵 $B$ 可逆，从而 $r(AB)=r(A)=2$.

例 2.9 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 $t=$________.

[答案] $-3$.

[提示] 本题考查矩阵运算. 对于非零矩阵 $A$，$B$，由 $AB=O$，可知 $A$，$B$ 均非可逆矩阵. 另一方面，由 $AB=O$，可知 $B$ 的每一列均为方程组 $Ax=0$ 的解.

[解] 若 $A$ 可逆，则由 $AB=O$，知 $B$ 为零矩阵，而题设 $B$ 是非零矩阵，所以 $A$ 不可逆，从而有 $|A|=0$. 而

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0\\4&t&t+3\\3&-1&0\end{vmatrix}=7(t+3),$$

故 $t=-3$.

也可以这样求解：

设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由于 $AB=O$，则

$$AB=A(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(A\beta_1,A\beta_2,A\beta_3)=(0,0,0),$$

$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 均为方程组 $Ax=0$ 的解，由于 $B$ 是非零矩阵，方程组 $Ax=0$ 有非零解，所以 $|A|=0$. 从而 $t=-3$.

注　矩阵乘法不具有消去律，即由 $AB=O$，$A\neq O$ 不能推出 $B=O$. 但是以下两种情况消去律成立.

(1) 若 $AB=O$，且矩阵 $A$ 可逆，则 $B=O$.

(2) 若 $AB=O$，且矩阵 $A$ 的秩 = $A$ 的列数，则 $B=O$.

因为这时方程组 $Ax=0$ 只有零解，而矩阵 $B$ 的每一列均为该方程组的解. 故 $B=O$.

**例 2.10**　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $B$ 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 $A^*$ 为 $A$ 的伴随矩阵，$E$ 是单位矩阵，则 $|B|=$ ________.

**[答案]**　$\frac{1}{9}$.

**[提示]**　本题主要考查矩阵运算及矩阵的行列式. 将矩阵方程与行列式综合在一起.

**[解]**　由于 $ABA^*=2BA^*+E$，所以 $ABA^*A=2BA^*A+EA$. 又 $|A|=3$，$AA^*=3E$，

故有
$$3AB=6B+A,$$
于是
$$(3A-6E)B=A,$$
$$|3A-6E||B|=|A|,$$
从而
$$27|A-2E||B|=|A|=3,$$
又
$$|A-2E|=1$$
所以
$$|B|=\frac{1}{9}.$$

**[典型错误]**　$A$ 是 3 阶矩阵，有部分考生错误地得到 $|3(A-2E)|=3|A-2E|$. 将行列式某一行(列)的公因数可以提到行列式符号外面这一性质与 $|kA|=k^n|A|$（$n$ 为矩阵 $A$ 的阶数）相混淆.

**例 2.11**　设 $n$ ($n\geqslant 3$)阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

若矩阵 $A$ 的秩为 $n-1$，则 $a$ 必为

(A) 1.　　(B) $\frac{1}{1-n}$.　　(C) $-1$.　　(D) $\frac{1}{n-1}$.

**[答案]**　(B)

**[提示]**　本题考查矩阵秩的概念.

**[解]**　由于

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{vmatrix}=[(n-1)a+1]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1-a&0&\cdots&0\\0&0&1-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$
$$=[(n-1)a+1](1-a)^{n-1},$$

而 $r(A)=n-1$，故 $|A|=0$，即 $[(n-1)a+1](1-a)^{n-1}=0$，从而 $a=1$ 或 $a=\frac{1}{1-n}$. 当 $a=1$ 时，$r(A)$

$=1$ 与题设不符．所以 $a=\dfrac{1}{1-n}$，选项(B)正确．

例 2.12　设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B$ 是 $n\times m$ 矩阵，则

(A) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$.　　(B) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$.

(C) 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$.　　(D) 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|=0$.

[答案]　(B).

[提示]　本题考查矩阵的秩与矩阵的行列式．对于 $n$ 阶矩阵 $A$，$|A|=0\Leftrightarrow r(A)<n$.

[解]　由于 $AB$ 是 $m$ 阶矩阵，所以 $|AB|=0\Leftrightarrow$矩阵 $AB$ 的秩 $r(AB)<m$．另一方面，

$$r(AB)\leqslant r(A)\leqslant \min\{m,n\}.$$

所以当 $m>n$ 时，$r(AB)\leqslant r(A)\leqslant n<m$，故 $|AB|=0$，选项(B)正确．

也可用举反例排除法：当矩阵 $A=O$ 时，选项(A)、(C)均不正确，可排除．只需分析剩下的选项：当 $n>m$ 时，矩阵 $AB$ 的秩可能等于 $m$，例如

$$\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right|=1\neq 0,$$

从而选项(D)不正确．

例 2.13　设 $A$，$B$ 均为 $n$ 阶方阵，则必有

(A) $|A+B|=|A|+|B|$.　　(B) $AB=BA$.

(C) $|AB|=|BA|$.　　(D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

[答案]　(C).

[提示]　本题考查矩阵运算与矩阵的行列式．

[解]　由于 $A$，$B$ 均为 $n$ 阶方阵．则 $|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$，(C)选项正确．

由于矩阵乘法不具有交换律，(B)选项不正确．

设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，则 $A+B=O$，可见矩阵 $A$，$B$ 可逆时，$A+B$ 不一定可逆，(D)选项错误．这时 $|A+B|=0$，$|A|+|B|=2$，(A)选项不正确．

[典型错误]　错选(A)．原因是对行列式的运算性质理解不深．也表明不会灵活地举反例以否定 $|A+B|=|A|+|B|$.

例 2.14　设 $n$ 阶方阵 $A$，$B$，$C$ 满足关系式 $ABC=E$．其中 $E$ 是 $n$ 阶单位矩阵，则必有

(A) $ACB=E$.　　(B) $CBA=E$.　　(C) $BAC=E$.　　(D) $BCA=E$.

[答案]　(D).

[提示]　本题考查矩阵运算及逆矩阵的概念．对于 $n$ 阶方阵 $A$，$B$．若 $AB=E$，则 $B=A^{-1}$，且 $BA=E$.

[解]　由于 $ABC=E$，则有 $A(BC)=E$，故 $A^{-1}=BC$．从而 $(BC)A=E$．(D)选项正确．

[典型错误]　部分考生选择错误的原因是误用矩阵乘法的交换律．注意矩阵乘法没有交换律，只有特殊情况才能交换．

例 2.15　设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，

则必有

(A) $AP_1P_2=B$.　　(B) $AP_2P_1=B$.　　(C) $P_1P_2A=B$.　　(D) $P_2P_1A=B$.

[答案] (C).

[提示] 本题考查初等矩阵与初等变换的关系，左乘初等矩阵相当于施行初等行变换，右乘初等矩阵相当于施行初等列变换.

[解] 由于矩阵 $A$ 经行的初等变换变为矩阵 $B$，所以选项(A)，(B)均不正确.

(C)选项中的 $P_1P_2A$ 表示将矩阵 $A$ 的第 1 行加到第 3 行上，再互换所得矩阵的 1,2 行，这样得到的矩阵恰好是矩阵 $B$.所以(C)为正确选项.

(D)选项中的 $P_2P_1A$ 表示将矩阵 $A$ 的第 1,2 行互换，再将所得矩阵第一行加到第三行上，这样得到的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{21} & a_{32}+a_{22} & a_{33}+a_{23} \end{pmatrix},$$

不是题中已知的矩阵 $B$，所以(D)不正确.

[典型错误] 部分同学选择了错误答案(D). 原因是没有注意初等变换的顺序. 由于矩阵乘法不具有交换律，对矩阵进行初等变换时，次序也非常重要，变换的次序不同，结果通常不同.

**例 2.16** 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 其中矩阵 $A$ 可逆，则 $B^{-1}$ 等于

(A) $A^{-1}P_1P_2$.　　(B) $P_1A^{-1}P_2$.　　(C) $P_1P_2A^{-1}$.　　(D) $P_2A^{-1}P_1$.

[答案] (C).

[提示] 本题考查矩阵的初等变换与初等矩阵及初等矩阵的逆矩阵.

[解] 将矩阵 $A$ 的 1，4 列对调，2，3 列对调得到矩阵 $B$，所以有 $B=AP_1P_2$ 或 $B=AP_2P_1$（本题中恰好有 $P_1P_2=P_2P_1$）. 由于 $P_1^{-1}=P_1$，$P_2^{-1}=P_2$，因此 $B^{-1}=P_2^{-1}P_1^{-1}A^{-1}=P_2P_1A^{-1}$或 $B^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}=P_1P_2A^{-1}$，正确选项为(C).

[典型错误] 有选(A)的. 因为将 $B=AP_1P_2$ 错写成 $P_2P_1A$.

**例 2.17** 设 $A$ 是 3 阶方阵. 将 $A$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $B$，再把 $B$ 的第 2 列加到第 3 列得 $C$. 则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 $Q$ 为

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[答案] (D).

[提示] 本题考查矩阵的初等变换与初等矩阵及两者的关系.

[解] 由于进行列的初等变换相当于右乘相应的初等矩阵，所以

$$A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=B，B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=C,$$

从而

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

选项(D)正确.

例 2.18　设 $A$ 为 3 阶矩阵，将 $A$ 的第 2 行加到第 1 行得 $B$，再将 $B$ 的第 1 列的 $-1$ 倍加到第 2 列得 $C$，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

(A) $C=P^{-1}AP$　　(B) $C=PAP^{-1}$　　(C) $C=P^{\mathrm{T}}AP$　　(D) $C=PAP^{\mathrm{T}}$

[答案]　(B).

[提示]　本题考查初等变换与初等矩阵及它们的关系，左乘初等矩阵相当于做相应的初等行变换，右乘初等矩阵相当于做相应的初等列变换.

[解]　由于 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以 $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 根据题设得

$$PA=B,\ BP^{-1}=C,$$

于是 $C=BP^{-1}=PAP^{-1}$，从而选项(B)正确.

[典型错误]　错误主要有两点(1)不清楚初等变换与初等矩阵的关系；(2) 没有分析 $P^{-1}$、$P^{\mathrm{T}}$. 注意 $P^{-1}$、$P^{\mathrm{T}}$ 均为初等矩阵. $P^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是将单位矩阵第 1 行的 1 倍加到第 2 行或将单位矩阵第 2 列的 1 倍加到第 1 列得到的初等矩阵。

例 2.19　设 $A$ 为 $n$ ($n>2$)阶可逆矩阵，交换 $A$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $B$，$A^*$，$B^*$ 分别是 $A$，$B$ 的伴随矩阵，则

(A) 交换 $A^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $B^*$.　　(B) 交换 $A^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $B^*$.

(C) 交换 $A^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.　　(D) 交换 $A^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

[答案]　(C).

[提示]　本题综合考查矩阵的初等变换、初等矩阵及伴随矩阵. 由于 $A$ 是可逆矩阵，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，所以我们有 $A^*=|A|A^{-1}$. 这样就将 $A$ 与 $A^*$ 联系起来了.

[解]　由于 $A$ 为可逆矩阵，所以 $A^*=|A|A^{-1}$. 用 $E_{12}$表示交换单位矩阵的 1，2 行(列)得到的初等矩阵，由题意知 $B=E_{12}A$，于是 $B^{-1}=A^{-1}(E_{12})^{-1}=A^{-1}E_{12}$，且有 $|B|=|E_{12}A|=|E_{12}||A|=-|A|$，从而

$$-|B|B^{-1}=|A|A^{-1}E_{12},$$

于是

$$-B^*=A^*E_{12}.$$

即交换 $A^*$ 的 1，2 列得 $-B^*$，从而(C)选项正确.

[典型错误]　由题意得出 $B=E_{12}A$ 之后，部分考生不知如何与伴随矩阵相联系. 如果本题改为问 $A^{-1}$与 $B^{-1}$的关系，大部分同学可以答对. 同学们对公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$很熟悉，但对公式 $A^*=|A|A^{-1}$的运用不熟练，注意在矩阵 $A$ 可逆的条件下 $A^{-1}$与 $A^*$仅仅相差一个常数倍.

例 2.20　设 $A$ 是任一 $n$ ($n\geqslant 3$)阶矩阵，$A^*$是其伴随矩阵. 又 $k$ 为常数，且 $k\neq 0$，$\pm 1$，则必有$(kA)^*$等于

(A) $kA^*$.　　(B) $k^{n-1}A^*$.　　(C) $k^nA^*$.　　(D) $k^{-1}A^*$.

[答案]　(B).

[提示]　本题考查伴随矩阵的概念与矩阵运算，注意当矩阵 $A$ 可逆时，$A^*=|A|A^{-1}$.

[解]　设 $A=(a_{ij})$. 则有 $kA=(ka_{ij})$，于是 $|kA|$的$(i,j)$位置元素的代数余子式为

$$(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1j-1} & ka_{1j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-11} & \cdots & ka_{i-1j-1} & ka_{i-1j+1} & \cdots & ka_{i-1n} \\ ka_{i+11} & \cdots & ka_{i+1j-1} & ka_{i+1j+1} & \cdots & ka_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{nj-1} & ka_{nj+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}k^{n-1}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即为 $|A|$ 的 $(i,j)$ 位置元素的代数余子式的 $k^{n-1}$ 倍，从而由伴随矩阵的定义知 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$．故(B)选项正确．

若 $A$ 是可逆矩阵，也可以这样分析：这时 $kA$ 也可逆，利用伴随矩阵与逆矩阵的关系可得

$$(kA)^*=|kA|(kA)^{-1}=k^n|A|k^{-1}A^{-1}=k^{n-1}(|A|A^{-1})=k^{n-1}A^*.$$

在 $A$ 是可逆矩阵的假设下，类似地易得到伴随矩阵的其他结果，例如

$$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=||A|A^{-1}|(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^n|A^{-1}|\left(\frac{1}{|A|}A\right)=|A|^{n-2}A.$$

**例 2.21** 设 $A$，$B$ 都是 $n$ 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 $A$ 和 $B$ 的秩

(A) 必有一个等于 0．　　(B) 都小于 $n$．

(C) 一个小于 $n$，一个等于 $n$．　　(D) 都等于 $n$．

**[答案]** (B)．

**[提示]** 本题主要考查矩阵秩的概念和性质，可以用矩阵秩的定义分析，也可以借助齐次线性方程组来分析．

**[解]** 由于 $A$，$B$ 都是 $n$ 阶非零矩阵，根据秩的定义知 $A$ 和 $B$ 的秩均大于 0．所以选项(A)不正确．

若矩阵 $A$ 的秩为 $n$，则矩阵 $A$ 可逆，在等式 $AB=O$ 的两端左乘 $A^{-1}$ 得 $B=O$，与矩阵 $B$ 非零相矛盾，故矩阵 $A$ 的秩小于 $n$．同理矩阵 $B$ 的秩也小于 $n$，从而选项(B)正确，选项(C)与(D)不正确．

也可以这样分析：设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，由于 $AB=O$，则

$$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=(0,0,\cdots,0),$$

即有 $A\beta_i=0$．从而 $\beta_i$ 为方程组 $Ax=0$ 的解．由于矩阵 $B$ 非零，所以方程组 $Ax=0$ 有非零解，因此 $A$ 的秩小于 $n$．由 $AB=O$ 得 $B^TA^T=O^T=O$，知 $r(B^T)<n$，所以 $r(B)=r(B^T)<n$．

**例 2.22** 设 $A$ 是 $n$ 阶矩阵，满足 $AA^T=E$（$E$ 是 $n$ 阶单位矩阵，$A^T$ 是 $A$ 的转置矩阵），$|A|<0$，求 $|A+E|$．

**[提示]** 本题考查矩阵的行列式．由于矩阵 $A$ 没有具体给出，要计算 $|A+E|$ 只能做恒等变形，题设条件 $AA^T=E$ 提示我们将 $|A+E|$ 中的矩阵 $E$ 用 $AA^T$ 替换．

**[解]** 由于 $AA^T=E$，所以

$$|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A||E+A^T|=|A||(E+A)^T|=|A||E+A|.$$

于是

$$(1-|A|)|E+A|=0,$$

而 $|A|<0$，故 $1-|A|>0$，从而 $|A+E|=0$．

**[典型错误]** 部分考生感到本题无从下手．关于矩阵的行列式我们有 $|AB|=|A||B|$，但没有 $|A+B|=|A|+|B|$，所以计算行列式 $|A+B|$ 常用的方法是进行恒等变形，转化为矩阵乘积的行列式．

**例 2.23** 设 $(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$，其中 $E$ 是 4 阶单位矩阵，$A^T$ 是 4 阶矩阵 $A$ 的转置矩阵，且

$$B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

求矩阵 $A$．

**[提示]** 本题考查矩阵运算，求逆矩阵．应先化简，再进行数值计算．

**[解]** 由于 $(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$，左乘矩阵 $C$ 得

$$(2C-B)A^T=E,$$

取转置得 $$A(2C^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}})=E.$$
由于 $A$ 与 $2C^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}}$ 均为方阵，故

$$A=(2C^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}})^{-1}=\left(2\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}-\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

［典型错误］ 部分考生数字计算准确性不好.

例 2.24　已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

且矩阵 $X$ 满足

$$AXA+BXB=AXB+BXA+E,$$

其中 $E$ 为 3 阶单位矩阵，求矩阵 $X$.

［提示］ 本题考查矩阵方程的求解，应先化简再进行数值运算.

［解］ 由于 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，所以

$$AX(A-B)+BX(B-A)=E.$$

于是 $$(A-B)X(A-B)=E.$$

而 $|A-B|=1$，故矩阵 $A-B$ 可逆，从而

$$X=(A-B)^{-1}(A-B)^{-1}=[(A-B)^{-1}]^2$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

［典型错误］ 部分考生不会化简题中的矩阵方程，而化简矩阵方程根据不同的具体问题，化简方法不同. 一般来说用分配律，用矩阵左乘或右乘等式两端.

例 2.25　已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 $X$ 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$. 其中 $A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，求矩阵 $X$.

［提示］ 本题考查求解矩阵方程.

［解］ 由于 $A^*X=A^{-1}+2X$，用矩阵 $A$ 左乘等式两端，得

$$|A|X=E+2AX,$$

而 $|A|=4$，于是

$$(4E-2A)X=E.$$

由于 $4E-2A$，$X$ 均为方阵，所以 $4E-2A$ 可逆，且

$$X=(4E-2A)^{-1}=\frac{1}{2}(2E-A)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

例 2.26　设矩阵 $A$ 的伴随矩阵

$$A^{*}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 8\end{pmatrix},$$

且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，其中 $E$ 是 4 阶单位矩阵，求矩阵 $B$.

［提示］ 本题考查伴随矩阵的概念及矩阵运算，当矩阵 $A$ 可逆时，$A^{*}=|A|A^{-1}$，即伴随矩阵与逆矩阵 $A^{-1}$ 相差一个常数倍 $|A|$.

［解法 1］ 在等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 两端左乘矩阵 $A^{-1}$，右乘矩阵 $A$ 可得

$$B=A^{-1}B+3E,$$

从而

$$(E-A^{-1})B=3E.$$

由于 $|A^{*}|=|A|^{n-1}$，故有 $|A|^{3}=8$，并得 $|A|=2$，所以 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}A^{*}$. 代入，有

$$\left(E-\frac{1}{2}A^{*}\right)B=3E,\ \text{即}(2E-A^{*})B=6E.$$

而 $|2E-A^{*}|=-6$，即矩阵 $2E-A^{*}$ 可逆，故

$$B=6(2E-A^{*})^{-1}=6\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -6\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

［解法 2］ 在等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 两端右乘矩阵 $A$ 可得

$$AB=B+3A,$$

于是

$$(A-E)B=3A.$$

由于 $|A^{*}|=|A|^{n-1}$，故有 $|A|^{3}=8$，从而 $|A|=2$，$AA^{*}=2E$，故

$$A=2(A^{*})^{-1}=2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 8\end{pmatrix}^{-1}=2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

而 $|A-E|=-\frac{3}{4}$，于是矩阵 $A-E$ 可逆，故

$$B=3(A-E)^{-1}A=3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{4}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$=3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

［典型错误］ 部分考生在得出 $(A-E)B=3A$ 之后，由于已知的是 $A^{*}$，不是矩阵 $A$，感到无从下手，没有继续完成本题. 当矩阵 $A$ 可逆时，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$，于是 $A=|A|(A^{*})^{-1}$.

**例 2.27** 设 $A$ 是 $n$ 阶可逆矩阵，将 $A$ 的第 $i$ 行与第 $j$ 行对换后得到的矩阵记为 $B$，证明 $B$ 可逆，并求 $AB^{-1}$.

[提示] 本题考查初等矩阵性质，初等变换与初等矩阵的关系.

[解] 用 $E_{ij}$ 表示将单位矩阵的第 $i$ 行与第 $j$ 行对换后得到的初等矩阵，于是 $E_{ij}$ 可逆，且 $(E_{ij})^{-1}=E_{ij}$. 由于 $B=E_{ij}A$，且 $A$ 是可逆矩阵，所以矩阵 $B$ 可逆．且

$$AB^{-1}=A(E_{ij}A)^{-1}=A[A^{-1}(E_{ij})^{-1}]=(E_{ij})^{-1}=E_{ij}.$$

例 2.28 已知 $A$，$B$ 为 3 阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4E$，其中 $E$ 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明矩阵 $A-2E$ 可逆；

(2) 设 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 $A$.

[提示] 本题考查矩阵运算，逆矩阵的定义与计算.

[解] (1) 在等式 $2A^{-1}B=B-4E$ 两边左乘矩阵 $A$，得

$$2B=AB-4A,$$

于是

$$AB-2B-4A+8E=8E,$$

$$(A-2E)(B-4E)=8E.$$

故矩阵 $A-2E$ 可逆．且 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E)$.

(2) 根据(1)知 $A=8(B-4E)^{-1}+2E$，由于

$$(B-4E)^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

故 $A=8(B-4E)^{-1}+2E=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

[典型错误] 部分考生在解矩阵方程时，忽视了矩阵乘法没有交换律，错误地得出了 $AB-2B=B(A-2E)$.

例 2.29 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$，$A=\alpha\beta^{\mathrm T}$，$B=\beta^{\mathrm T}\alpha$，其中 $\beta^{\mathrm T}$ 是 $\beta$ 的转置，求解方程

$$2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma.$$

[提示] 本题考查矩阵运算与方程组的求解.

[解] 由题设得

$$A=\alpha\beta^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},0\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},$$

$$B=\beta^{\mathrm T}\alpha=\left(1,\frac{1}{2},0\right)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2.$$

由于 $A^2=(\alpha\beta^{\mathrm T})(\alpha\beta^{\mathrm T})=\alpha(\beta^{\mathrm T}\alpha)\beta^{\mathrm T}=2(\alpha\beta^{\mathrm T})=2A$，所以 $A^4=A^2A^2=4A^2=8A$．原方程变为

$$16Ax = 8Ax + 16x + \gamma,$$

即
$$8(A-2E)x = \gamma.$$

设 $x=(x_1,x_2,x_3)$. 方程组为

$$\begin{cases} -x_1+\dfrac{1}{2}x_2=0, \\ 2x_1-x_2=0, \\ x_1+\dfrac{1}{2}x_2-2x_3=1. \end{cases}$$

对该方程组的增广矩阵施行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以
$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (k \text{ 为任意常数}).$$

[典型错误] 部分同学在得到方程 $8(A-2E)x=\gamma$ 后，立即得出 $x=\frac{1}{8}(A-2E)^{-1}\gamma$，这个等式是错误的，因为矩阵 $A-2E$ 不可逆.

例 2.30 设 $A$ 为 $n$ 阶非奇异矩阵，$\alpha$ 为 $n$ 维列向量，$b$ 为常数，记分块矩阵

$$P=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^{\mathrm{T}}A^* & |A| \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}$$

其中 $A^*$ 是矩阵 $A$ 的伴随矩阵，$E$ 为 $n$ 阶单位矩阵.

(1) 计算并化简 $PQ$.

(2) 证明矩阵 $Q$ 可逆的充分必要条件是 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha \neq b$.

[提示] 本题考核矩阵的分块运算、分块矩阵的行列式及矩阵可逆的充分必要条件.

[解] (1)

$$PQ = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^{\mathrm{T}}A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^{\mathrm{T}}A^*A+|A|\alpha^{\mathrm{T}} & b|A|-\alpha^{\mathrm{T}}A^*\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & b|A|-\alpha^{\mathrm{T}}A^*\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & |A|(b-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha) \end{pmatrix}.$$

(2) 由于 $A$ 可逆，所以 $|A|\neq 0$. 由(1)可得

$$|P| = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -\alpha^{\mathrm{T}}A^* & |A| \end{vmatrix} = |A|,$$

$$|PQ| = \left|\begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & |A|(b-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha) \end{pmatrix}\right| = |A|\,|A|(b-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha),$$

于是
$$|Q| = |A|(b-\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha),$$

从而矩阵 $Q$ 可逆的充分必要条件是 $b\neq\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha$.

[典型错误] 矩阵进行分块乘法运算时，由于小块通常是矩阵，运算时小块矩阵的左右位置非常重要，

不能换序. 同时注意 $\alpha^{T}A^{*}\alpha$ 是一个数.

## 三、向量

### ·考试内容与要求·

### 数学(一)

**考试内容**

向量的概念　向量的线性组合和线性表示　向量组的线性相关与线性无关　向量组的极大线性无关组　等价向量组　向量组的秩　向量组的秩与矩阵的秩之间的关系　向量空间以及相关的概念　$n$ 维向量空间的基变换和坐标变换　过渡矩阵　向量的内积　线性无关向量组的正交规范化方法　规范正交基　正交矩阵及其性质

**考试要求**

1. 理解 $n$ 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.
2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.
3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.
4. 理解向量组等价的概念. 理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.
5. 了解 $n$ 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念.
6. 了解基变换和坐标变换公式. 会求过渡矩阵.
7. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法.
8. 了解规范正交基、正交矩阵的概念以及它们的性质.

### 数学(二)

**考试内容**

向量的概念　向量的线性组合和线性表示　向量组的线性相关与线性无关　向量组的极大线性无关组　等价向量组　向量组的秩　向量组的秩与矩阵的秩之间的关系　向量的内积　线性无关向量组的正交规范化方法

**考试要求**

1. 理解 $n$ 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.
2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.
3. 了解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念. 会求向量组的极大线性无关组及秩.
4. 了解向量组等价的概念，了解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.
5. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法.

### ·考试内容解析·

**(一) 向量**

$n$ 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的数组称为 $n$ 维向量. $n$ 维向量可以写成一行或一列，分别称为行向量和列向量，也就是 $1\times n$ 或 $n\times 1$ 矩阵. 规定行向量与列向量都按矩阵的运算规则进行运算.

若干个同维数的列向量(或同维数的行向量)所组成的集合叫做向量组. 对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta$，若存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m,$$

则称 $\beta$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，或称 $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出. 否则，称 $\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出.

由于 $m$ 个 $n$ 维列向量所组成的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可构成一个 $n\times m$ 矩阵

$$A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m],$$