不能换序．同时注意 $\alpha^T A^* \alpha$ 是一个数．

三、向量

·考试内容与要求·

数学(一)

考试内容

向量的概念　向量的线性组合和线性表示　向量组的线性相关与线性无关　向量组的极大线性无关组　等价向量组　向量组的秩　向量组的秩与矩阵的秩之间的关系　向量空间以及相关的概念　n 维向量空间的基变换和坐标变换　过渡矩阵　向量的内积　线性无关向量组的正交规范化方法　规范正交基　正交矩阵及其性质

考试要求

1. 理解 n 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念．
2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法．
3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩．
4. 理解向量组等价的概念．理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系．
5. 了解 n 维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念．
6. 了解基变换和坐标变换公式．会求过渡矩阵．
7. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法．
8. 了解规范正交基、正交矩阵的概念以及它们的性质．

数学(二)

考试内容

向量的概念　向量的线性组合和线性表示　向量组的线性相关与线性无关　向量组的极大线性无关组　等价向量组　向量组的秩　向量组的秩与矩阵的秩之间的关系　向量的内积　线性无关向量组的正交规范化方法

考试要求

1. 理解 n 维向量、向量的线性组合与线性表示的概念．
2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法．
3. 了解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念．会求向量组的极大线性无关组及秩．
4. 了解向量组等价的概念，了解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系．
5. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法．

·考试内容解析·

(一) 向量

n 个有次序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的数组称为 n 维向量．n 维向量可以写成一行或一列，分别称为行向量和列向量，也就是 $1\times n$ 或 $n\times 1$ 矩阵．规定行向量与列向量都按矩阵的运算规则进行运算．

若干个同维数的列向量(或同维数的行向量)所组成的集合叫做向量组．对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，若存在常数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合，或称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出．否则，称 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出．

由于 m 个 n 维列向量所组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 可构成一个 $n\times m$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_m],$$

所以 n 维列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$（有时也用 A 记此向量组）线性表出可以写成

$$\boldsymbol{\beta}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{bmatrix}=Ab,$$

其中 $b=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{bmatrix}$ 是 m 维列向量.

若向量组 A 的每个向量都可由向量组 B 线性表出，则称向量组 A 可由向量组 B 线性表出．如果向量组 A 与向量组 B 可相互线性表出，则称这两个向量组等价.

（二）向量组的线性相关性

1．向量组的线性相关与线性无关

对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0,$$

则称此向量组线性相关，否则称其为线性无关．因此，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时．上式才成立．于是在证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关时，一般设上式成立下推出 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 必须全等于零.

有关向量组线性相关性的结论：

① 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$（$m\geqslant 2$）线性相关（无关）的充分必要条件是其中至少有一个（任一个）向量（均不）可由其余 $m-1$ 个向量线性表出；

② 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关（无关）的充分必要条件是齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解（唯一的零解）．其中 A 是由列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 所构成的矩阵，即 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m]$．由此可知，当向量个数 m 大于向量的维数时，该向量组必线性相关；

③ 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，且表出法唯一．也就是说，线性方程组 $Ax=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解；

④ 若向量组中的一部分向量线性相关，则整个向量组线性相关；若整个向量组线性无关，则它的任何部分向量组必线性无关；

⑤ 对于给定的一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若对其每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都删去若干具有相同序号的分量，得到一组向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$，则当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关时，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 必线性相关；而当 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 必线性无关.

2．向量组的秩

（1）极大线性无关组

设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，满足

① $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

② 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果 A 中有 $r+1$ 个向量）都线性相关，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 A 的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

一般来说，向量组的极大线性无关组不是唯一的，但这些极大线性无关组是等价的，从而每个极大线性无关组中所含向量的个数都是 r，即个数 r 是由原向量组唯一确定的.

（2）向量组的秩

向量组的极大线性无关组中所含向量的个数称为该向量组的秩.

只含零向量的向量组没有极大线性无关组，规定它的秩为 0.

若向量组 B 能由向量组 A 线性表出，则向量组 B 的秩不大于向量组 A 的秩. 因此，等价的向量组有相同的秩.

(3) 向量组的秩与矩阵的秩的关系

矩阵 A 的行(列)向量组的秩称为 A 的行(列)秩.

任一矩阵 A 的行秩与列秩相等，并等于矩阵 A 的秩，今后统一记为 $r(A)$. 因此，求向量组的极大线性无关组和向量组的秩时，可把此向量组的向量作为列(行)向量构成矩阵，再用矩阵的初等行(列)变换化成行(列)阶梯形或行(列)最简形矩阵的方法解之.

将矩阵的秩看成其列向量组或行向量组的秩，并利用向量组的秩的性质，可以得到有关矩阵秩的几个重要不等式：

① $r(A_{m\times n}+B_{m\times n})\leqslant r(A_{m\times n})+r(B_{m\times n})$;

② $r(A_{m\times p})+r(B_{p\times n})-p\leqslant r(A_{m\times p}B_{p\times n})\leqslant \min\{r(A_{m\times p}),r(B_{p\times n})\}$;

③ $\max\{r(A),r(B)\}\leqslant r([A\ \vdots\ B])\leqslant r(A)+r(B)$;

④ $\max\{r(A),r(B)\}\leqslant r\left(\begin{bmatrix}A\\ \cdots\\ B\end{bmatrix}\right)\leqslant r(A)+r(B)$.

(三) 向量空间

1. n 维向量空间及其子空间

n 维向量的全体所构成的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 n 维向量空间.

设 V 为 n 维向量的非空集合，如果 V 对于向量的加法与数乘两种运算是封闭的. 即 V 中两个向量之和及数乘 V 中向量所得到的向量仍属于 V，则称集合 V 为 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的子空间，简称为向量空间.

由向量组 α_1, α_2, …, α_m 所生成的向量空间为

$$V=\{x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbf{R}\}.$$

2. 基、维数及坐标的概念

设 V 是向量空间，如果 V 中有 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，满足

① $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，

② V 中任一向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量空间 V 的一个基. 称 r 为向量空间 V 的维数. 并称 V 为 r 维向量空间.

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 r 维向量空间 V 的一个基. 则 V 中任一向量 ξ 都可由这个基唯一地线性表出：

$$\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r.$$

称有序数组 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 为向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 下的坐标. 从而 V 可表示为

$$V=\{\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r \mid x_1,x_2,\cdots,x_r\in\mathbf{R}\}.$$

3. 基变换与坐标变换

向量空间的基一般不是唯一的，设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 r 维向量空间 V 的两个基，从而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，设为

$$\begin{cases}\beta_1=p_{11}\alpha_1+p_{21}\alpha_2+\cdots+p_{r1}\alpha_r,\\ \beta_2=p_{12}\alpha_1+p_{22}\alpha_2+\cdots+p_{r2}\alpha_r,\\ \cdots\cdots\\ \beta_r=p_{1r}\alpha_1+p_{2r}\alpha_2+\cdots+p_{rr}\alpha_r,\end{cases}$$

或利用向量和矩阵的形式. 将其记为

$$[\beta_1\quad \beta_2\quad \cdots\quad \beta_r]=[\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_r]P, \tag{$*$}$$

其中 P 是 r 阶方阵：

$$P=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1r}\\ p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2r}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ p_{r1}&p_{r2}&\cdots&p_{rr}\end{bmatrix}.$$

则称上述关系式(*)为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的基变换公式，并称矩阵 P 为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的过渡矩阵．由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关，所以过渡矩阵 P 必可逆．

设 ξ 是 r 维向量空间 V 中的任一向量，它在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 下的坐标为 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，而在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 下的坐标为 $y_1,y_2,\cdots,y_r$．则有坐标变换公式

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_r\end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_r\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{bmatrix},$$

其中 P 是由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的过渡矩阵．

（四）向量的内积和线性无关向量组的正交规范化

1．向量的内积、正交基与规范正交基

设有 n 维向量 $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm T}$，$y=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm T}$，则称

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=x^{\mathrm T}y$$

为向量 x 与 y 的内积．

内积具有下列性质：

① $(x,y)=(y,x)$；

② $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$，其中 λ 为实数；

③ $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$；

④ $(x,x)\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时才有 $(x,x)=0$．

定义 n 维向量 x 的长度为 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$．当 $\|x\|=1$ 时，称 x 为单位向量．任一非零向量 $x\neq 0$，都可将其单位化．事实上 $\frac{x}{\|x\|}$ 就是单位向量．

当 $(x,y)=0$ 时，称向量 x 与 y 正交．

一组两两正交的非零向量称为正交向量组．若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是正交向量组，那么，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 必线性无关．当用正交向量组作向量空间的基，则称其为该向量空间的正交基．进一步，此正交基的每个向量都是单位向量，则称为规范正交基．

2．线性无关向量组的正交规范化

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是一组线性无关的向量，可用下述方法把 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 规范正交化．取

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_1,\alpha_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

……

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{(\beta_1,\alpha_r)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\alpha_r)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\beta_{r-1},\alpha_r)}{(\beta_{r-1},\beta_{r-1})}\beta_{r-1},$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 两两正交，且是与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价的．

再把 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 单位化：

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\varepsilon_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\cdots,\varepsilon_r=\frac{\beta_r}{\|\beta_r\|},$$

则得到一组与原向量组等价的两两正交的单位向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$．这个方法称为线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法．

3．正交矩阵及其性质

若 n 阶矩阵 A 满足 $A^{\mathrm T}A=E$（即 $A^{-1}=A^{\mathrm T}$），则称 A 为 n 阶正交矩阵，这里 E 是 n 阶单位矩阵．

由 $A^{-1}=A^{\mathrm T}$ 可得 $AA^{\mathrm T}=E$ 和 $(A^{-1})^{\mathrm T}A^{-1}=E$，所以若 A 是正交矩阵，则 $A^{\mathrm T}$，A^{-1} 都是正交矩阵．

将 A 用列向量表示为 $A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n]$，则由 $A^{\mathrm T}A=E$ 得到

$$\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

因此，方阵 A 为正交矩阵的充分必要条件是 A 的每个列向量都是单位向量，且两两正交．因为 A^{T} 的列向量是 A 的行向量，所以这个结论对 A 的行向量亦成立．于是，n 阶正交矩阵 A 的 n 个列(行)向量构成 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个规范正交基．

·例 题 详 解·

例 3.1 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，3 维列向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$ ________.

［答案］ -1.

［提示］ 本题考查向量组线性相关的概念，注意两个向量线性相关的充分必要条件是对应分量成比例．

［解］ 由于

$$A\alpha=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix},$$

$A\alpha$ 与 α 线性相关，于是有 $2a+3=1$，$3a+4=1$，从而 $a=-1$.

例 3.2 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)$，$\alpha_2=(2,3,4,5)$，$\alpha_3=(3,4,5,6)$，$\alpha_4=(4,5,6,7)$，则该向量组的秩是 ______.

［答案］ 2.

［提示］ 本题主要考查用矩阵的初等变换求向量组的秩．注意矩阵的秩等于其行(列)向量组的秩，而矩阵进行初等变换后其秩不变．

［解］ 由于

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以 $r(A)=2$，从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 2.

［典型错误］ 粗心，数值计算错误．

例 3.3 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1)$，$\alpha_2=(2,0,t,0)$，$\alpha_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2，则 $t=$ ________.

［答案］ 3.

［提示］ 本题主要考查向量组秩的概念，与前一题不同，本题向量组的秩为已知，要确定参数．分析方法与前一题类似，借助矩阵进行分析．

［解］ 因为

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&0&t&0\\0&-4&5&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&t+2&-2\\0&-4&5&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&t+2&-2\\0&0&3-t&0\end{pmatrix},$$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的秩为 2，所以矩阵 A 的秩为 2，从而 $t=3$.

例 3.4 已知 3 维空间的一组基为 $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，则向量 $u=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 在上述基下的坐标是 ________.

[答案] (1,1,-1).

[提示] 本题主要考查向量空间基与坐标的概念，可以通过方程组求解，也可以用矩阵运算求解.

[解法1] 设向量 $u=(2,0,0)^{\mathrm T}$ 在给定基下的坐标是x_1,x_2,x_3，即有

$$u=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3,$$

于是

$$\begin{cases}x_1+x_2=2,\\x_1+x_3=0,\\x_2+x_3=0,\end{cases}$$

解得$x_1=1,x_2=1,x_3=-1$.

[解法2] 设向量 $u=(2,0,0)^{\mathrm T}$ 在给定基下的坐标是x_1,x_2,x_3，即有

$$u=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3,$$

于是
$$u=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}，即\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

从而
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

[典型错误] 部分考生对于向量空间的基、维数和坐标概念理解得不好，而不知如何下手. 注意向量空间的基就是将其看成向量组时的极大线性无关组. 维数就是秩，而向量的坐标就是由基表示时的系数.

例 3.5 从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$的过渡矩阵为________.

[答案] $\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$.

[提示] 本题主要考查向量空间两个基之间过渡矩阵的概念.

[解] 设所求的过渡矩阵为 A. 则有$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)A$，即

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}A,$$

于是

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}.$$

例 3.6 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维列向量，下列结论不正确的是

(A) 若对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关.

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关. 则对任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为s.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

[答案] (B).

[提示] 本题考查向量组线性相关、线性无关的概念及其等价命题.

[解] 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow$存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 这里要求的是“存在”不是“任意”，故(B)选项的结论不正确. 应选择(B).

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow$方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$，即

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$$

只有零解⇔矩阵的秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$，所以(C)的结论正确，不应选.

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关⇔方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$只有零解⇔对于任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq0$，所以(A)的结论正确，不应选.

由于线性无关向量组的部分组必线性无关，所以(D)的结论正确，不应选.

[典型错误] 选(A)、(C)、(D)的都有，因为审题不仔细，选了正确的结论.

例 3.7 若向量α,β,γ线性无关，向量组α,β,δ线性相关，则

(A) α必可由β,γ,δ线性表出. (B) β必不可由α,γ,δ线性表出.

(C) δ必可由α,β,γ线性表出. (D) δ必不可由α,β,γ线性表出.

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查向量组线性相关和线性无关的两个主要结果：一个是"若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_t$线性无关，则其部分组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$也线性无关"；另一个是"若向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关，而向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关，则向量$\beta$可由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表出且表示法唯一".

[解] 由于α,β,γ线性无关，所以α,β线性无关. 而α,β,δ相关，故向量δ可由α,β线性表示，于是δ可由α,β,γ线性表出，即选项(C)正确.

若$\alpha=(1,0,0)$，$\beta=(0,1,0)$，$\gamma=(0,0,1)$，$\delta=(0,2,0)$，则α不能由β，γ，δ线性表出，而β可由α，γ，δ线性表出，δ可由α，β，γ线性表出，所以选项(A)、(B)、(D)均不正确.

[典型错误] 部分考生仅仅会叙述线性相关与无关的定义，而对主要结果理解不深，不能灵活运用.

例 3.8 设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，但不能由向量组(Ⅰ)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示，记向量组(Ⅱ)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$，则

(A) α_m不能由(Ⅰ)线性表示，也不能由(Ⅱ)线性表示.

(B) α_m不能由(Ⅰ)线性表示，但可由(Ⅱ)线性表示.

(C) α_m可由(Ⅰ)线性表示，也可由(Ⅱ)线性表示.

(D) α_m可由(Ⅰ)线性表示，但不可由(Ⅱ)线性表示.

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查向量组的线性表示. 本题的问题是在题设条件下，α_m能否由(Ⅰ)线性表示，能否由(Ⅱ)线性表示. 把已知条件分析清楚，正确答案就出来了.

[解] 若α_m可由(Ⅰ)线性表示，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$可由(Ⅰ)线性表示，又题设$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，所以$\beta$可由(Ⅰ)线性表示，与题设矛盾，从而$\alpha_m$不能由(Ⅰ)线性表示. 这就否定了选项(C)、(D).

由假设条件知存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m.$$

由于β不能由向量组(Ⅰ)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示，故必有$k_m\neq0$，于是

$$\alpha_m=\frac{1}{k_m}(\beta-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_{m-1}\alpha_{m-1}),$$

即α_m可由向量组(Ⅱ)线性表示，所以(A)也是错的，从而选项(B)正确.

[典型错误] 部分考生理解题意费时不少，却没有抓住问题的实质，结果选错.

例 3.9 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，则向量组

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$线性无关. (B) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关.

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关. (D) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关.

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查向量组线性相关与线性无关的概念. 可以用观察的方法排除错误选项，也可以用分析法证明正确选项.

[解] 由于$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$，所以选项(A)不正确.

由于$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_1)=0$，所以选项(B)不正确.

由于$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_1)=0$，所以选项(D)不正确.

由排除法知选项(C)正确. 事实上若

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_4)+k_4(\alpha_4-\alpha_1)=0,$$

则

$$(k_1-k_4)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3+(k_3+k_4)\alpha_4=0,$$

由于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，从而

$$\begin{cases} k_1-k_4=0, \\ k_1+k_2=0, \\ k_2+k_3=0, \\ k_3+k_4=0, \end{cases}$$

于是$k_1=k_2=k_3=k_4=0$，所以向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$线性无关.

本题也可以这样分析：首先有如下命题：

命题 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示，且$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)C$，则向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关的充分必要条件是$|C|\neq 0$.

证明：若向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关，则

$$4=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=r[(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)C]\leqslant r(C),$$

于是$r(C)=4$，矩阵C可逆，$|C|\neq 0$.

反之，若$|C|\neq 0$，矩阵C可逆，则有$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)C^{-1}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，于是

$$4=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r[(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)C^{-1}]\leqslant r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4).$$

故$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=4$，向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性无关.

利用上述命题可以很快进行判断. 由于

$$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

$$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix},$$

而

$$\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=2,\quad \begin{vmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=0.$$

所以选项(C)的向量组线性无关，选项(D)的向量组线性相关.

[典型错误] 不少考生选(A). 主要原因是受“若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$也线性无关”这个结论的影响. 事实上，对由奇数个向量构成的向量组上述结论是正确的，而由偶数个向量构成的向量组则不正确(见例3.22).

例 3.10 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.　　　　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$.

(C) $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$.　　　　(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$.

[答案] (C).

[提示] 本题与前一题类似，容易观察的可用观察法判断．不易观察的可用前一题中的命题来判断．

[解] 首先观察易得

$$(\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_3-\alpha_1,$$
$$(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_2+\alpha_3)=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,$$

所以选项(A)，(B)中的向量组均线性相关．由于

$$(\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{vmatrix}=12\neq0,$$

所以选项(C)中的向量组线性无关．而

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-3&5\\1&22&-5\end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&2&3\\1&-3&5\\1&22&-5\end{vmatrix}=0,$$

即选项(D)错．

例 3.11 设 n 维列向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m<n)$线性无关，则 n 维列向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件是

(A) 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表示．

(B) 向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示．

(C) 向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 与向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 等价．

(D) 矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$与矩阵 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$等价．

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查向量组线性表示与等价和矩阵等价的概念以及对充分必要性的理解．注意两个向量组等价⇔这两个向量组可以互相线性表示．两个同类型矩阵等价⇔它们的秩相等．

[解] 若向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关，则其秩为 m，于是矩阵 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$的秩为 m．反之，若矩阵$B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$的秩为 m，则向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的秩为 m．从而线性无关，故我们有向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关⇔矩阵$B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$的秩为 m．

由题设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．从而矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$的秩为 m．于是矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$与矩阵$B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$等价⇔矩阵 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$的秩为 m．因此向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关⇔矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$与矩阵$B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$等价，即选项(D)正确．取

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

则向量组α_1,α_2 线性无关，向量组β_1,β_2 线性无关，但α_1,α_2 不能由β_1,β_2 线性表示，β_1,β_2 也不能由α_1,α_2 线性表示．所以选项(A)、(B)、(C)均不正确．

[典型错误] 很多考生选(C)，是混淆了矩阵等价与向量组等价的概念．对于两个同型矩阵来说，秩数相等是两个矩阵等价的充分必要条件．而对于两个向量组来说，秩相等是两个向量组等价的必要条件不是充分条件．

例 3.12 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$，则三条直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3=0$$

(其中 $a_i^2+b_i^2\neq0$，$i=1,2,3$)交于一点的充分必要条件是

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(C) $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2)$.　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，α_1,α_2 线性无关.

[答案] (D).

[提示] 本题是向量与方程组的综合题.

[解] 三条直线交于一点⇔方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0,\\a_3x+b_3y+c_3=0.\end{cases}\text{即}\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1,\\a_2x+b_2y=-c_2,\\a_3x+b_3y=-c_3\end{cases}$$

有唯一解⇔$r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_3)=2$，所以正确选项为(D).

[典型错误] 部分考生错误地选择了(C). 注意在(C)成立的条件下，方程组有解. 但只有当 $r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_3)=2$时，方程组才有唯一解；而当 $r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$ 时，方程组有无穷多解. 本题要求三条直线交于一点，是唯一解的情况，所以选项(C)错.

例 3.13　设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量 β_1 可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，而向量 β_2 不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则对于任意常数 k，必有

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关.　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性相关.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关.　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关.

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查线性相关与线性无关的概念与相关定理.

[解] 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关，则 $k\beta_1+\beta_2$ 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，而 $k\beta_1$ 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，从而 β_2 可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，与题设矛盾. 因此$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关,选项(A)正确. 选项(B)不正确.

当 $k=0$ 时，选项(C)不正确. 当 $k=1$ 时，选项(D)不正确.

[典型错误] 由于选项中有任意常数 k，部分考生感到不好分析. 事实上，由于要求对任意的常数，命题均成立，所以如果对特殊的常数，某个命题不成立，就可以把这个选项排除掉. 当 $k=0$ 时，(B)、(C)均不正确. 当 $k=1$ 时，(D)选项不正确，用排除法可以较快得出正确答案.

例 3.14　设向量组Ⅰ：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则

(A) 当 $r<s$ 时，向量组Ⅱ必线性相关.　　(B) 当 $r>s$ 时，向量组Ⅱ必线性相关.

(C) 当 $r<s$ 时，向量组Ⅰ必线性相关.　　(D) 当 $r>s$ 时，向量组Ⅰ必线性相关.

[答案] (D).

[提示] 本题考查两向量组线性表示与它们的秩的关系，以及向量组的秩必定不大于该向量组中的向量个数的这个知识点.

[解] 向量组Ⅰ的秩记为 r(Ⅰ)，Ⅱ的秩记为 r(Ⅱ). 由Ⅰ可由Ⅱ线性表示，所以 r(Ⅰ)$\leqslant r$(Ⅱ). 又 r(Ⅱ)$\leqslant s$，若 $r>s$，则 $r>s\geqslant r$(Ⅱ)$\geqslant r$(Ⅰ)，所以Ⅰ组必线性相关.

也可用下述办法来否定(A)、(B)、(C)：

$$\text{若Ⅰ：}\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \text{Ⅱ：}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

则向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ线性表示，且 $r<s$ ($r=2,s=3$)，但向量组Ⅱ线性无关，(A)选项不正确.

$$\text{若}\quad\text{Ⅰ：}\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \text{Ⅱ：}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

则向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ线性表示，且 $r>s$ ($r=4,s=3$)，但向量组Ⅱ线性无关. (B)选项不正确.

若 $\text{Ⅰ}: \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\text{Ⅱ}: \beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

则向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ线性表示，且 $r<s\ (r=2, s=3)$，但向量组Ⅰ线性无关，(C)选项不正确.

［典型错误］ 部分考生对定理的理解和记忆有误，而这四个选项初看起来比较相似，所以不知如何下手.

例 3.15 设 A、B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵，则必有

(A) A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

［答案］ (A).

［提示］ 本题考查向量组的线性相关性，注意向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性相关的充分必要条件是方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=0$ 有非零解，若令矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$，则矩阵 A 的列向量组线性相关的充分必要条件是 $Ax=0$ 有非零解. 本题的 4 个选项的差别在于行与列，所以应从已知条件出发进行分析. 若举反例，则更容易找出正确选项.

［解］ 由于 $AB=O$，则矩阵 B 的每一列均为方程组 $Ax=0$ 的解，而 $B\neq O$，于是方程组 $Ax=0$ 有非零解，所以矩阵 A 的列向量组线性相关. 又 $B^TA^T=O$，而 $A^T\neq O$，故 B^T 的列向量组，也即 B 的行向量组线性相关. 选项(A)正确.

也可以这样分析：由题设 A，B 均为非零矩阵，所以 $r(A)>0$，$r(B)>0$. 由于 $AB=O$，矩阵 B 的每一列均为方程组 $Ax=0$ 的解. 故 $r(B)\leqslant n-r(A)$，即 $r(B)+r(A)\leqslant n$ (n 为矩阵A 的列数，也为矩阵 B 的行数). 从而$r(A)<n$，$r(B)<n$，因此矩阵 A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

若取 $A=(1,0)$，$B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，易知 $AB=0$，并且有 A 的行向量组线性无关，B 的列向量组线性无关. 即选项(B)、(C)、(D)均错.

［典型错误］ 不少考生选(D)，其原因是不会把 $AB=O$ 转化为齐次方程组有非零解进行分析.

例 3.16 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量，A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是

(A) 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则$A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关.

(B) 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则$A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性无关.

(C) 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则$A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关.

(D) 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则$A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性无关.

［答案］ (A)

［提示］ 本题考查矩阵与向量的乘法和向量组的线性相关性，可以用定义分析，也可以用向量组的秩分析. 注意向量组线性相关的充分必要条件是其秩小于向量组所包含向量的个数.

［解］ 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则存在不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

在等式两边左乘矩阵 A 得

$$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0,$$

由于$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 不全为零，故$A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关，所以选项(A)正确，选项(B)不正确.

也可以用秩分析，由于$(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s)=A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$，所以

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s)=r[A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)]\leqslant r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s).$$

若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)<s$，于是 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s)<s$，故向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, \cdots, A\alpha_s$ 线性相关.

下例说明(C)、(D)选项不正确：

设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则 α_1,α_2 线性无关，令 $A_1=O$，$A_2=E_2$，则 $A_1\alpha_1,A_1\alpha_2$ 线性相关，$A_2\alpha_1$，$A_2\alpha_2$ 线性无关．

事实上有如下结果：设 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，A 是 $m\times n$ 矩阵，且 $r(A)=n$，则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关．

证明　若

$$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s=0,$$

则

$$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=0.$$

由于 $r(A)=n$，方程组 $Ax=0$ 只有零解，所以 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，又 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，于是 $k_i=0\,(i=1,2,\cdots,s)$，故向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关．

例 3.17　设有 3 维列向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix},$$

问 λ 取何值时，

(1) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表达式唯一？

(2) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但表达式不唯一？

(3) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？

[提示]　本题考查向量的线性表示．注意向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示的充分必要条件是线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=\beta$ 有解，能唯一表示的充分必要条件是方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=\beta$ 有唯一解．

[解法 1]　考虑线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix},\qquad (*)$$

其系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda+3).$$

于是

(1) 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，有 $|A|\neq0$，从而方程组$(*)$有唯一解，亦即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表出．

(2) 当 $\lambda=0$ 时，$r(A)=r(A,\beta)=1<3$，故方程组$(*)$有无穷多个解向量，亦即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但表达式不唯一．

(3) 当 $\lambda=-3$ 时，$r(A)=2$，对线性方程组$(*)$的增广矩阵施行初等行变换，得到

$$B=(A,\beta)=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&-3\\1&1&-2&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&3&-3&18\\0&-3&3&-12\\1&1&-2&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&6\\0&-3&3&-12\\1&1&-2&9\end{pmatrix},$$

由于 $r(B)=3\neq2=r(A)$，所以方程组$(*)$无解，亦即 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出．

[解法 2]　考虑线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，即

$$\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}.$$

对增广矩阵施行初等行变换

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ -\lambda & \lambda & 0 & \lambda\\ -\lambda^2-2\lambda & -\lambda & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ -\lambda & \lambda & 0 & \lambda\\ -\lambda^2-3\lambda & 0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix},$$

(1) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda^2+3\lambda\neq 0$，即 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，有 $r(B)=r(A)=3$，于是方程组有唯一解，故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表示方法唯一.

(2) 当 $\lambda=0$ 时，有 $r(B)=r(A)=1$，从而方程组有无穷解，故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示方法不唯一.

(3) 当 $\lambda=-3$ 时，有 $r(B)=3$，$r(A)=2$，从而方程组无解，故 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

[典型错误] 部分考生对带参数的矩阵进行初等变换时，会出现类似这样的问题：不考虑 λ 是否为 -1，就用$\frac{1}{\lambda+1}$去乘其一行，从而出现错误，再有一个问题，计算行列式可以用对列的性质去计算．但解方程组只能对增广矩阵施行初等行变换，不能混淆.

例 3.18　已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,2)^{\mathrm T}$，问

(1) a，b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出?

(2) a、b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？并写出此表示式.

[提示] 本题与前一题类似考查向量的线性表示，通过转化为方程组进行讨论.

[解] 考虑线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，对增广矩阵进行初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 4 & 7 & 1 & 10\\ 0 & 1 & -1 & b\\ 2 & 3 & a & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & b\\ 0 & -1 & a & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b-2\end{pmatrix},$$

从而

(1) 当 $b\neq 2$ 时，线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 无解，这时 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(2) $b=2$，$a\neq 1$ 时，线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm T}=(-1,2,0)^{\mathrm T},$$

$\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表出，且表示式为 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

$b=2$，$a=1$ 时，线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm T}=k(-2,1,1)^{\mathrm T}+(-1,2,0)^{\mathrm T}$$

其中 k 为任意常数．$\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示式为

$$\boldsymbol{\beta}=-(2k+1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k+2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3 .$$

[典型错误] 部分考生讨论的不全，没有讨论 $a=1$ 的情况．对于包含两个以上参数的题要特别注意讨论全面.

例 3.19　确定常数 a 使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm T}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm T}$ 线性表示，但向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

[提示] 本题考查向量组的线性表示．注意矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha})$经初等行变换变为矩阵 $B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s,\boldsymbol{\beta})$．则 A 的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}$ 与 B 的列向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s,\boldsymbol{\beta}$ 对应的列有相同的线性相关性．方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\alpha}$ 与方程组$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots x_s\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\beta}$ 同解.

[解法 1] 记 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，由于$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，故 $r(A)<3$，从而 $|A|=-(a-1)^2(a+2)=0$，所以 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm T}$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，但 $\boldsymbol{\beta}_2=(-2,1,4)^{\mathrm T}$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $a=1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时，由于

$$(B\quad A)=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -6 & 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3\end{pmatrix},$$

考虑线性方程组 $Bx=\alpha_2$，因为 $r(B)=2$，$r(B\quad\alpha_2)=3$，所以方程组 $Bx=\alpha_2$ 无解，即 α_2 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示．与题设矛盾．因此 $a=1$.

[解法 2] 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，对矩阵 $(A\quad B)$ 施行初等行变换：

$$(A\quad B)=\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&1-a&1-a^2&0&4+2a&3a\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&-(a-1)(a+2)&0&3a+6&4a+2\end{pmatrix}.$$

由于 β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．故 $r(A)<3$，因此 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，

$$(A\quad B)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-2&-2\\1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&4&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&-2&-2\\0&0&0&0&3&3\\0&0&0&0&0&-3\end{pmatrix},$$

考虑线性方程组 $Ax=\beta_2$．由于 $r(A)=1$，$r(A\quad\beta_2)=2$，故方程组 $Ax=\beta_2$ 无解．所以 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．另一方面，由于 $|B|=-9\neq0$，故 $Bx=\alpha_i\ (i=1,2,3)$ 有唯一解，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由 β_1,β_2,β_3 线性表示．所以 $a=1$ 符合题意.

当 $a=-2$ 时，

$$(A\quad B)=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&-2&-2\\1&-2&1&1&-2&-2\\-2&1&1&-2&4&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1&-2&-2\\1&-3&3&0&0&0\\0&0&0&0&0&-6\end{pmatrix}.$$

考虑线性方程组 $Bx=\alpha_2$，

$$(B\quad\alpha_2)=\begin{pmatrix}1&-2&-2&1\\1&-2&-2&-2\\-2&4&-2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-2&1\\0&0&0&-3\\0&0&-6&0\end{pmatrix}.$$

由于 $r(B)=2$；$r(B\quad\alpha_2)=3$．故方程组 $Bx=\alpha_2$ 无解，即 α_2 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示．与题设矛盾．因此 $a=1$.

[典型错误] 前面几个题讨论的是一个向量能否由向量组线性表示的问题，而本题讨论的是向量组之间的线性表示问题，部分考生讨论不完整．例如在求出 $a=1$ 后，没有验证 β_1,β_2,β_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．还有的考生初等变换计算有错.

例 3.20 设向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T,\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$，$\alpha_3=(3,2,-1,p+2)^T,\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$，

(1) p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出.

(2) p 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和极大线性无关组.

[提示] 本题综合考查向量组的线性相关性与极大线性无关组．解题时将向量组转化为矩阵，再作初等行变换.

[解]

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p&10\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-2\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&p-9&p-2&-8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{pmatrix}.$$

(1) $p\neq 2$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关．这时

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 0 & \dfrac{2p-6}{p-2}\\ 0 & -2 & -1 & 0 & \dfrac{-7p+10}{p-2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{3p-4}{p-2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{1-p}{p-2}\end{pmatrix}.$$

于是 $\alpha=2\alpha_1+\dfrac{3p-1}{p-2}\alpha_2+\alpha_3+\dfrac{1-p}{p-2}\alpha_4$.

(2) $p=2$ 时，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关．其秩为 3，并且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$（或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$）为其一个极大线性无关组．

［典型错误］ 错误主要有两点：首先是部分同学数值计算有误，其次是对带参数的矩阵进行初等变换时，不讨论是否为零就将带参数的表达式放在分母上．

例 3.21 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵，$\alpha_1=(1,1,2,3)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm T}$，$\alpha_3=(5,-1,-8,9)^{\mathrm T}$ 是齐次线性方程组 $Bx=0$ 的解向量．求 $Bx=0$ 的解空间的一个规范正交基．

［提示］ 本题考查方程组解空间的基及 Schmidt 正交化．注意解空间的基即方程组的基础解系不唯一．

［解］ 由于 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵，故方程组 $Bx=0$ 解空间的维数为 $n-r(B)=4-2=2$．又α_1,α_2 线性无关．所以α_1,α_2 是解空间的基．

先将α_1,α_2 正交化．令

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$=(-1,1,4-1)^{\mathrm T}-\frac{5}{15}(1,1,2,3)^{\mathrm T}=\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{10}{3},-2\right)^{\mathrm T}.$$

再单位化得

$$\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^{\mathrm T},\quad \gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^{\mathrm T}.$$

这就是解空间的规范正交基．

［典型错误］ 本题已知条件给出了方程组 3 个解向量，部分考生误认为解空间的基由 3 个向量构成．

例 3.22 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$线性无关，设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\cdots$，$\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s$，$\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$．试讨论向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关性．

［提示］ 本题考查向量组线性相关的概念与克莱姆法则．注意向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性相关的充分必要条件是方程组$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=0$ 有非零解．

［解］ 若有一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$，使得

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0.$$

则

$$x_1(\alpha_1+\alpha_2)+x_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+x_s(\alpha_s+\alpha_1)=0,$$

即

$$(x_1+x_s)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+\cdots+(x_{s-1}+x_s)\alpha_s=0,$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关．所以

$$\begin{cases}x_1+x_s=0,\\ x_1+x_2=0,\\ \quad\cdots\\ x_{s-1}+x_s=0.\end{cases}$$

方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{1+s},$$

当 s 为奇数时，$D=2\neq0$，方程组只有零解，所以 $x_1=0,x_2=0,\cdots,x_s=0$，此时向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关．当 s 为偶数时，$D=0$，方程组有非零解，即有不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0$，故向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关．

［典型错误］ 由于本题是讨论 s 个向量的线性相关性，所以部分考生做得不好，若改成讨论 3 个或 4 个向量，就是一般教材中的例题，会讨论得非常好．考生处理一般情况的能力需加强．

例 3.23 设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，E 是 n 阶单位矩阵，若 $AB=E$，证明 B 的列向量组线性无关．

［提示］ 本题考查向量组线性无关的概念，可以直接用定义证明，也可以用矩阵的秩进行证明．

［证法 1］ 设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，若有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n=0,$$

则

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0.$$

由于 $AB=E$，在等式两端左乘矩阵 A 得

$$A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0,$$

即 $k_1=0,k_2=0,\cdots,k_n=0$，从而向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关．

［证法 2］ 由于 B 是 $m\times n$ 矩阵，所以 $r(B)\leqslant n$，另一方面，

$$r(B)\geqslant r(AB)=r(E)=n,$$

所以 $r(B)=n$，向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关．

［典型错误］ 部分考生认为证明题比较难，无从下手．本题给出的第一种证明方法比较典型，就是直接利用定义．注意 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=0$ 是向量形式的方程组，而 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=0$，即 $Bx=0$ 是矩阵形式的方程组．有些同学写出 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=0$ 之后，不会变形为矩阵形式，难以继续下去，而这只不过是矩阵的分块乘法．

例 3.24 设 A 为 n 阶矩阵，α 为 n 维列向量，若存在正整数 m，使得 $A^{m-1}\alpha\neq0$，$A^m\alpha=0$（规定 A^0 为单位矩阵），证明向量组 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关．

［提示］ 本题考查向量组线性无关的概念，可以用定义证明．根据本题的条件，我们给出的如下证明也是证明向量组线性无关的典型方法．

［证法 1］ 设有一组数 $k_0,k_1,\cdots,k_{m-1}$，使

$$k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0 \tag{1}$$

用 A^{m-1} 左乘(1)式两边，得

$$k_0A^{m-1}\alpha=0,$$

又 $A^{m-1}\alpha\neq0$，故 $k_0=0$．从而(1)式变为

$$k_1A\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0 \tag{2}$$

再用 A^{m-2}左乘(2)式两边得：$k_1A^{m-1}\alpha=0$. 又 $A^{m-1}\alpha\neq0$，故 $k_1=0$. 以此类推，可得 $k_0=0$，$k_1=0$，…，$k_{m-1}=0$. 从而 α、$A\alpha$、…，$A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

［证法 2］ 反证法，设 α，$A\alpha$，…，$A^{m-1}\alpha$ 线性相关. 则存在不全为零一组数$k_0,k_1,\cdots,k_{m-1}$，使

$$k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0 .$$

设从左起第一个不为零的数为 k_i，上式变为

$$k_iA^i\alpha+k_{i+1}A^{i+1}\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0.$$

由于 $A^m\alpha=0$. 用 A^{m-i-1}左乘等式两边得　$k_iA^{m-1}\alpha=0$.

由于 $k_i\neq0$. 则 $A^{m-1}\alpha=0$，矛盾. 从而$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

［典型错误］ 部分考生在设出 $k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0$ 之后，不知如何往下做，没有想到可用 A^{m-1}左乘等式的两端，使问题得到解决.

例 3.25 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm T}(i=1,2,\cdots,r,r<n)$是 n 维实向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. 已知 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量，试判断向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 的线性相关性.

［提示］ 本题是向量与方程组的综合题. 注意 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}$ 是线性方程组的解，则有

$$\begin{cases}a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n=0,\\ a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2n}b_n=0,\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_{r1}b_1+a_{r2}b_2+\cdots+a_{rn}b_n=0,\end{cases}$$

即 $\beta^{\mathrm T}\alpha_i=0\ (i=1,2,\cdots,r)$.

［解］ 设有一组数 x_1，x_2，…，x_{r+1}，使得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r+x_{r+1}\beta=0. \tag{$*$}$$

用 $\beta^{\mathrm T}$ 左乘($*$)式两端，由于 β 是方程组的非零解，所以 $\beta^{\mathrm T}\alpha_i=0\ (i=1,2,\cdots,r)$. 从而得 $x_{r+1}\beta^{\mathrm T}\beta=0$，而 $\beta\neq0$，故 $\beta^{\mathrm T}\beta\neq0$. 从而 $x_{r+1}=0$. 代入($*$)并注意到向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，可得$x_1=0,x_2=0,\cdots,x_r=0$，所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性无关.

［典型错误］ 部分考生不会分析 β 是方程组的解这一条件. β 满足第 i 个方程，就是向量 β 与 α_i 的内积为零，根据这一条件我们用 $\beta^{\mathrm T}$ 左乘($*$)式两端，从而使问题得到解决.

四、线性方程组

·考试内容与要求·

数学(一)

考试内容

线性方程组的克莱姆(Cramer)法则　齐次线性方程组有非零解的充分必要条件　非齐次线性方程组有解的充分必要条件　线性方程组解的性质和解的结构　齐次线性方程组的基础解系和通解　解空间　非齐次线性方程组的通解

考试要求

1. 会用克莱姆法则.

2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件.