$$k_1A\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0 \tag{2}$$

再用 A^{m-2}左乘(2)式两边得：$k_1A^{m-1}\alpha=0$. 又 $A^{m-1}\alpha\neq0$，故 $k_1=0$. 以此类推，可得 $k_0=0$，$k_1=0$，…，$k_{m-1}=0$. 从而 α、$A\alpha$、…，$A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

［证法 2］ 反证法，设 α，$A\alpha$，…，$A^{m-1}\alpha$ 线性相关. 则存在不全为零一组数$k_0,k_1,\cdots,k_{m-1}$，使

$$k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0 .$$

设从左起第一个不为零的数为 k_i，上式变为

$$k_iA^i\alpha+k_{i+1}A^{i+1}\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0.$$

由于 $A^m\alpha=0$. 用 A^{m-i-1}左乘等式两边得 $k_iA^{m-1}\alpha=0$.

由于 $k_i\neq0$. 则 $A^{m-1}\alpha=0$，矛盾. 从而$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

［典型错误］ 部分考生在设出 $k_0\alpha+k_1A\alpha+\cdots+k_{m-1}A^{m-1}\alpha=0$ 之后，不知如何往下做，没有想到可用 A^{m-1}左乘等式的两端，使问题得到解决.

例 3.25 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm T}(i=1,2,\cdots,r,r<n)$是 n 维实向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. 已知 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量，试判断向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 的线性相关性.

［提示］ 本题是向量与方程组的综合题. 注意 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}$ 是线性方程组的解，则有

$$\begin{cases}a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n=0,\\ a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2n}b_n=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ a_{r1}b_1+a_{r2}b_2+\cdots+a_{rn}b_n=0,\end{cases}$$

即 $\beta^{\mathrm T}\alpha_i=0\ (i=1,2,\cdots,r)$.

［解］ 设有一组数 x_1，x_2，…，x_{r+1}，使得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r+x_{r+1}\beta=0. \tag{*}$$

用 $\beta^{\mathrm T}$ 左乘(*)式两端，由于 β 是方程组的非零解，所以 $\beta^{\mathrm T}\alpha_i=0\ (i=1,2,\cdots,r)$. 从而得 $x_{r+1}\beta^{\mathrm T}\beta=0$，而 $\beta\neq0$，故 $\beta^{\mathrm T}\beta\neq0$. 从而 $x_{r+1}=0$. 代入(*)并注意到向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，可得$x_1=0,x_2=0,\cdots,x_r=0$，所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性无关.

［典型错误］ 部分考生不会分析 β 是方程组的解这一条件. β 满足第 i 个方程，就是向量 β 与 α_i 的内积为零，根据这一条件我们用 $\beta^{\mathrm T}$ 左乘(*)式两端，从而使问题得到解决.

四、线性方程组

·考试内容与要求·

数学(一)

考试内容

线性方程组的克莱姆(Cramer)法则 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件 非齐次线性方程组有解的充分必要条件 线性方程组解的性质和解的结构 齐次线性方程组的基础解系和通解 解空间 非齐次线性方程组的通解

考试要求

1. 会用克莱姆法则.

2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件.

3. 理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.

4. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.

5. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

数学(二)

考试内容

线性方程组的克莱姆(Cramer)法则　齐次线性方程组有非零解的充分必要条件　非齐次线性方程组有解的充分必要条件　线性方程组解的性质和解的结构　齐次线性方程组的基础解系和通解　非齐次线性方程组的通解

考试要求

1. 会用克莱姆法则.

2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件.

3. 理解齐次线性方程组的基础解系及通解的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.

4. 理解非齐次线性方程组的解的结构及通解的概念.

5. 会用初等行变换求解线性方程组.

・考试内容解析・

(一) 线性方程组的基本概念

1. 非齐次线性方程组　方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为 m 个方程 n 个未知量的非齐次线性方程组. 如果记矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

则 A 称为非齐次线性方程组的系数矩阵，$\overline{A}$ 称为非齐次线性方程组的增广矩阵.

非齐次线性方程组的矩阵表示为

$$Ax = b,$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$. 如果系数矩阵按列分块为 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，则非齐次线性方程组的向量形式为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b.$$

如果 n 维列向量 $\xi = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$ 满足非齐次线性方程组 $Ax = b$. 即 $A\xi = b$. 则称 ξ 是非齐次线性方程组的一个解向量.

2. 齐次线性方程组

如果非齐次线性方程组的常数项 b_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$均为 0，即方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

称为齐次线性方程组. 此齐次线性方程组称为非齐次线性方程组的导出组.

齐次线性方程组的矩阵表示为

$$Ax=0,$$

其向量形式为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0.$$

(二) 克莱姆法则

设 n 个方程 n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

如果系数行列式 $D=|A|\neq0$, 则方程组有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D},\ j=1,2,\cdots,n,$$

其中 D_j 是方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 去替换系数行列式 D 中第 j 列得到的行列式.

注　当系数行列式 $D=0$ 时, 方程组可能有无穷多解, 也可能无解.

(三) 线性方程组有解和无解的判定方法

1. 非齐次线性方程组有解的判定定理

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是 $r(A)=r(\bar{A})=r$. 并且, 当 $r=n$ 时, 方程组有唯一解; 当 $r<n$ 时, 方程组有无穷多解.

2. 齐次线性方程组解的判定定理

齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件 $r(A)=r<n$.

(1) 当 $m<n$ (m 为方程个数, n 为未知量个数)时, 齐次线性方程组必有非零解.

(2) 当 $m=n$ 时, 齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是系数行列式 $|A|=0$.

3. 用消元法解线性方程组

用消元法解非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的步骤是:

(1) 对方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 施行初等行变换, 化为阶梯形矩阵. 这个过程称为消元过程.

(2) 如果 $r(A)\neq r(\bar{A})$, 则方程组无解; 如果 $r(A)=r(\bar{A})$, 则求出方程组的解. 这个过程称为回代过程.

(四) 齐次线性方程组解的结构和通解的求法

1. 齐次线性方程组解的性质

(1) 如果 η_1,η_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解, 则 $\eta_1+\eta_2$ 也是它的解.

(2) 如果 η 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解, 则对任意常数 c, $c\eta$ 也是它的解.

于是, $Ax=0$ 的解向量的任意线性组合仍是它的解向量, 故它的全体解向量构成一个向量空间, 称为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间.

2. 齐次线性方程组的基础解系

如果 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量组的一个极大无关组, 则称 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是方程组的一个基础解系(即齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间的基).

3. 齐次线性方程组解的结构

如果齐次线性方程组 $Ax=0$ 系数矩阵的秩 $r(A)=r<n$, 则方程组有基础解系, 并且它含有 $n-r$ 个解向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$. 方程组的通解(或全部解)为

$$x=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r},$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意常数.

4. 齐次线性方程组 $Ax=0$ 通解的求法

(1) 对系数矩阵 A 作初等行变换化为阶梯形矩阵.

(2) 确定系数矩阵的秩 $r(A)=r$, 确定基本未知量和自由未知量.

(3) 求出一个基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$.

(4) 求出方程组的通解 $x=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$($c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$为任意常数).

(五) 非齐次线性方程组解的结构和通解的求法

1. 非齐次线性方程组解的性质

(1) 如果 γ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解, η 是它的导出组的一个解, 则 $\gamma+\eta$ 是非齐次线性方程组的解.

(2) 如果 γ_1、γ_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解, 则 $\gamma_1-\gamma_2$ 是其导出组的解.

2. 非齐次线性方程组解的结构

对非齐次线性方程组 $Ax=b$, 如果 $r(A)=r(\bar{A})=r<n$, η_1, η_2, $\cdots$, η_{n-r}. 是导出组 $Ax=0$ 的基础解系, ξ_0 是 $Ax=b$ 的一个特解, 则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解(或全部解)是

$$x=\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}.$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$为任意常数.

3. 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 通解的求法

(1) 对增广矩阵 $\bar{A}$ 作初等行变换化为阶梯形矩阵.

(2) 求出导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$.

(3) 求出 $Ax=b$ 的一个特解 ξ_0.

(4) 求出非齐次线性方程组的通解 $x=\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$($c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$为任意常数).

·例 题 详 解·

例 4.1 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为 0, 且 A 的秩为 $n-1$, 则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 ________.

[答案] 应填 $k[1,1,\cdots,1]^{\mathrm T}$, k 为任意实数.

[提示] 本题考查是否熟练掌握线性方程组解的结构式.

[解] 因为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间 S 的维数为 $n-(n-1)=1$, 故 $Ax=0$ 的基础解系只含一个线性无关的解向量. 又由 A 的各行元素之和均为 0 知,

$$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=0,\ i=1,2,\cdots,n,$$

即矩阵 $A=[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]$的列向量之和 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0$. 故$[1,1,\cdots,1]^{\mathrm T}$是方程组 $Ax=0$ 的一个非零解, 从而其通解为 $k[1,1,\cdots,1]^{\mathrm T}$, 这里 k 为任意实数.

[典型错误] 不少考生忘了乘常数 k. 原因是对特解与通解的区别理解不深刻.

例 4.2 设方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$有无穷多个解, 则 $a=$ ________.

[答案] -2.

[提示] 本题考查非齐次线性方程组解的存在性定理. 从考查其增广矩阵的秩着手.

[解法 1] 对增广矩阵施行初等行变换, 得

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & -2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ a+2 & a+2 & a+2 & 0\end{array}\right).$$

当 $a=-2$ 时, $r(A)=r(\bar{A})=2<3$, 方程组有无穷多个解. 因此 $a=-2$.

[解法 2] 因为方程组有无穷多个解, 其系数行列式

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2) = 0,$$

于是 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，对增广矩阵作初等行变换，得

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

由于 $r(A) \neq r(\bar{A})$，故方程组无解.

当 $a=-2$ 时，对增广矩阵作初等行变换，得

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

由于 $r(A)=r(\bar{A})=2<3$，故方程组有无穷多个解.

因此，方程组有无穷多个解，则 $a=-2$.

[典型错误] 有些考生只是从 $|A|=0$ 解得 $a=-2$ 或 1，而未将 $a=1$ 排除掉. 因为当系数矩阵为方阵时，其行列式 $|A|=0$ 是非齐次线性方程组有无穷多解的必要条件但非充分条件. 事实上，将 $a=1$ 代入原方程组，显然方程组无解.

例 4.3 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解，则 $a=$______.

[答案] -1.

[提示] 本题考查的知识点是非齐次线性方程组无解的充要条件，即系数矩阵的秩不等于增广矩阵的秩. 当然对于未知量个数与方程个数相等的方程组来说，还可以先考查系数矩阵的行列式为零的情形求出参数，由于此时方程组可能出现无解或无穷多解的状况，所以应进一步考查求的参数是哪种情形，这只需代入验算即可.

[解] 设方程组的系数矩阵与增广矩阵分别为 A 与 $\bar{A}$，对 A 与 $\bar{A}$ 作初等行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{array}\right).$$

由此知当 $a=-1$ 时 $r(A)=2$，$r(\bar{A})=3$，方程组无解.

另一方法是：方程组的系数矩阵行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = -(a-3)(a+1),$$

当 $a=3$ 时，$r(A)=r(\bar{A})=2$. 当 $a=-1$ 时，$r(A)=2\neq r(\bar{A})=3$，所以 $a=-1$ 时，方程组无解.

[典型错误] 填 -1 或 3. 原因是没有验证 $a=3$ 是否符合题意.

例 4.4 设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$，$b=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，则线性方程组 $Ax=b$ 的解是______.

[答案] $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

[提示] 本题主要考查正交矩阵的性质和 Cramer 法则以及矩阵的运算.

[解] 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，由题设知 $AA^{\mathrm{T}}=E$，即 $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

故由 $A\begin{pmatrix}1\\a_{12}\\a_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=b$ 知 $(1,a_{12},a_{13})^{\mathrm{T}}$ 是 $Ax=b$ 的解．由 $1+a_{12}^2+a_{13}^2=1$ 得 $a_{12}=a_{13}=0$，从而 $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为 $Ax=b$ 的解．

［典型错误］ 由于矩阵 A 只给出一个元素的值，部分考生对此类题便不知如何下手，不能把 $AA^{\mathrm{T}}=E$ 理解为 3 个非齐次方程组，或者由 $x=A^{-1}b=A^{\mathrm{T}}b$ 确定解．

例 4.5 若线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=-a_1,\\x_2+x_3=a_2,\\x_3+x_4=-a_3,\\x_4+x_1=a_4\end{cases}$$

有解，则常数 a_1，a_2，a_3，a_4 应满足条件________．

［答案］ $a_1+a_2+a_3+a_4=0$．

［提示］ 本题考查方程组有解的充分必要条件是增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩．

［解］ 对增广矩阵 B 施行初等行变换，

$$B=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\1&0&0&1&a_4\end{array}\right)\xrightarrow[-r_3+r_4]{\substack{-r_1+r_4\\r_2-r_4}}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&0&0&0&a_1+a_2+a_3+a_4\end{array}\right).$$

由方程有解，应有 $r(A)=r(B)$，即 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$．

［典型错误］ 不知道该知识点且计算易发生错误．

例 4.6 设 α_1，α_2，α_3 是四元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的三个解向量．且 $r(A)=3$，$\alpha_1=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$c$ 表示任意常数．则线性方程组 $Ax=b$ 的通解 $x=$________．

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$．　(B) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$．　(C) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$．　(D) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$．

［答案］ (C)．

［提示］ 本题的考查点是线性方程组解的结构理论．由于 $Ax=0$ 解空间的维数为 $4-r(A)=1$，再根据已知的两个解求第三个解．利用解的结构理论得出结论．

［解］ 因 $n=4$，$r(A)=3$，故 $Ax=0$ 的基础解系只含一个非零向量，

$$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_1-\alpha_3)=2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},$$

故 $Ax=b$ 的通解应为(C)．

［典型错误］ 选(A)．主要是对线性方程组解的结构理解不深导致求解错误，误把 $\alpha_2+\alpha_3$ 认为也是 $Ax=b$ 的解．应该是 $\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}$ 为 $Ax=b$ 的一个解．

例 4.7 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充分条件是

(A) A 的列向量线性无关．　(B) A 的列向量线性相关．

(C) A 的行向量线性无关．　(D) A 的行向量线性相关．

［答案］ (A)．

［提示］ 本题考查齐次线性方程组有零解的条件．因为 $Ax=0$ 仅有零解当且仅当 A 的秩等于未知数个数 n；又 A 的秩等于 A 的列秩，所以 A 的列秩等于 n，即 A 的列向量线性无关．

［解］ 矩阵 A 的秩 $=A$ 的列向量组的秩 $=$ 未知量的个数 $=n$．

［典型错误］ 选(C)．主要是对齐次线性方程组仅有零解的充要条件理解不深刻从而导致求解错误．

例 4.8　设 A 是 $m\times n$ 矩阵．B 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(AB)x=0$

(A) 当 $n>m$ 时仅有零解．　　(B) 当 $n>m$ 时必有非零解．

(C) 当 $m>n$ 时仅有零解．　　(D) 当 $m>n$ 时必有非零解．

［答案］ (D)．

［提示］ 本题主要考查矩阵秩的性质，矩阵乘积的秩与其因子矩阵秩之间的关系，也考查齐次线性方程组仅有零解的条件．

［解］ 当 $m>n$ 时，$r(A)\leqslant n<m$，$r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}\leqslant n<m$，故 $|AB|=0$．从而 $(AB)x=0$ 必有非零解．因而应选(D)．

例 4.9　要使 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 都是线性方程组 $Ax=0$ 的解，只要系数矩阵 A 为

(A) $(-2\ \ 1\ \ 1)$．　(B) $\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$．　(C) $\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$．　(D) $\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{pmatrix}$．

［答案］ (A)．

［提示］ 本题考查线性方程组解的定义，把解代入验查即可．

［解］ ξ_1，ξ_2 满足选项(A)中矩阵所确定的方程组 $Ax=0$．ξ_1 或 ξ_2 不满足选项(B)，(C)，(D)中矩阵所确定的齐次方程组．例如：$\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\xi_1=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\neq 0$，$\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\xi_2=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\neq 0$，$\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{pmatrix}\xi_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\neq 0$．

例 4.10　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$Ax=0$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是

(A) 若 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解．

(B) 若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多个解．

(C) 若 $Ax=b$ 有无穷多个解，则 $Ax=0$ 仅有零解．

(D) 若 $Ax=b$ 有无穷多个解，则 $Ax=0$ 有非零解．

［答案］ (D)．

［提示］ 本题考查非齐次线性方程组 $Ax=b$ 解的结构式．讨论 $Ax=0$，$Ax=b$ 解之间关系的前提是 $Ax=b$ 有解，所以(A)，(B)错误．由于 $Ax=b$ 的通解形式是

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}+\xi,$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，ξ 是 $Ax=b$ 的一个解．因此若 $Ax=b$ 有无穷多个解．则 $Ax=0$ 必有无穷多个解．

［解］ 对于(A)，(B)两种情形，由题设条件不能判定方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵与增广矩阵的秩是否相等，即 $Ax=b$ 可能无解．又若 $Ax=b$ 有无穷多个解，则其解应为 $Ax=0$ 的基础解系与 $Ax=b$ 的一个特解之和．由基础解系的定义，故(C)不正确，因此只能选(D)．

［典型错误］ 不会利用非齐次线性方程组解的结构式分析问题．

例 4.11　齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵记为 A．若存在三阶矩阵 $B\neq O$ 使得 $AB=O$，则

(A) $\lambda=-2$ 且 $|B|=0$.　　　(B) $\lambda=-2$ 且 $|B|\neq 0$.

(C) $\lambda=1$ 且 $|B|=0$.　　　(D) $\lambda=1$ 且 $|B|\neq 0$.

[答] (C).

[提示] 本题考查的是齐次线性方程组解的存在性定理．由已知条件知方程组 $Ax=0$ 存在非零解，故可从 $|A|=0$ 求得 λ 的值；再用反证法证明 $|B|=0$.

[解] 由题设 $AB=O$ 且 $B\neq O$ 知所给齐次线性方程组有非零解，故 $|A|=0$，由此解出 $\lambda=1$．若 $|B|\neq 0$，则由 $AB=O$，右乘 B^{-1} 得 $A=O$，这与 A 为非零矩阵矛盾，故 $|B|=0$，即应选(C).

例 4.12 设 A 是 n 阶矩阵，α 是 n 维列向量．若秩 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=$ 秩(A)，则线性方程组

(A) $Ax=\alpha$ 必有无穷多解.　　　(B) $Ax=\alpha$ 必有唯一解.

(C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 仅有零解.　　　(D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解.

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查矩阵秩的概念、性质及其齐次方程组有非零解的条件.

[解] 若 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{vmatrix}\neq 0$，则秩 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}>$ 秩(A)，与题设矛盾．故 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{vmatrix}=0$，因而应选(D).

又当 $|A|\neq 0$，$\alpha=0$ 时，选项(A)错；$|A|=0$，$\alpha=0$ 时，选项(B)错.

例 4.13 设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 A，B 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

① 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则秩$(A)\geqslant$秩(B).

② 若秩$(A)\geqslant$秩(B)，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解.

③ 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则秩$(A)=$秩(B).

④ 若秩$(A)=$秩(B)，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

以上命题中正确的是

(A) ①②　　(B) ①③　　(C) ②④　　(D) ③④

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查齐次线性方程组的系数矩阵的秩与解空间的维数的关系．设矩阵 A 的秩为 $r(A)$，则 $Ax=0$ 的解空间的维数为 $n-r(A)$，其中 n 为未知量的个数，这是线性代数中的一个重要且基本的结论.

[解] 取 $A=(1,0)$，$B=(1,1)$，$x=(x_1,x_2)^T$，则 $Ax=0$ 有解 $(0,1)^T$，但它不是 $Bx=0$ 的解，故②，④均不成立，只能选(B).

例 4.14 已知 β_1、β_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解，α_1，α_2 是对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，k_1，k_2 为任意常数．则方程组 $Ax=b$ 的通解(一般解)必是

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$.　　　(B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$.

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$.　　　(D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$.

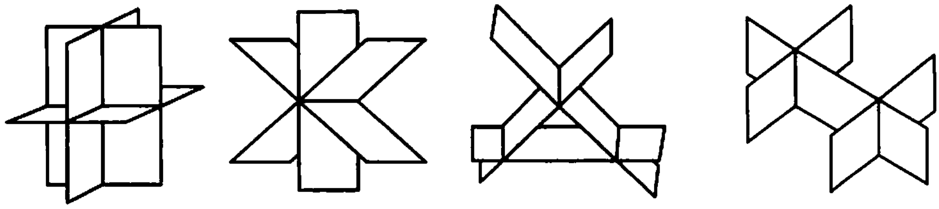
[答案] (B).

[提示] 本题考查对齐次线性方程组和非齐次线性方程组解的性质的掌握，以及对非齐次线性方程组通解结构式的掌握．用排除法即可确定正确选项.

[解] $Ax=b$ 的通解应为 $Ax=0$ 的基础解系的线性组合与 $Ax=b$ 的一个特解之和．而 $\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ 为 $Ax=0$ 的解，故不应选(A)、(C)．又 $\beta_1-\beta_2$ 为 $Ax=0$ 的解，但不能确定其是否与 α_1 线性无关，故也不能选(D)．由于 α_1，$\alpha_1-\alpha_2$ 线性无关且 $\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$ 为 $Ax=b$ 的解，因此只能选(B).

[典型错误] 选(D)．没有考虑作为 $Ax=b$ 的通解，还要考查 α_1 与 $\beta_1-\beta_2$ 的线性无关性.

例 4.15 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i$，$i=1,2,3$，它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，则这三张平面可能的位置关系为



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

[答案]　(B)

[提示]　本题考查对非齐次线性方程组系数矩阵、增广矩阵的秩与方程组解的结构的关系．讨论了三元线性方程组解结构的几何意义．因为系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等且为 2，故方程组有解且此时自由未知量只有一个，即公共解构成一条直线．

[解]　所给线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都是 2，故线性方程组有解且解不唯一．由于图(A)对应的线性方程组有唯一解，而(C)，(D)对应的方程组无解，故应选(B)．

[典型错误]　有的考生选了(C)或(D)，误认为这两种情形均有公共解．事实上，(C)仅是两两有公共解，(D)是某方程分别与另两方程有公共解，都不是三个方程有公共解．

例 4.16 λ 为何值时，方程组

$$\begin{cases}2x_1+\lambda x_2-x_3=1,\\ \lambda x_1-x_2+x_3=2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1\end{cases}$$

无解，有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组的通解．

[提示]　本题是对含有参数线性方程组的讨论．将方程组写成矩阵方程的形式，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$．当且仅当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解．当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，方程组无解还是有无穷解要视增广矩阵的秩是否等于系数矩阵的秩而定．

[解法 1]　原方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & \lambda & -1\\ \lambda & -1 & 1\\ 4 & 5 & -5\end{vmatrix}=5\lambda^2-\lambda-4=(\lambda-1)(5\lambda+4),$$

故当 $\lambda\neq 1$ 且 $\lambda\neq-\frac{4}{5}$ 时，$D\neq 0$，方程组有唯一解．

当 $\lambda=1$ 时，原方程组成为

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1,\\ x_1-x_2+x_3=2,\\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1.\end{cases}$$

对其增广矩阵施行初等行变换，得

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 4 & 5 & -5 & -1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}0 & 3 & -3 & -3\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 9 & -9 & -9\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

由此可见 $r(A)=r(B)=2<3$（未知量的个数）. 所以原方程组有无穷多解. 原方程的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=1, \\ x_2-x_3=-1. \end{cases}$$

取 $x_3=k$（k 为任意实数）, 得原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=-1+k, \\ x_3=k, \end{cases}$$

当 $\lambda=-\dfrac{4}{5}$时. 原方程组成为

$$\begin{cases} 10x_1-4x_2-5x_3=5, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-10, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1. \end{cases}$$

对其增广矩阵施以初等行变换，得

$$B=(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccc:c} 10 & -4 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & -5 & -10 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 10 & -4 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right).$$

可见 $r(A)=2\neq r(B)=3$，故原方程组无解.

［解法 2］ 直接对原方程组的增广矩阵施以初等行变换，得

$$B=(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda-1 & 0 & 3 \\ -6 & -5\lambda+5 & 0 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda-1 & 0 & 3 \\ 5\lambda+4 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right).$$

讨论：① 当 $\lambda=-\dfrac{4}{5}$时，$r(A)=2\neq r(B)=3$，故原方程组无解；

② 当 $\lambda\neq1$，且 $\lambda\neq-\dfrac{4}{5}$时，$r(A)=r(B)=3$，原方程组有唯一解；

③ 当 $\lambda=1$ 时，有

$$B\to\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 9 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

其余同解法 1.

［典型错误］ 容易有计算错误.

例 4.17 对于线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2, \end{cases} \qquad (*)$$

讨论 λ 取何值时，方程组无解、有唯一解和无穷多组解. 在方程组有无穷多组解时，试用其导出组的基础解系表示全部解.

［提示］ 本题考查点是讨论含有参数的线性方程组何时无解、有唯一解和无穷解，以及线性方程组解的判别条件和解的基本方法.

［解］ 对方程(*)的增广矩阵作初等行变换：

$$B=(A\,\vdots\,b)=\left(\begin{array}{ccc:c} \lambda & 1 & 1 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \lambda & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 3(\lambda-1) \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & 3(\lambda-1)\end{array}\right). \qquad (**)$$

讨论：

① 当 $\lambda\neq-2$，且 $\lambda\neq1$ 时，$r(A)=r(B)=3$，方程组($*$)有唯一解.

② 当 $\lambda=-2$ 时，$r(A)=2\neq r(B)=3$，方程组($*$)无解.

③ 据($**$)式．当 $\lambda=1$ 时，有

$$B\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

即 $r(A)=r(B)=1<3$（未知量的个数），故方程组($*$)有无穷多组解.

又原方程组($*$)的同解方程组为

$$x_1=-2-x_2-x_3, \qquad (***)$$

其导出组 $x_1=-x_2-x_3$ 的一个基础解系为

$$v_1=(-1,1,0)^{\mathrm T},\ v_2=(-1,0,1)^{\mathrm T}.$$

而($***$)的一个特解可取为 $u=(-2,0,0)^{\mathrm T}$，于是，原方程组的全部解为

$$\begin{aligned}x&=u+C_1v_1+C_2v_2\\&=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中 C_1，C_2 是任意常数.

[典型错误] 不会对含参数的矩阵作初等行变换、进行化简，有些考生作如下行变换：

$$(A\ \vdots\ b)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 1 & \lambda & 1 & -2\\ 1 & 1 & \lambda & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1 & \lambda-3\\ 0 & \lambda-\frac{1}{\lambda} & 1-\frac{1}{\lambda} & -2-1+\frac{3}{\lambda}\\ 0 & 1-\frac{1}{\lambda} & \lambda-\frac{1}{\lambda} & -2-1+\frac{3}{\lambda}\end{pmatrix}.$$

这样做实际上假定了 $\lambda\neq0$，排除了 $\lambda=0$ 的情况，可能会产生矛盾.

例 4.18 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ ax_1+bx_2+cx_3=0,\\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0.\end{cases}$$

(1) a，b，c 满足何种关系时，方程组仅有零解？

(2) a，b，c 满足何种关系时，方程组有无穷多组解，并用基础解系表示全部解.

[提示] 本题考查的是线性方程组何时只有零解，何时有无穷多解．当 D（范德蒙行列式）$\neq0$ 时仅有零解．$D=0$ 的情况比较复杂．必须讨论 $D=0$ 的 a、b、c 取值的所有情况，并在每种情况下写出基础解系.

[解] 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a).$$

(1) 当 $a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$ 时，$D\neq0$，方程组仅有零解

$$x_1=x_2=x_3=0.$$

(2) 下面分四种情况：

① 当 $a=b\neq c$ 时，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

方程组有无穷多组解，全部解为

$$k_1(1,-1,0)^T \quad (k_1\text{ 为任意常数}).$$

② 当 $a = c \neq b$ 时，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

方程组有无穷多组解，全部解为

$$k_2(1,0,-1)^T \quad (k_2\text{ 为任意常数}).$$

③ 当 $b = c \neq a$ 时，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

方程组有无穷多组解，全部解为

$$k_3(0,1,-1)^T \quad (k_3\text{ 为任意常数}).$$

④ 当 $a = b = c$ 时，同解方程组为

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

方程组有无穷多组解，全部解为

$$k_4(-1,1,0)^T + k_5(-1,0,1)^T \quad (k_4, k_5\text{ 为任意常数}).$$

[典型错误] 讨论 $D = 0$ 时 a、b、c 取值分析不全，或者计算错误.

例 4.19 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases} \quad (n \geqslant 2),$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

[提示] 本题考查的是含参数的齐次线性方程组有非零解的判别条件且求通解的方法.

[解法 1] 对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换：

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,\cdots,n]{r_i + (-i)r_1} \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

① 当 $a = 0$ 时，$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 1 < n$，故方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0,$$

由此得基础解系为

$$\xi_1 = (-1,1,0,\cdots,0)^T,\ \xi_2 = (-1,0,1,\cdots,0)^T,\ \cdots,$$
$$\xi_{n-1} = (-1,0,0,\cdots,1)^T,$$

所以方程组的通解为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-1}\xi_{n-1}\ (k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}\text{ 为任意常数}).$$

② 当 $a \neq 0$ 时，对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 继续作初等行变换：

$$B \xrightarrow[i=2,\cdots,n]{\frac{1}{a}\times r_i} \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+\sum_{i=2}^{n}(-r_i)} \begin{pmatrix} a+\frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

故当 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(A)=n-1<n$，方程组也有非零解．其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ \cdots \\ -nx_1+x_n=0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_2=2x_1, \\ x_3=3x_1, \\ \cdots \\ x_n=nx_1. \end{cases}$$

得基础解系为

$$\xi=(1,2,\cdots,n)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为 $x=k\xi$（k 为任意常数）.

［解法 2］ 方程组的系数行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]a^{n-1}.$$

当 $|A|=0$，即 $a=0$，或 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，方程组有非零解.

① 当 $a=0$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

其基础解系为

$$\xi_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\ \xi_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\ \cdots,$$
$$\xi_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-1}\xi_{n-1}(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\text{为任意常数}).$$

② 当 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$时，对系数矩阵 A 作初等行变换：

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ \cdots\cdots \\ -nx_1 + x_n = 0. \end{cases} \text{即} \begin{cases} x_2 = 2x_1, \\ x_3 = 3x_1, \\ \cdots\cdots \\ x_n = nx_1. \end{cases}$$

由此得基础解系 $\xi = (1,2,\cdots,n)^T$，于是方程组的通解为

$$x = k\xi\ (k\text{ 为任意常数}).$$

[典型错误] ①忽略正规的求解过程，只解得 $a=0$ 而没解出 $a = -\frac{n(n+1)}{2}$. ②不会求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的基础解系. ③计算 $|A|$ 出错.

例 4.20 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + a_1^2x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2x_2 + a_2^2x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3x_2 + a_3^2x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4x_2 + a_4^2x_3 = a_4^3, \end{cases} \qquad (*)$$

（Ⅰ）证明，若 a_1、a_2、a_3，a_4 两两不相等，则此线性方程组无解；

（Ⅱ）设 $a_1 = a_3 = k$，$a_2 = a_4 = -k\ (k\neq 0)$，且已知 β_1，β_2 是该方程组的两个解，其中 $\beta_1 = (-1,1,1)^T$，$\beta_2 = (1,1,-1)^T$，写出此方程组的通解.

[提示] 本题考查计算行列式、线性方程组解的结构式和求解的基本方法.

[解] （Ⅰ）方程组$(*)$的增广矩阵的行列式为

$$|B| = |A \vdots b| = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix} \quad \text{（范德蒙行列式）}$$

$$= (a_4 - a_3)(a_4 - a_2)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)(a_2 - a_1).$$

由 a_1，a_2，a_3，a_4 两两不相等，故 $|B| \neq 0$，即 $r(B) = 4$；而系数矩阵 A 的秩 $r(A) \leqslant 3$，故 $r(B) \neq r(A)$，即方程组$(*)$无解.

（Ⅱ）当 $a_1 = a_3 = k$，$a_2 = a_4 = -k\ (k\neq 0)$时方程组$(*)$为

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2x_3 = k^3, \\ x_1 - kx_2 + k^2x_3 = -k^3, \\ x_1 + kx_2 + k^2x_3 = k^3, \\ x_1 - kx_2 + k^2x_3 = -k_3, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + k^2x_3 = k^3, \\ x_1 - kx_2 + k^2x_3 = -k^3. \end{cases}$$

因为 $\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -k \end{vmatrix} = -2k \neq 0$，故 $r(B) = r(A) = 2$，方程组(*)有解，且其对应的导出方程组(齐次方程组)的基础解系应含有 $3-2=1$ 个解向量，且可如下求得

$$\xi = \beta_1 - \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

于是方程组(*)的通解为

$$x = \beta_1 + C\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (C\text{ 为任意常数}).$$

[典型错误] 没有求出导出组基础解系所含向量的个数就写出原方程组的通解，缺乏理论依据.

例 4.21 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2+\lambda)x_2 + (4+\mu)x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$

已知$(1,-1,1,-1)^T$是该方程组的一个解．试求

(Ⅰ) 方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解；

(Ⅱ) 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.

[提示] 本题是含有参数方程组的求解问题，属于常规题．主要考查考生是否熟练掌握非齐次线性方程组的基本求法，怎样由已知条件出发找出参数之间的关系和怎样利用方程组有解和系数矩阵秩的关系求出参数.

[解] 将$(1,-1,1,-1)^T$代入方程组，得 $\lambda = \mu$．对方程组的增广矩阵施以初等行变换，得

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{array}\right).$$

(Ⅰ) 当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时，有

$$\bar{A} \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

因 $r(\bar{A}) = r(A) = 3 < 4$，故方程组有无穷多解，全部解为

$$\xi = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T + k(-2, 1, -1, 2)^T,$$

其中 k 为任意常数.

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，有

$$\bar{A} \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

因 $r(\bar{A})=r(A)=2<4$，故方程组有无穷多解，全部解为

$$\xi=\left(-\frac{1}{2},1,0,0\right)^{T}+k_1(1,-3,1,0)^{T}+k_2(-1,-2,0,2)^{T},$$

其中 k_1，k_2 为任意常数.

（Ⅱ）当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$时，由于 $x_2=x_3$，即

$$-\frac{1}{2}+k=\frac{1}{2}-k.$$

解得 $k=\frac{1}{2}$，方程组的解为

$$\xi=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{T}+\frac{1}{2}(-2,1,-1,2)^{T}=(-1,0,0,1)^{T}.$$

当 $\lambda=\frac{1}{2}$时，由于 $x_2=x_3$，即

$$1-3k_1-2k_2=k_1.$$

解得 $k_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}k_2$，故全部解为

$$\xi=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0\right)^{T}+k_2\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2\right)^{T},$$

其中 k_2 为任意常数.

[典型错误] (1) 很多考生仅讨论 $\lambda\neq\frac{1}{2}$一种情况而没有考虑 $\lambda=\frac{1}{2}$的情况；(2)部分考生在解(Ⅱ)时，没有用(Ⅰ)的结果，而是在方程中令 $x_2=x_3$，然后求解，但是此时的解是 3 维列向量，而没能把它转换为 4 维列向量的形式，导致结果不正确.

例 4.22 设 α_1，α_2，α_3 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系. 证明 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

[提示] 本题考查对基础解系概念的理解，怎样证明向量组线性无关.

[证明] 由于 α_1，α_2，α_3 都是 $Ax=0$ 的解，故两两的和 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 也都是 $Ax=0$ 的解. 再者，如存在数 k_1，k_2，k_3，使

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0,$$

则有

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

由于 α_1，α_2，α_3 线性无关，故得

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0, \\ k_2+k_3=0 \end{cases}\text{其系数行列式}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq0.$$

故有唯一解 $k_1=k_2=k_3=0$，从而 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

由题设，$Ax=0$ 的基础解系含有三个向量，故 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系.

[典型错误] 没有说“$Ax=0$ 的基础解系含有三个向量”，便说 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 是基础解系，这是不完整的.

例 4.23 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$，$\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$，$\cdots$，$\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$，其中 t_1，t_2 为实常数. 试问 t_1、t_2 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

[提示] 本题考查对基础解系概念的理解和掌握. 掌握向量组线性无关的定义和判别方法.

［解］ 由于 $\beta_i\ (i=1,2,\cdots,s)$为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的线性组合，所以 $\beta_i\ (i=1,2,\cdots,s)$均为 $Ax=0$ 的解.

设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0$，即

$$(t_1k_1+t_2k_s)\alpha_1+(t_2k_1+t_1k_2)\alpha_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\alpha_s=0,$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，因此有

$$\begin{cases}t_1k_1+t_2k_s=0,\\ t_2k_1+t_1k_2=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ t_2k_{s-1}+t_1k_s=0.\end{cases}\qquad (*)$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix}t_1&0&\cdots&0&t_2\\ t_2&t_1&0&\cdots&0\\ 0&t_2&t_1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&\cdots&t_2&t_1\end{vmatrix}_{s\times s}=t_1^s+(-1)^{s-1}t_2^s,$$

所以当 $t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s\neq0$，即当 s 为偶数，$t_1\neq\pm t_2$，s 为奇数，$t_1\neq-t_2$ 时，方程组$(*)$只有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$. 从而$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关，此时$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$也为$Ax=0$的一个基础解系.

［典型错误］ 有的考生将 $m=n$ 时的齐次线性方程组只有零解的充分必要条件说成系数行列式为零. 还有的考生说不清楚一个向量组怎样才是线性无关的.

例 4.24 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系. 向量 β 不是方程组 $Ax=0$ 的解，即 $A\beta\neq0$. 试证明：向量组$\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$线性无关.

［提示］ 本题考查点是向量组线性无关的定义，以及如何利用这些向量都是线性方程组的解的特点证明这个向量组线性无关.

［证明］ 设有一组数$k,k_1,k_2,\cdots,k_t$使得

$$k\beta+\sum_{i=1}^{t}k_i(\beta+\alpha_i)=0,\quad 即\quad \left(k+\sum_{i=1}^{t}k_i\right)\beta=\sum_{i=1}^{t}(-k_i)\alpha_i.\qquad (*)$$

把$(*)$式两边左乘以 A，有

$$\left(k+\sum_{i=1}^{t}k_i\right)A\beta=\sum_{i=1}^{t}(-k_i)A\alpha_i=0.$$

因为 $A\beta\neq0$，故

$$k+\sum_{i=1}^{t}k_i=0.\qquad (**)$$

因而，由$(*)$式，得

$$\sum_{i=1}^{t}(-k_i)\alpha_i=\left(k+\sum_{i=1}^{t}k_i\right)\beta=0.$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{t}k_i\alpha_i=0$. 再由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是方程组$Ax=0$的一个基础解系，所以该向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$线性无关，从而有 $k_1=k_2=\cdots=k_t=0$；再由$(**)$可知：$k=0$. 因此，向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

［典型错误］ 线性无关的概念不清，不会利用向量组中向量都是线性方程组的解的这一特点证明问题.

例 4.25 设 A 是n阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $A^kx=0$ 有解向量 α，且 $A^{k-1}\alpha\neq0$. 证明：向量组$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$是线性无关的.

［提示］ 本题考查考生理解和掌握线性无关的概念和判别方法. 利用线性方程组解向量的定义的特点证明向量组的线性组合系数全为 0.

［证明］ 设有常数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，使得 $\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=0$，则有

$$A^{k-1}(\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots\lambda_kA^{k-1}\alpha)=0\text{，从而有 }\lambda_1A^{k-1}\alpha=0.$$

由于 $A^{k-1}\alpha\neq0$，所以 $\lambda_1=0$.

类似可证得 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_k=0$，因此向量组 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

[典型错误] 有些考生用"比较系数法"说向量组的线性组合系数全为 0. 但"比较系数法"的前提是 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关. 考生实际上是承认线性无关证线性无关. 是本质性的错误.

例 4.26 已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$ 均为 4 维列向量，其中 α_2，α_3，α_4 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$. 如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

[提示] 本题的考查点是向量组线性无关的充要条件，线性方程组的求解问题，或用向量方程组然后求解.

[解法 1] 令 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，则由 $Ax=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\beta$ 得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4.$$

将 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 代入上式，整理后得

$$(2x_1+x_2-3)\alpha_2+(-x_1+x_3)\alpha_3+(x_4-1)\alpha_4=0.$$

由 α_2，α_3，α_4 线性无关，知

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3=0,\\-x_1+x_3=0,\\x_4-1=0.\end{cases}$$

解此方程组得

$$x=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\text{，其中 }k\text{ 为任意常数.}$$

[解法 2] 由 α_2，α_3，α_4 线性无关和 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$，故 A 的秩为 3，因此 $Ax=0$ 的基础解系中只包含一个向量.

由 $\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\alpha_4=0$ 知 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个解，所以其通解为

$$x=k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\text{，}k\text{ 为任意常数.}$$

再由

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

知 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的一个特解. 于是 $Ax=\beta$ 的通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}，其中\ k\ 为任意常数.$$

［典型错误］ 有的考生不会将 $Ax=\beta$ 写成向量方程 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$，有的考生不知道已知条件 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 表示 $(1,-2,1,0)^T$ 是 $Ax=0$ 的一个解. $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 表示 $(1,1,1,1)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的一个特解.

例 4.27 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1:\ ax+2by+3c=0,$$
$$l_2:\ bx+2cy+3a=0,$$
$$l_3:\ cx+2ay+3b=0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

［提示］ 本题考查点是解析几何与线性代数相应内容的关系问题，即平面上三条直线交于一点怎样用二元线性方程组的系数来描述，同时考查线性方程组解的结构与系数矩阵秩的关系.

［证法 1］ 必要性：设三直线 l_1，l_2，l_3 交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\bx+2cy=-3a,\\cx+2ay=-3b\end{cases}\qquad(*)$$

有唯一解，故系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&2b\\b&2c\\c&2a\end{pmatrix}$ 与增广矩阵 $\bar{A}=\begin{pmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{pmatrix}$ 的秩均为 2，于是 $|\bar{A}|=0$.

由于

$$|\bar{A}|=\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

但 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$，故 $a+b+c=0$.

充分性：由 $a+b+c=0$，则从必要性的证明可知，$|\bar{A}|=0$，故秩 $(\bar{A})<3$.

由于

$$\begin{vmatrix}a&2b\\b&2c\end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-2\left[\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right]\neq0,$$

故秩 $(A)=2$. 于是，秩 $(A)=$ 秩 $(\bar{A})=2$.

因此方程组 $(*)$ 的唯一解，即三直线 l_1，l_2，l_3 交于一点.

［证法 2］ 必要性：设三直线交于一点 (x_0,y_0)，则 $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的非零解，其中

$$A=\begin{pmatrix}a&2b&3c\\b&2c&3a\\c&2a&3b\end{pmatrix}.$$

于是 $|A|=0$. 而

$$|A|=\begin{vmatrix}a&2b&3c\\b&2c&3a\\c&2a&3b\end{vmatrix}=-6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$
$$=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2],$$

但$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故 $a+b+c=0$.

充分性：考虑线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\ bx+2cy=-3a,\\ cx+2ay=-3b.\end{cases}\qquad (*)$$

将方程组$(*)$的三个方程相加，并由 $a+b+c=0$ 可知，方程组$(*)$等价于方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c,\\ bx+2cy=-3a.\end{cases}\qquad (**)$$

因为

$$\begin{vmatrix}a & 2b\\ b & 2c\end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-[a^2+b^2+(a+b)^2]\neq 0.$$

故方程组$(**)$有唯一解，所以方程组$(*)$有唯一解，即三直线 l_1、l_2、l_3 交于一点.

[典型错误] 对存在唯一解的充要条件不清楚，基础知识薄弱．证明中没有足够的推理过程．有的考生只写"l_1，l_2，l_3 交于一点，则方程组$(*)$有唯一解，所以 $a+b+c=0$"，实际什么也没有讲．还有的考生这么证：将原方程组中三式相加得

$$(a+b+c)(x+2y+3)=0.\qquad (***)$$

所以 $a+b+c=0$，反之，当 $a+b+c=0$，$(***)$对任意(x,y)成立，所以原方程组有解．这里犯了两个错误：1)将方程组当作恒等式；2)$(***)$的成立，并不能说原方程组的三个方程有公共解.

例 4.28 设四元齐次线性方程组①为$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0.\end{cases}$又已知某线性齐次方程组②的通解为 $k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)$；

(Ⅰ) 求线性方程组①的基础解系；

(Ⅱ) 问线性方程组①和②是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解．若没有，则说明理由.

[提示] 本题考查点是求基础解系和如何求两个方程组的公共解．注意到如果 α 为方程组①与②的公共解，则 α 可由①与②的基础解系线性表示.

[解] (Ⅰ) 由①，有$\begin{cases}x_1=-x_2,\\ x_4=x_2.\end{cases}$取$\begin{pmatrix}x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，得①的基础解系$(0,0,1,0)$，$(-1,1,0,1)$.

(Ⅱ) 有非零公共解.

②的通解可表为

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-k_2,k_1+2k_2,k_1+2k_2,k_2),$$

把它代入①，得

$$\begin{cases}-k_2+(k_1+2k_2)=0,\\ (k_1+2k_2)-k_2=0.\end{cases}$$

解之，得 $k_1=-k_2$.

当 $k_1=-k_2\neq 0$ 时，②的通解化为

$$k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)=k_2[(0,-1,-1,0)+(-1,2,2,1)]=k_2(-1,1,1,1).$$

即此向量是①与②的非零公共解，故方程组①、②的所有非零公共解是 $k(-1,1,1,1)$(k 是不为零的任意常数).

[典型错误] 不会求两方程组的公共解．原因是对基础解系的概念掌握得不熟练，不知道公共解就可以分别由两个方程组的基础解系线性表示，同时又满足两个方程组.

例 4.29 设四元齐次线性方程组①为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$$

且已知另一四元齐次线性方程组②的一个基础解系为

$$\alpha_1=(2,-1,a+2,1)^T,\ \alpha_2=(-1,2,4,a+8)^T.$$

（Ⅰ）求方程组①的一个基础解系；

（Ⅱ）当 a 为何值时，方程组①与②有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解.

[提示] 本题与例 4.28 类似，只是多了一个参数. 主要考查线性方程组求解和两个方程组求公共解的方法，以及齐次方程组有非零解的条件.

[解法 1] （Ⅰ）对方程组①的系数矩阵作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-5&3\\0&1&3&-2\end{pmatrix}.$$

得方程组①的同解方程组

$$\begin{cases}x_1=5x_3-3x_4,\\x_2=-3x_3+2x_4.\end{cases}$$

由此可得方程组①的一个基础解系为

$$\beta_1=(5,-3,1,0)^T,\ \beta_2=(-3,2,0,1)^T.$$

（Ⅱ）由题设条件，方程组②的全部解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\begin{pmatrix}2k_1-k_2\\-k_1+2k_2\\(a+2)k_1+4k_2\\k_1+(a+8)k_2\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).\qquad(*)$$

将上式代入方程组①，得

$$\begin{cases}(a+1)k_1=0,\\(a+1)k_1-(a+1)k_2=0.\end{cases}\qquad(**)$$

要使方程组①与②有非零公共解，只需关于 k_1，k_2 的方程组(＊＊)有非零解.

因为

$$\begin{vmatrix}a+1&0\\a+1&-(a+1)\end{vmatrix}=-(a+1)^2,$$

所以，当 $a\neq-1$ 时，方程组①与②无非零公共解.

当 $a=-1$ 时，方程组(＊＊)有非零解，且 k_1，k_2 为不全为零的任意常数. 此时，由(＊)可得方程组①与②的全部非零公共解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\7\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\text{ 为不全为零的任意常数}).$$

[解法 2] （Ⅰ）同解法 1

（Ⅱ）设方程组①与②的公共解为 η，则有数 k_1，k_2，k_3，k_4，使得

$$\eta=k_1\beta_1+k_2\beta_2=k_3\alpha_1+k_4\alpha_2.$$

由此得线性方程组

$$③\begin{cases}-k_1+2k_3-k_4=0,\\-k_2-k_3+2k_4=0,\\-2k_1-3k_2+(a+2)k_3+4k_4=0,\\-3k_1-5k_2+k_3+(a+8)k_4=0.\end{cases}$$

对方程组③的系数矩阵作初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 2\\ -2 & -3 & a+2 & 4\\ -3 & -5 & 1 & a+8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & a+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}.$$

由此可知，当 $a\neq -1$ 时，方程组③的系数矩阵是满秩的．方程组③仅有零解，故方程组①与②无非零公共解．

当 $a=-1$ 时，方程组③的同解方程组为

$$\begin{cases}k_1=2k_3-k_4\\ k_2=-k_3+2k_4.\end{cases}$$

令 $k_3=c_1$，$k_4=c_2$．得方程组①与②的非零公共解为

$$\eta=c_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\7\end{pmatrix}\quad(c_1,c_2\text{ 为不全为零的任意常数}).$$

［典型错误］ 有的考生不会求参数．不知道如何将两个方程组有非零公共解的问题转化为一个齐次线性方程组有非零解的问题．

例 4.30 已知齐次线性方程组

$$①\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\ 2x_1+3x_2+5x_3=0,\\ x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}\text{ 和② }\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0.\\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解，求 a、b、c 的值．

［提示］ 本题考查两个线性方程组同解具有的性质．齐次线性方程组基础解系的概念及其求法。

［解］ 方程组②的未知量个数大于方程的个数．故方程组②有无穷多个解．因为方程组①与②同解．所以方程组①的系数矩阵的秩小于 3.

对方程组①的系数矩阵施以初等行变换．

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a-2\end{pmatrix}.$$

从而 $a=2$.

此时．方程组①的系数矩阵可化为

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

故 $(-1,-1,1)^T$ 是方程组①的一个基础解系．

将 $x_1=-1$、$x_2=-1$、$x_3=1$ 代入方程组②，可得

$$b=1,\ c=2 \text{ 或 } b=0,\ c=1.$$

当 $b=1$，$c=2$ 时，对方程组②的系数矩阵施以初等行变换．有

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

故方程组①与②同解．

当 $b=0$，$c=1$ 时．方程组②的系数矩阵可化为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

故方程组①与②的解不相同.

综上所述，当 $a=2$，$b=1$，$c=2$ 时，方程组①与②同解.

[典型错误] 有的考生不会将已知两个线性方程组同解的条件转化为常见题的计算问题、也有的考生在计算过程中漏掉了对 b，c 有另一组解的讨论.

例 4.31 已知线性方程组

$$①\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$$

的一个基础解系为 $(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^{\mathrm T},(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^{\mathrm T},\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^{\mathrm T}$. 试写出线性方程组

$$②\begin{cases} b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0, \\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases}$$

的通解、并说明理由.

[提示] 本题考查对齐次方程组基础解系的理解，对矩阵运算的掌握. 考查考生是否了解齐次方程组系数矩阵的 n 个行向量的转置向量就是将原方程组转置后的齐次方程组的 n 个解向量.

[解] ②的通解为

$$y=C_1(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1,2n})^{\mathrm T}+C_2(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2,2n})^{\mathrm T}+\cdots+C_n(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{n,2n})^{\mathrm T},$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为任意常数.

理由：方程组①、②的系数矩阵分别记为 A、B、则由①的已知基础解系可知 $AB^{\mathrm T}=O$、于是 $BA^{\mathrm T}=(AB^{\mathrm T})^{\mathrm T}=O$，因此可知 A 的 n 个行向量的转置向量为②的 n 个解向量.

由于 B 的秩为 n，故②的解空间的维数为 $2n-n=n$. 又 A 的秩为 $2n$ 与①的解空间维数之差. 即为 n，故 A 的 n 个行向量线性无关，从而它们的转置向量构成②的一个基础解系，于是得到②的上述通解.

[典型错误] 考虑不周到(如未考虑转置)，推理不清楚、不会考虑 A 的秩是多少，就断言 $A^{\mathrm T}$ 的各列向量是②的基础解系。还有的考生不知道如果 $AB=O$、则 B 的列向量是 $Ax=0$ 的解、或猜出答案. 什么理由也不讲.

例 4.32 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵，$\alpha_1=(1,1,2,3)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm T}$，$\alpha_3=(5,-1,-8,9)^{\mathrm T}$ 是齐次线性方程组 $Bx=0$ 的解向量，求 $Bx=0$ 的解空间的一个标准正交基.

[提示] 本题主要考查解空间的维数以及相应个数的线性无关的解和施密特正交化.

[解] 解空间的维数为 $4-r(B)=4-2=2$，由于 α_1，α_2 线性无关，故 α_1，α_2 是 $Bx=0$ 的解空间的一个基.

先将 α_1，α_2 正交化，取

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,2,3)^{\mathrm T},$$

$$\begin{aligned}\beta_2&=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-1,1,4,-1)^{\mathrm T}-\frac{5}{15}(1,1,2,3)^{\mathrm T}\\ &=(-1,1,4,-1)^{\mathrm T}-\frac{1}{3}(1,1,2,3)^{\mathrm T}=(-1,1,4,-1)^{\mathrm T}-\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)^{\mathrm T}\\ &=\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{10}{3},-2\right)^{\mathrm T}.\end{aligned}$$

再把 β_1、β_2 标准化、得

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^{\mathrm T},\quad \varepsilon_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^{\mathrm T},$$

此即为所求的标准正交基.

[典型错误] 计算错误.

例 4.33 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一，试求

(Ⅰ) a 的值;(Ⅱ)正交矩阵 Q，使 Q^TAQ 为对角矩阵.

[提示] 本题主要考查线性方程组有解的判别条件，以及利用正交矩阵求矩阵对角化的方法.

[解法 1] (Ⅰ) 对线性方程组 $Ax=\beta$ 的增广矩阵作行的初等变换，有

$$(A\,\vdots\,\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(a-1)(a+2)&a+2\end{array}\right).$$

因为方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一，所以秩$(A)=$秩$(A\,\vdots\,\beta)<3$，故 $a=-2$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)，有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}.$$

A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3),$$

故 A 的特征值为

$$\lambda_1=3,\ \lambda_2=-3,\ \lambda_3=0.$$

对应的特征向量依次是

$$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\ \alpha_2=(1,-2,1)^T,\ \alpha_3=(1,1,1)^T.$$

将 α_1, α_2, α_3 单位化，得

$$\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2}\right)^T,\ \beta_2=\left(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)^T,\ \beta_3=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)^T.$$

令

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix},$$

则有

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

[解法 2] (Ⅰ) 因为线性方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一，所以

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(a-1)^2(a+2)=0.$$

当 $a=1$ 时，秩$(A)\neq$秩$(A\,\vdots\,\beta)$，此时方程组无解；当 $a=-2$ 时，秩$(A)=$秩$(A\,\vdots\,\beta)$，此时方程组的解存在但不唯一．于是，$a=-2$.

(Ⅱ) 同解法 1.

[典型错误] 正交矩阵概念掌握不好．求正交矩阵时没有将所求的三个线性无关向量单位化．还有的学生忘记了正交矩阵的不同特征值对应的特征向量相互正交的结论，对所求的三个线性无关特征向量用施密特公式正交化，多此一举．

例 4.34 已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c)，a，b，c 不全为零．矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$（$k$ 为常数），且 $AB=O$，求线性方程组 $Ax=0$ 的通解．

[提示] 本题主要考查矩阵乘积运算中秩的关系，矩阵方程怎样转化成线性方程组．线性方程组解的结构与系数矩阵秩的关系．

[解] 由于 $AB=O$．故 $r(A)+r(B)\leqslant 3$，又由 a，b，c 不全为零，可知 $r(A)\geqslant 1$．

当 $k\neq 9$ 时，$r(B)=2$，于是 $r(A)=1$；

当 $k=9$ 时，$r(B)=1$，于是 $r(A)=1$ 或 $r(A)=2$．

对于 $k\neq 9$，由 $AB=O$ 可得

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0 \quad 和 \quad A\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}=0．$$

由于 $\eta_1=(1,2,3)^{\mathrm T}$，$\eta_2=(3,6,k)^{\mathrm T}$ 线性无关．故 η_1，η_2 为 $Ax=0$ 的一个基础解系，于是 $Ax=0$ 的通解为

$$x=c_1\eta_1+c_2\eta_2，其中\ c_1，c_2\ 为任意常数．$$

对于 $k=9$，分别就 $r(A)=2$ 和 $r(A)=1$ 进行讨论．

如果 $r(A)=2$，则 $Ax=0$ 的基础解系由一个向量构成．又因为 $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0$，所以 $Ax=0$ 的通解为 $x=c_1(1,2,3)^{\mathrm T}$，其中 c_1 为任意常数．

如果 $r(A)=1$，则 $Ax=0$ 的基础解系由两个向量构成．又因为 A 的第一行为 (a,b,c) 且 a，b，c 不全为零，所以 $Ax=0$ 等价于 $ax_1+bx_2+cx_3=0$，不妨设 $a\neq 0$，$\eta_1=(-b,a,0)^{\mathrm T}$，$\eta_2=(-c,0,a)^{\mathrm T}$ 是 $Ax=0$ 的两个线性无关的解，故 $Ax=0$ 的通解为

$$x=c_1\eta_1+c_2\eta_2，其中\ c_1，c_2\ 为任意常数．$$

[典型错误] 当 $r(A)=1$ 时，没有假设 $k\neq 9$，就说 $(1,2,3)^{\mathrm T}$，$(3,6,k)^{\mathrm T}$ 是 $Ax=0$ 的一个基本解系；不会利用"A 的第一行是 (a,b,c)，a，b，c 不全为零"这个已知条件；许多考生没有分情况讨论或漏掉一些情形．

五、矩阵的特征值和特征向量

·考试内容与考试要求·

数学(一)

考试内容

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质　相似变换、相似矩阵的概念及性质　矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵　实对称矩阵的特征值、特征向量及其相似对角矩阵

考试要求

1．理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量．

2．理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法．

3．掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质．