[典型错误] 正交矩阵概念掌握不好. 求正交矩阵时没有将所求的三个线性无关向量单位化. 还有的学生忘记了正交矩阵的不同特征值对应的特征向量相互正交的结论, 对所求的三个线性无关特征向量用施密特公式正交化, 多此一举.

例 4.34 已知 3 阶矩阵 A 的第一行是(a,b,c), a, b, c 不全为零. 矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$($k$ 为常数), 且 $AB=O$, 求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

[提示] 本题主要考查矩阵乘积运算中秩的关系, 矩阵方程怎样转化成线性方程组. 线性方程组解的结构与系数矩阵秩的关系.

[解] 由于 $AB=O$. 故 $r(A)+r(B)\leqslant 3$, 又由 a, b, c 不全为零, 可知 $r(A)\geqslant 1$.

当 $k\neq 9$ 时, $r(B)=2$, 于是 $r(A)=1$;

当 $k=9$ 时, $r(B)=1$, 于是 $r(A)=1$ 或 $r(A)=2$.

对于 $k\neq 9$, 由 $AB=O$ 可得

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0 \quad 和 \quad A\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}=0.$$

由于 $\eta_1=(1,2,3)^{\mathrm T}$, $\eta_2=(3,6,k)^{\mathrm T}$ 线性无关. 故 η_1、η_2 为 $Ax=0$ 的一个基础解系, 于是 $Ax=0$ 的通解为

$$x=c_1\eta_1+c_2\eta_2, 其中 c_1, c_2 为任意常数.$$

对于 $k=9$, 分别就 $r(A)=2$ 和 $r(A)=1$ 进行讨论.

如果 $r(A)=2$, 则 $Ax=0$ 的基础解系由一个向量构成. 又因为 $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0$, 所以 $Ax=0$ 的通解为 $x=c_1(1,2,3)^{\mathrm T}$, 其中 c_1 为任意常数.

如果 $r(A)=1$, 则 $Ax=0$ 的基础解系由两个向量构成. 又因为 A 的第一行为(a,b,c)且 a, b, c 不全为零, 所以 $Ax=0$ 等价于 $ax_1+bx_2+cx_3=0$, 不妨设 $a\neq 0$, $\eta_1=(-b,a,0)^{\mathrm T}$, $\eta_2=(-c,0,a)^{\mathrm T}$ 是 $Ax=0$ 的两个线性无关的解, 故 $Ax=0$ 的通解为

$$x=c_1\eta_1+c_2\eta_2, 其中 c_1, c_2 为任意常数.$$

[典型错误] 当 $r(A)=1$ 时, 没有假设 $k\neq 9$, 就说$(1,2,3)^{\mathrm T}$, $(3,6,k)^{\mathrm T}$ 是 $Ax=0$ 的一个基本解系; 不会利用 "A 的第一行是(a,b,c), a, b, c 不全为零" 这个已知条件; 许多考生没有分情况讨论或漏掉一些情形.

五、矩阵的特征值和特征向量

• 考试内容与考试要求 •

数学(一)

考试内容

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质　相似变换、相似矩阵的概念及性质　矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵　实对称矩阵的特征值、特征向量及其相似对角矩阵

考试要求

1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质, 会求矩阵的特征值和特征向量.

2. 理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件, 掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.

3. 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

数学(二)

考试内容

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质　相似矩阵的概念及性质　矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵　实对称矩阵的特征值、特征向量及其相似对角矩阵

考试要求

1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量.

2. 理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，会将矩阵化为相似对角矩阵.

3. 理解实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

·考试内容解析·

（一）矩阵的特征值和特征向量

1. 特征值和特征向量的概念

（1）特征值和特征向量的定义　设 A 是 n 阶矩阵，如果存在一个数 λ 和非零的 n 维列向量 α，使得

$$A\alpha=\lambda\alpha,$$

则称 λ 是矩阵 A 的一个特征值，α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量.

（2）特征多项式和特征方程　设 A 是 n 阶矩阵，行列式 $|\lambda E-A|$ 称为矩阵 A 的特征多项式，$|\lambda E-A|=0$ 称为矩阵 A 的特征方程.

2. 特征值和特征向量的求法

（1）解特征方程 $|\lambda E-A|=0$，得矩阵 A 的全部特征值 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，其中可能有重根.

（2）对每个特征值 λ_i，解齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)x=0$．设 $r(\lambda_i E-A)=r_i$，如果求出方程组的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r_i}$，则矩阵 A 属于特征值 λ_i 的全部特征向量为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r_i}\xi_{n-r_i},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r_i}$ 是不全为零的任意常数.

3. 特征值和特征向量的性质

（1）n 阶矩阵 A 和它的转置矩阵 $A^{\mathrm T}$ 有相同的特征值.

（2）n 阶矩阵 A 属于不同特征值的特征向量线性无关.

（3）n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是，它的任一特征值均不等于零.

（4）设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\mathrm{tr}\,A$，$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$，其中 $\mathrm{tr}\,A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 称为矩阵 A 的迹.

（5）若 λ 是矩阵 A 的特征值，则对任何正整数 k，λ^k 是 A^k 的特征值；且 $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值，这里 $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$，$\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$．

（二）相似矩阵

1. 矩阵相似的定义

设 A、B 为 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=B.$$

则称矩阵 A 与 B 相似，记作 $A\sim B$．对 A 进行运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换，可逆矩阵 P 称为把 A 化为 B 的相似变换矩阵.

2. 相似矩阵的性质　设 A，B，C 为 n 阶矩阵，

（1）反身性　对任意 n 阶矩阵 A，均有 $A\sim A$.

（2）对称性　如果 n 阶矩阵 $A\sim B$，则 $B\sim A$.

（3）传递性　如果 n 阶矩阵 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.

(4) 如果 n 阶矩阵 $A \sim B$，则 $|A| = |B|$.

(5) 如果 n 阶矩阵 $A \sim B$，则 A，B 有相同的特征多项式．从而有相同的特征值.

(6) 如果 n 阶矩阵 $A \sim B$，则 $A^{\mathrm{T}} \sim B^{\mathrm{T}}$，$A^m \sim B^m$，其中 m 为正整数.

(7) 如果 n 阶矩阵 $A \sim B$．且 A，B 都可逆．则 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

(8) 如果 n 阶矩阵 $A \sim B$．则 $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, B$，$r(A) = r(B)$.

3．矩阵可相似对角化的充分必要条件

(1) n 阶矩阵 A 可相似对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

推论　如果 n 阶矩阵 A 有 n 个互异的特征值，则 A 与对角矩阵相似.

(2) n 阶矩阵 A 可相似对角化的充分必要条件是对于矩阵 A 的每一个 n_i．重特征值 λ_i，特征矩阵 $\lambda_i E - A$ 的秩 $r(\lambda_i E - A) = n - n_i$．即对矩阵 A 的每一个 n_i 重特征值 λ_i，线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数 n_i.

4．矩阵化为相似对角形的方法

(1) 解特征方程 $|\lambda E - A| = 0$，求出 A 的全部互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$．设 λ_i 是 n_i 重根$(i = 1, 2, \cdots, s)$；

(2) 对每个特征值 λ_i，解齐次线性方程组$(\lambda_i E - A)x = 0$，求得基础解系 $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{in_i}$；

(3) 令可逆矩阵 $P = (\xi_{11}, \xi_{12}, \cdots, \xi_{1n_1}, \xi_{21}, \xi_{22}, \cdots, \xi_{2n_2}, \cdots, \xi_{s1}, \xi_{s2}, \cdots, \xi_{sn_s})$，则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_s & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix},$$

其中 λ_i 的个数为 n_i $(i = 1, 2, \cdots, s)$.

（三）实对称矩阵的特征值和特征向量

1．实对称矩阵特征值和特征向量的性质

(1) 实对称矩阵的特征值都是实数.

(2) 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的.

(3) 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值.

2．用正交变换化实对称矩阵为对角形的方法

(1) 求出 n 阶实对称矩阵 A 的全部互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$．设 λ_i 是 n_i 重根$(i = 1, 2, \cdots, s)$；

(2) 对每个特征值 λ_i，解齐次线性方程组$(\lambda_i E - A)x = 0$．求得基础解系 $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{in_i}$；

(3) 将 $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{in_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$正交单位化，得正交单位向量组 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{in_i}$．这里．当 $n_i = 1$ 时，即 λ_i 是单根时，对应特征向量只需单位化.

(4) 令正交矩阵 $Q=(\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1n_1},\eta_{21},\eta_{22},\cdots,\eta_{2n_2},\eta_{s1},\eta_{s2},\cdots,\eta_{sn_s})$，则

$$Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&\lambda_1&&&&&&\\&&&\lambda_2&&&&&\\&&&&\ddots&&&&\\&&&&&\lambda_2&&&\\&&&&&&\ddots&&\\&&&&&&&\lambda_s&\\&&&&&&&&\ddots\\&&&&&&&&&\lambda_s\end{pmatrix},$$

其中 λ_i 的个数为 $n_i\ (i=1,2,\cdots,s)$.

·例题详解·

例 5.1 设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1，则 A 的 n 个特征值为

[答案] $n,\overbrace{0,\cdots,0}^{n-1个}$.

[提示] 本题考查特征值的定义与 n 阶行列式的计算.

[解] 由特征值的定义，先写出 A 的特征方程

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-n&-1&\cdots&-1\\\lambda-n&\lambda-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda-n&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1&-1&\cdots&-1\\1&\lambda-1&\cdots&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1&-1&\cdots&-1\\0&\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}=0.$$

所以特征值为 n 与 $n-1$ 个 0.

[典型错误] 只写出特征值为 n 与 0 而未注明 0 的重数，考卷中明确要求写出 n 个特征值，而考生只写了两个：n 与 0.

例 5.2 若四阶矩阵 A 与 B 相似，A 的特征值为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，则行列式 $|B^{-1}-E|$ 等于________.

[答案] 24.

[提示] 本题考查相似矩阵的性质以及矩阵运算的技巧.

[解] 因为矩阵 A 与 B 相似，故 A 与 B 有相同的特征值. 由题意，B 的特征值为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，所以 B^{-1}的特征值为 2，3，4，5，故 $|B^{-1}-E|=(2-1)(3-1)(4-1)(5-1)=24$.

[典型错误] 部分学生搞不清楚矩阵 A 与 B 和 B 与 B^{-1}特征值之间的关系，以及矩阵行列式为矩阵所有特征值(根按重数计算)之积.

例 5.3 设 A 为 n 阶矩阵，$|A|\neq0$，A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有特征值 λ，则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值

[答案] $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$.

[提示] 本题考查已知 A 的特征值计算与 A 有关的某矩阵的特征值，是有关矩阵特征值计算的基本概念题.

[解] 设 λ 是 A 的特征值，则当 $|A|\neq 0$ 时，必有 $\lambda\neq 0$，并且 $A^*=|A|A^{-1}$. 由 $A\xi=\lambda\xi$ 立即推知 $A^{-1}\xi=\frac{1}{\lambda}\xi$，$A^*\xi=|A|A^{-1}\xi=\frac{|A|}{\lambda}\xi$，$(A^*)^2\xi=A^*(A^*\xi)=A^*\left(\frac{|A|}{\lambda}\xi\right)=\frac{|A|}{\lambda}A^*\xi=\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2\xi$，所以$(A^*)^2$有特征值$\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2$，从而$(A^*)^2+E$有特征值$\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$.

[典型错误] 有不少考生会计算具体的 A 的特征值及相应的特征向量，但让他利用定义 $A\xi=\lambda\xi$，当 $|A|\neq 0$ 时，去推导 A^{-1}，A^* 等的特征值就不会了.

例 5.4 设矩阵

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

已知矩阵 A 相似于 B，则秩$(A-2E)$与秩$(A-E)$之和等于

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4.　　(D) 5.

[答案] (C).

[提示] 本题考查相似矩阵的性质.

[解] 因 A 相似于 B，所以存在可逆阵 P，使 $A=P^{-1}BP$.

$$\begin{aligned}&r(A-2E)+r(A-E)=r(P^{-1}BP-2E)+r(P^{-1}BP-E)\\&=r[P^{-1}(B-2E)P]+r[P^{-1}(B-E)P]=r(B-2E)+r(B-E)\\&=r\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\\&=3+1=4.\ \text{故选(C).}\end{aligned}$$

例 5.5 设 λ_1，λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1，α_2，则 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1\neq 0$.　　(B) $\lambda_2\neq 0$.　　(C) $\lambda_1=0$.　　(D) $\lambda_2=0$.

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查特征值、特征向量的定义和线性无关的判别法. 利用属于不同特征值的特征向量线性无关即得.

[解法 1] 设 $k_1\alpha_1+k_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，得$(k_1+\lambda_1k_2)\alpha_1+\lambda_2k_2\alpha_2=0$. 由于 α_1，α_2 是属于 A 的不同特征值的特征向量，故 α_1，α_2 线性无关. 从而

$$\begin{cases}k_1+\lambda_1k_2=0,\\\lambda_2k_2=0.\end{cases}$$

所以 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关$\Leftrightarrow k_1=k_2=0\Leftrightarrow$行列式$\begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow\lambda_2\neq 0$. 即选项(B)正确.

[解法 2] 由于$(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2))=(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$，故 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关，即 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$的秩为 2 的充要条件为$\begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}\neq 0$，即 $\lambda_2\neq 0$. 故选(B).

[典型错误] 选(C). 当 $\lambda_1=0$ 时必有 $\lambda_2\neq 0$，所以 $\lambda_1=0$ 是充分条件，但不是必要的. 选(C)的考生正是忽略了这一点.

例 5.6 设 A 是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵. 已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵$(P^{-1}AP)^{\mathrm T}$ 属于特征值 λ 的特征向量是

(A) $P^{-1}\alpha$.　　(B) $P^{\mathrm T}\alpha$.　　(C) $P\alpha$.　　(D) $(P^{-1})^{\mathrm T}\alpha$.

[答案] (B).

［提示］ 本题主要考查特征值与特征向量的关系以及矩阵的基本性质. 因为 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量. 故 $A\alpha=\lambda\alpha$. 矩阵$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$属于特征值 λ 的特征向量 β 必须满足$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}\beta=\lambda\beta$. 将(A)、(B)、(C)、(D)分别代入上式验算即可.

［解］ 由于$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}\alpha=P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}\alpha=P^{\mathrm{T}}A(P^{\mathrm{T}})^{-1}P^{\mathrm{T}}\alpha=P^{\mathrm{T}}A\alpha$. 但由已知 $A\alpha=\lambda\alpha$. 故$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}\alpha=P^{\mathrm{T}}\lambda\alpha=\lambda P^{\mathrm{T}}\alpha$，即矩阵$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$属于特征值 λ 的特征向量为 $P^{\mathrm{T}}\alpha$，因而应选(B). 事实上，$P^{-1}\alpha$ 是 $P^{-1}AP$ 的属于 λ 的特征向量；$P\alpha$ 和$(P^{-1})^{\mathrm{T}}\alpha$ 分别是矩阵 PAP^{-1}和$(PAP^{-1})^{\mathrm{T}}$属于 λ 的特征向量.

例 5.7 设 A 是 n 阶方阵，$2,4,\cdots,2n$ 是 A 的 n 个特征值，E 是 n 阶单位阵. 计算行列式 $|A-3E|$ 的值.

［提示］ 本题主要考查若 n 阶方阵有 n 个不同的特征值，则它与对角阵相似以及方阵乘积的行列式等于方阵的行列式的乘积.

［解］ 已知 n 阶方阵有 n 个不同的特征值，故存在可逆阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}，即 A=P\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}P^{-1}.$$

因此

$$|A-3E|=\left|P\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}P^{-1}-3E\right|=\left|P\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}P^{-1}-3PP^{-1}\right|$$

$$=\left|P\left[\begin{pmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}\right]P^{-1}\right|$$

$$=|P|\left|\begin{pmatrix}-1&&&&\\&1&&&\\&&3&&\\&&&\ddots&\\&&&&2n-3\end{pmatrix}\right||P^{-1}|=-[(2n-3)!!].$$

［典型错误］ 部分考生不知道用相似对角化 $A=P\begin{bmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{bmatrix}P^{-1}$来代替 A，因此就感觉无从下手.

例 5.8 设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 求 A 的特征值和特征向量；

(Ⅱ) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

［提示］ 本题主要考查含参数的矩阵的特征值、特征向量的计算问题. 计算过程中涉及行列式的计算，齐次线性方程组的求解以及矩阵的对角化问题.

［解］ 当 $b=0$ 或 $n=1$ 时. $A=E$，于是 A 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$. 任意非零列向量均为特征向量；对任意 n 阶可逆矩阵 P，均有 $P^{-1}AP=E$. 下面考虑 $b\neq0$ 且 $n\geqslant2$ 的情形. 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & \cdots & -b\\ -b & \lambda-1 & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1},$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.

（Ⅰ）对于 $\lambda_1=1+(n-1)b$，考虑齐次线性方程组 $(\lambda_1E-A)x=0$．对 λ_1E-A 施以行初等变换，得

$$\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}(n-1)b & -b & \cdots & -b\\ -b & (n-1)b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & (n-1)b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\xi_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}$．所以 A 的属于 λ_1 的全部特征向量为

$$k\xi_1=k\,(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}\quad(k\text{ 为任意非零常数}).$$

对于 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$．考虑齐次线性方程组 $(\lambda_2E-A)x=0$.

对 λ_2E-A 施以行初等变换，得

$$\lambda_2E-A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

解得基础解系为

$$\xi_2=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm T},\cdots,\xi_n=(1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm T}.$$

故 A 的属于 λ_2 的全部特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3+\cdots+k_n\xi_n\quad(k_2,k_3,\cdots,k_n\text{ 是不全为零的常数}).$$

（Ⅱ）令 $P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1+(n-1)b & & & \\ & 1-b & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-b\end{pmatrix}.$$

［典型错误］ 大多数考生没有讨论 $b=0$ 这种情况．导致失分；有相当一部分考生没有掌握矩阵初等变换的基本技巧．在求 λ_1 的特征向量时出错；还有部分考生在计算 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|$ 时出错．所以考生有必要提高计算能力和技巧.

例 5.9 设 A、B 为同阶方阵，

（Ⅰ）如果 A、B 相似，试证 A、B 的特征多项式相等.

（Ⅱ）举一个二阶方阵的例子说明（Ⅰ）的逆命题不成立.

（Ⅲ）当 A、B 均为实对称矩阵时，试证（Ⅰ）的逆命题成立.

［提示］ 本题主要考查两同阶方阵相似的定义以及相似的必要条件而非充分条件；两实对称方阵相似的充分必要条件，通常教科书上都有本题的证明，属基本题.

［解］（Ⅰ）设 $A\sim B$，则存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$．从而

$$\lambda E-B=\lambda E-P^{-1}AP=P^{-1}(\lambda E-A)P,$$
$$|\lambda E-B|=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|P^{-1}||\lambda E-A||P|$$
$$=|P|^{-1}|\lambda E-A||P|=|\lambda E-A|,$$

所以两个特征多项式相等.

（Ⅱ）设

$$A=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}.$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&0\\0&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a)^2,$$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-a&1\\0&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a)^2.$$

两特征多项式相等，但是 A 与 B 不相似.

事实上，$A=aE$. 对于任何可逆阵 P，均有

$$P^{-1}AP=P^{-1}aEP=aP^{-1}EP=aP^{-1}P=aE=A.$$

即 A 只与 A 相似，所以任何非 A 方阵，即使特征值与 A 相同(包括重数)，都不会与 A 相似，因而上述 B 与 A 不相似.

(Ⅲ) 设 A 与 B 为两个 n 阶实对称方阵，它们有相同的特征多项式，从而有相同的特征值(包括重数). 设为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有

$$A\sim\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

$$B\sim\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

于是存在可逆阵 P 与 Q 使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

及

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

从而

$$P^{-1}AP=Q^{-1}BQ,$$

$$QP^{-1}APQ^{-1}=B,$$

即

$$(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1})=B.$$

由于 PQ^{-1}可逆，故 $A\sim B$.

[典型错误] 有的考生对(Ⅰ)采用如下证法：“因 $A\sim B$，故 A 与B 有相同的特征值(包括重数)，所以 A 与 B 的特征多项式相等.”这实际上是一种循环证明．考生弄不清楚应是由谁证谁.

第(Ⅱ)问中要考生举出反例．说明虽然特征多项式相等但不相似．而不少考生举例说$\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}a&0\\1&a\end{bmatrix}$不相似．事实上．二阶方阵当 a 为二重特征值时．只有两个标准形：$\begin{bmatrix}a&0\\0&a\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}$．而前者只与它自己相似．其他都与$\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}$相似，所以$\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}$必与$\begin{bmatrix}a&0\\1&a\end{bmatrix}$相似．更多考生虽然举出了反例．但没有证明它们为什么不相似．显然是不完整的.

例 5.10 若矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ，试确定常数 a 的值；并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

[提示] 本题考查求矩阵的特征值，特征向量及矩阵的对角化.

[解] 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2).$$

所以，A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6$，$\lambda_3=-2$.

因为 A 可对角化(相似于对角矩阵 Λ)，所以对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 必有两个线性无关的特征向量，因此可知矩阵$6E-A$的秩为 1 (因为方程组$(6E-A)x=0$ 的基础解系向量个数为2)，从而有

$$6E-A=\begin{bmatrix}4&-2&0\\-8&4&-a\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&0&a\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

所以，$a=0$.

解方程组$(6E-A)x=0$，即 $2x_1-x_2=0$，得对应于 $\lambda=6$ 的两个线性无关的特征向量可取为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3=-2$ 时，$\lambda E-A=\begin{bmatrix}-4&-2&0\\-8&-4&0\\0&0&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

解方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases}$，得对应于 $\lambda_3=-2$ 的特征向量为

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

所以可令 $P=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{bmatrix}$，$P$ 可逆，且有

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

[典型错误] 1. 特征向量计算错误；2. 不清楚“n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件是矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量”的结论，对求 a 无从下手.

例 5.11 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，问当 k 为何值时，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵？并求出 P 和相应的对角矩阵.

[提示] 须先求出矩阵 A 的特征值，只有特征值对应的线性无关的特征向量的个数为 3 时，才存在可逆阵 P 使得$P^{-1}AP$ 为对角矩阵. P 即为以 3 个线性无关特征向量为列构成的矩阵，$P^{-1}AP$ 即为以特征值为对角线元素的对角阵.

[解] 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\k&\lambda+1&-k\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$.

可得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=-1$，有

$$(-E-A)=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\-4&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

当 $k=0$ 时，有

$$(-E-A)\to\begin{pmatrix}-4&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

对应的特征向量为 $\alpha_1=(-1,2,0)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(1,0,2)^{\mathrm T}$.

对于 $\lambda_3=1$. 有

$$(E-A)=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\k&2&-k\\-4&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

对应的特征向量为 $\alpha_3=(1,0,1)^{\mathrm T}$.

因此．当 $k=0$ 时，令

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}，则 P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

［典型错误］ 许多学生对"n 阶矩阵可相似对角化的充要条件是矩阵有 n 个线性无关的特征向量"没完全理解清楚，进而不知道这里要求秩$(-E-A)=1$，将 k 值求错.

例 5.12 已知向量 $\alpha=(1,k,1)^{\mathrm T}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，试求常数 k 的值.

［提示］ 本题主要考查 A 与 A^{-1} 特征值(向量)之间的关系.

［解］ 设 λ 是 A^{-1} 的对应于 α 的特征值，则 $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$，则 $\alpha=\lambda A\alpha$. 写得详细些，有

$$\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3+k\\2+2k\\3+k\end{pmatrix},$$

得方程组 $\begin{cases}\lambda\ (3+k)=1,\\2\lambda\ (1+k)=k.\end{cases}$ 解之，得 $\begin{cases}k_1=1,\\\lambda_1=\dfrac{1}{4},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k_2=-2,\\\lambda_2=-1.\end{cases}$

于是，k 是 1 或 -2 时，α 是 A^{-1} 的特征向量.

［典型错误］ 1. 有的考生容易把题目中 α 是 A^{-1} 的特征向量错看为 A 的特征向量. 2. 计算错误.

例 5.13 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ 可逆，向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 A^* 的一个特征向量，λ 是 α 对应的特征值，其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵. 试求 a，b 和 λ 的值.

［提示］ 本题考查了矩阵的特征值和特征向量的概念和性质. 也综合考查了伴随矩阵的概念和性质. 实际上由 $A^*\alpha=\lambda\alpha$ 两边左乘 A 就可得 $A\alpha=\dfrac{|A|}{\lambda}\alpha$. 从而得到含有 a，b 和 λ 的方程组. 从而求得 a，b 和 λ 的值.

［解］ 由于矩阵 A 可逆. 故 A^* 可逆 于是 $\lambda\neq0$，$|A|\neq0$. 在等式

$$A^*\alpha=\lambda\alpha.$$

两边同时左乘矩阵 A，得

$$AA^{*}\alpha=\lambda A\alpha,\ A\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha,$$

即

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}.$$

由此，得方程组

$$\begin{cases}3+b=\dfrac{|A|}{\lambda}, & ①\\[2mm] 2+2b=\dfrac{|A|}{\lambda}b, & ②\\[2mm] a+b+1=\dfrac{|A|}{\lambda}. & ③\end{cases}$$

由式①，②解得 $b=1$ 或 $b=-2$；由式①，③解得 $a=2$.

由于

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{vmatrix}=3a-2=4,$$

根据①式知，特征向量 α 所对应的特征值

$$\lambda=\frac{|A|}{3+b}=\frac{4}{3+b}.$$

所以，当 $b=1$ 时，$\lambda=1$；当 $b=-2$ 时，$\lambda=4$.

[典型错误] 有些同学未能想到 $AA^{*}=|A|E$，而直接利用 A 来求 A^{*} 使过程变得很复杂.

例 5.14 设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}.\ \text{又向量 }\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 将 β 用 ξ_1，ξ_2，ξ_3 线性表出；(Ⅱ)求 $A^n\beta$ (n 为自然数).

[提示] 本题考查相似矩阵的性质，运用 A 相似于对角阵去计算 A^n.

[解] (Ⅰ) 设

$$\beta=x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3=(\xi_1\xi_2\xi_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

对此方程组的增广矩阵作初等行变换

$$(\xi_1\xi_2\xi_3\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&3&8&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

得唯一解 $(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$，故有

$$\beta=2\xi_1-2\xi_2+\xi_3.$$

(Ⅱ) 解法 1 由于 $A\xi_i=\lambda_i\xi_i$，故 $A^n\xi_i=\lambda_i^n\xi_i$；因此

$$\begin{aligned}A^n\beta&=A^n(2\xi_1-2\xi_2+\xi_3)=2(A^n\xi_1)-2(A^n\xi_2)+A^n\xi_3\\&=2\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-2^{n+1}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

解法 2 记 $P=(\xi_1\xi_2\xi_3)$，则有

$$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}=P^{-1}AP，即 A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}.$$

故

$$A^n=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}^nP^{-1}.$$

从而

$$A^n\beta=P\begin{pmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{pmatrix}P^{-1}\beta=P\begin{pmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}(据(\text{I})知)$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.$$

[典型错误] 有些人没考虑到用 A 相似于对角阵去计算 A^n，也没考虑到问题(Ⅱ)可用(Ⅰ)来求，从而使计算过程变得非常复杂.

例 5.15 设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{pmatrix}$.

求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵，并计算行列式 $|A-E|$ 的值.

[提示] 本题考查矩阵对角化问题，以及如何运用矩阵相似对角化性质求行列式.

[解] 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&1\\-1&1&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2).$$

由此得矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=a+1$，$\lambda_3=a-2$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=a+1$，可得对应的两个线性无关的特征向量

$$\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm T}，\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm T}.$$

对于特征值 $\lambda_3=a-2$，可得对应的特征向量

$$\alpha_3=(-1,1,1)^{\mathrm T}.$$

令矩阵

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}，\Lambda=\begin{pmatrix}a+1&&\\&a+1&\\&&a-2\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}a+1&&\\&a+1&\\&&a-2\end{pmatrix}.$$

$$|A-E|=|P\Lambda P^{-1}-PP^{-1}|=|P|\cdot|\Lambda-E|\cdot|P^{-1}|$$

$$=\begin{vmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a-3\end{vmatrix}=a^2(a-3).$$

[典型错误] 部分考生在求 $|A-E|$ 时，只会将矩阵 A 代入，这样容易出现计算错误，而不会进行简单

变形：$|A-E|=|PAP^{-1}-PP^{-1}|=|P|\cdot|A-E|\cdot|P^{-1}|$.

例 5.16　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ B=P^{-1}A^*P,$$

求 $B+2E$ 的特征值与特征向量，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵.

[提示]　本题考查矩阵的特征值及特征向量的计算．由 A 的特征值、特征向量计算与 A 有关的某些矩阵的特征值及特征向量.

[解法 1]　由于 $|A|=7\neq 0$，所以 A 的特征值 $\lambda\neq 0$．设 η 是 A 的属于 λ 的特征向量．则 $A\eta=\lambda\eta$，故 η 是 A^{-1} 的属于 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量．又因 $A^*=|A|A^{-1}$，故 η 是 A^* 的属于 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量．由于 B 经 P 与 A^* 相似：

$$B=P^{-1}A^*P,\ \text{即}\ PBP^{-1}=A^*,$$

从而

$$PBP^{-1}\eta=A^*\eta=\frac{|A|}{\lambda}\eta,\ \text{即}\ B(P^{-1}\eta)=\frac{|A|}{\lambda}P^{-1}\eta,$$

所以 $P^{-1}\eta$ 是 B 的属于特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量.

据此，作如下一系列计算：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7),$$

知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=7$．通过计算可知 A 的属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量可取为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

属于 $\lambda_3=7$ 的一个特征向量可取

$$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

并且

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

于是 B 的属于特征值 $\frac{|A|}{\lambda_{1,2}}=7$ 的特征向量可取为

$$P^{-1}\eta_1=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

与

$$P^{-1}\eta_2=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

B 的属于特征值 $\frac{|A|}{\lambda_3}=1$ 的特征向量可取为

$$P^{-1}\eta_3=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

所以 $B+2E$ 的特征值分别为 9，9，3，属于特征值 9（二重）的特征向量全体为

$$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

其中 k_1、k_2 不同时为零，属于特征值 3 的特征向量全体为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 $k_3\neq0$.

[解法 2] 据已知条件得：

$$A^*=|A|A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix},$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

所以

$$B=P^{-1}A^*P=\begin{pmatrix}7&0&0\\-2&5&-4\\-2&-2&3\end{pmatrix},$$

$$B+2E=\begin{pmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{pmatrix}.$$

$$|\lambda E-(B+2E)|=(\lambda-9)^2(\lambda-3),$$

$B+2E$ 的属于 $\lambda_{1,2}=9$ 的特征向量全体为

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1、k_2\text{ 不同时为 }0).$$

$B+2E$ 的属于 $\lambda_3=3$ 的特征向量全体为

$$k_3\eta_3=k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ k_3\neq0.$$

[典型错误] (1) A^* 计算错，A 或 $B+2E$ 的特征值计算错.

(2) 由 A 的属于 λ 的特征向量 η 过渡到 B 的属于 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量错误地仍写成 η（实际应是 $P^{-1}\eta$）.

例 5.17 设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm T}$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}$ 都是非零向量，且满足条件 $\alpha^{\mathrm T}\beta=0$. 记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^{\mathrm T}$. 求：

（Ⅰ）A^2；（Ⅱ）矩阵 A 的特征值和特征向量.

[提示] 利用矩阵乘法的结合律以及 $\beta^{\mathrm T}\alpha$ 为一数，易计算出 A^2，利用（Ⅰ）的结论及特征值和特征向量的定义即可求出 A 的特征值和特征向量.

[解] （Ⅰ）由 $A=\alpha\beta^{\mathrm T}$ 和 $\alpha^{\mathrm T}\beta=0$，有

$$\begin{aligned}A^2=AA&=(\alpha\beta^{\mathrm T})(\alpha\beta^{\mathrm T})=\alpha(\beta^{\mathrm T}\alpha)\beta^{\mathrm T}\\&=\alpha(\alpha^{\mathrm T}\beta)^{\mathrm T}\beta^{\mathrm T}=O.\end{aligned}$$

即 A^2 为 n 阶零矩阵.

（Ⅱ）设 λ 为 A 的任一特征值，A 的属于特征值 λ 的特征向量为 x（$x\neq0$），则

$$Ax=\lambda x.$$

于是

$$A^2x=\lambda Ax=\lambda^2x.$$

因为 $A^2=O$，所以 $\lambda^2x=0$，而 $x\neq0$，故 $\lambda=0$，即矩阵 A 的特征值全为零.

不妨设向量 α、β 中分量 $a_1\neq0$，$b_1\neq0$，对齐次线性方程组 $(0E-A)x=0$ 的系数矩阵施以初等行变换：

$$-A=\begin{pmatrix}-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n\\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

由此可得该方程组的基础解系为：

$$\alpha_1=\left(-\frac{b_2}{b_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm T},\alpha_2=\left(-\frac{b_3}{b_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm T},\cdots,\alpha_{n-1}=\left(-\frac{b_n}{b_1},0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm T}.$$

于是，A 的属于特征值 $\lambda=0$ 的全部特征向量为

$$C_1\alpha_1+C_2\alpha_2+\cdots+C_{n-1}\alpha_{n-1}\quad(C_1,C_2,\cdots,C_{n-1}\text{是不全为零的任意实数}).$$

［典型错误］ 1．未能注意到 $\beta^{\mathrm T}\alpha$ 是数，因而无法想到 $(\alpha^{\mathrm T}\beta)^{\mathrm T}=\beta^{\mathrm T}\alpha$．

2．未能注意到特征向量一定非零．

3．不会求 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的基础解系．

例 5.18 设方阵 A 满足条件 $A^{\mathrm T}A=E$，其中 $A^{\mathrm T}$ 是 A 的转置矩阵，E 为单位阵．试证明 A 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1．

［提示］ 本题利用特征值、特征向量的定义，通过矩阵运算而得．

［证明］ 设 x 是 A 的实特征向量(非零!)，它所对应的特征值为 λ，故有 $Ax=\lambda x$．研究积

$$(Ax)^{\mathrm T}(Ax)=x^{\mathrm T}(A^{\mathrm T}A)x=x^{\mathrm T}Ex=x^{\mathrm T}x\quad(\text{据已知}),$$

因此，有

$$x^{\mathrm T}x=(\lambda x)^{\mathrm T}(\lambda x)=\lambda^2x^{\mathrm T}x.$$

即

$$(1-\lambda^2)x^{\mathrm T}x=0.\qquad(*)$$

由于 $x^{\mathrm T}x=\|x\|^2>0$，故 $1-\lambda^2=0$，即 $|\lambda|=1$．

［典型错误］ 仅写出 $Ax=\lambda x$，不知道两边转置．反映出学生证明方法的缺乏．

例 5.19 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，求 A．

［提示］ 利用实对称矩阵不同特征值所对应的特征向量相互正交，求出 λ_2 对应的线性无关的特征向量，然后进行正交化、单位化得到正交阵 P．利用 $A=P\Lambda P^{\mathrm T}$ 即可．

［解］ 对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 有两个线性无关的特征向量，设为 ξ_2、ξ_3，它们都与 ξ_1 正交，故应有

$$\xi_1^{\mathrm T}\xi=(0\ 1\ 1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2+x_3=0.$$

分别取 $x_1=1$，0，得

$$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

由于 ξ_2 与 ξ_3 已正交，故只需将 ξ_1，ξ_2，ξ_3 单位化，得

$$p_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\ p_2=\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ p_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\ \frac{-1}{\sqrt2}\end{pmatrix}.$$

求出 $P=(p_1p_2p_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=P^{\mathrm{T}}$. 因此

$$A=P\Lambda P^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

[典型错误] (1)不知道去求 λ_2 的线性无关特征向量；(2)没有将 ξ_1，ξ_2，ξ_3 正交化、单位化.

例 5.20　设三阶实对称矩阵 A 的特征值是 1，2，3；矩阵 A 的属于特征值 1，2 的特征向量分别是 $\alpha_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅰ)求 A 的属于特征值 3 的特征向量；(Ⅱ)求矩阵 A.

[提示]　本题主要考查实对称矩阵的性质、属于不同特征值的特征向量相互正交，由此可解出属于 3 的特征向量(不是唯一的).

[解]　(Ⅰ) 设 A 的属于特征值 3 的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$. 因为 A 为实对称阵，属于不同特征值的特征向量必正交，故有方程组

$$\begin{cases}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_3=-x_1-x_2+x_3=0,\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_3=x_1-2x_2-x_3=0.\end{cases}\tag{*}$$

它的基础解系为 $\varepsilon=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；故 A 的属于特征值 3 的特征向量为 $\alpha_3=k(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ (k 为不等于零的任意常数).

(Ⅱ) 如果记 $P=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$，则应有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，故

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}.\tag{**}$$

易求得

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{6}\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.\tag{***}$$

把(***)代入(**)，求得

$$A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}.$$

[典型错误] (1)未能注意到实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交，从而无法入手. (2)P^{-1}计算错误.

例 5.21　设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值. 若 $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(-1,2,-3)^{\mathrm{T}}$ 都是 A 的属于特征值 6 的特征向量.

(Ⅰ) 求 A 的另一特征值和对应的特征向量；

(Ⅱ) 求矩阵 A.

[提示] 本题主要考查实对称矩阵对角化的逆问题. 由 $r(A)=2$. 可知 A 的另一特征值为 $\lambda_3=0$. 由实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交，求出属于特征值 0 的特征向量，于是可求出矩阵 A.

[解法 1] (Ⅰ) 由 $r(A)=2$, 知 $|A|=0$, 所以 A 的另一特征值 $\lambda_3=0$. 由题设知 $\alpha_1=(1,1,0)^T$, $\alpha_2=(2,1,1)^T$ 为 A 的属于特征值 6 的线性无关特征向量. 设属于 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$, 则有 $\alpha_1^T\alpha=0$, $\alpha_2^T\alpha=0$, 即

$$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ 2x_1+x_2+x_3=0, \end{cases}$$

解得此方程组的基础解系为$(-1,1,1)^T$. 即 A 的属于特征值 $\lambda_3=0$ 的全部特征向量为

$$k\alpha=k(-1,1,1)^T \quad (k \text{ 为任意非零常数}).$$

(Ⅱ) 令矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha)$, 则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

所以

$$A=P\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

[解法 2] 由 $r(A)=2$. 知 $|A|=0$, 所以 A 的另一特征值 $\lambda_3=0$. 设

$$A=\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}.$$

由 $A\alpha_i=6\alpha_i$, $i=1$, 2, 以及 $a+b+c=12$. 建立方程组，可以求出 A，然后再求属于 0 的特征向量.

[典型错误] 解法 1 中部分考生不知道实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交这一事实.

解法 2 中往往丢掉了方程 $a+b+c=12$. 从而不能够求出 A，有的考生甚至在求 P^{-1}时出现错误. 本题得分率较低.

例 5.22 设矩阵 A 与 B 相似，且

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)求 a, b 的值; (Ⅱ)求可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$.

[提示] 矩阵 A 与 B 相似，即它们有相同的特征多项式，由此，可求出 a 和 b，也可以利用它们具有相同的迹和行列式. 可逆矩阵 P 即为特征值 2 和 b 对应的线性无关特征向量构成的矩阵.

[解] (Ⅰ) 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-2)[\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1)].$$

由于 A 与 B 相似. 故 A 与 B 有相同的特征值: $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=b$. 由于 2 是 A 的二重特征值. 故 2 应是下列方程的根

$$\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1)=0. \qquad (*)$$

把 $\lambda=2$ 代入(*)，求得 $a=5$.

再把 $a=5$ 代入(*)，有 $\lambda^2-8\lambda+12=0$，求得 $b=\lambda_3=6$.

(Ⅱ) 当 $\lambda=2$ 时，可由方程组 $(2E-A)x=0$，求得属于它的特征向量 $\alpha_1=(1,-1,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$.

当 $\lambda=6$ 时，可由方程组 $(6E-A)x=0$，求得属于它的特征向量 $\alpha_3=(1,-2,3)^T$.

令 $P=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=B$.

[典型错误] 部分考生把 A 的特征多项式计算错了，还有一些考生将特征向量求错.

例 5.23 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 已知 A 的一个特征值为 3，试求 y;

(Ⅱ) 求矩阵 P，使 $(AP)^T(AP)$ 为对角矩阵.

[提示] (1) 将 A 的特征多项式表达出来. 将特征值 3 代入就可求出 y 的值.

(2) 注意到 $A^T=A$，从而 $A^2=A^TA$. 我们可以通过合同变换求出矩阵 P，使得 P^TA^2P 为对角阵. 另外，我们也可通过求可逆矩阵 Q，使得 $Q^{-1}A^2Q$ 为对角阵，再将 Q 的列向量组进行正交单位化得到矩阵 P.

[解] (Ⅰ) 因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\-1&\lambda&0&0\\0&0&\lambda-y&-1\\0&0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda^2-1)[\lambda^2-(y+2)\lambda+(2y-1)]=0,$$

把 A 的特征值 $\lambda=3$ 代入上式，得 $y=2$. 于是

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}. \qquad (*)$$

(Ⅱ) 由 $A^T=A$，得 $(AP)^T(AP)=P^TA^2P$，而矩阵

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}.$$

以下用两种方法求出矩阵 P:

1° 由对应于 A^2 的二次型

$$\begin{aligned}x^TA^2x&=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4\\&=x_1^2+x_2^2+5\left(x_3+\frac{4}{5}x_4\right)^2+\frac{9}{5}x_4^2\\&=y_1^2+y_2^2+5y_3^2+\frac{9}{5}y_4^2,\end{aligned} \qquad (**)$$

其中 $y_1=x_1$，$y_2=x_2$，$y_3=x_3+\frac{4}{5}x_4$，$y_4=x_4$. 即

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3-\frac{4}{5}y_4\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}\xlongequal{\triangle}Py. \qquad (***)$$

把(＊＊＊)代入(＊＊)．则有

$$x^{\mathrm{T}}A^2x=(Py)^{\mathrm{T}}A^2(Py)=y^{\mathrm{T}}(AP)^{\mathrm{T}}(AP)y$$
$$=y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&\frac{9}{5}\end{pmatrix}y.$$

即求得 $P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&\frac{-4}{5}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，使得$(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&\frac{9}{5}\end{pmatrix}$为对角矩阵．

2° 由 A^2 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，$\lambda_4=9$，分别求出对应于它们的特征向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

经正交单位化．得

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}.$$

令 $P=(p_1\quad p_2\quad p_3\quad p_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{-1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\0&0&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$.

则有

$$(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=P^{\mathrm{T}}A^2P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}.$$

［典型错误］ 关键是第二问，很多学生只想到了将 $A^{\mathrm{T}}A=A^2$ 相似对角化，而忽视了将特征向量正交单位化，有些学生想到了这一点，但计算公式不熟，出现计算错误．有些考生不会将问题转化成二次型问题．

例 5.24 已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量．

（Ⅰ）试确定参数 a，b 及特征向量 ξ 所对应的特征值；

(Ⅱ) 问 A 能否相似于对角阵？说明理由．

［提示］ 设特征向量 ξ 所对应的特征值为 λ，则 $(\lambda E-A)\xi=0$．这是一个含 λ、a 和 b 的方程组．由此可解出 λ、a 和 b．A 能否相似于对角阵取决于 A 是否存在 3 个线性无关的特征向量．求出 A 的所有特征值并弄清有几个线性无关的特征向量即可判定．

［解］ (Ⅰ) 据定义，有 $A\xi=\lambda\xi$．故

$$(A-\lambda E)\xi=\begin{pmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & a-\lambda & 3\\ -1 & b & -2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}，\text{即}\begin{cases}(2-\lambda)-1-2=0,\\ 5+(a-\lambda)-3=0,\\ -1+b+(2+\lambda)=0.\end{cases}$$

解之，得 $\lambda=-1$，$a=-3$，$b=0$．

(Ⅱ) 据(Ⅰ)，$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$，它的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3.$$

即 $\lambda_0=-1$ 是三重特征值，且由于秩

$$r(\lambda_0E-A)=r(A+E)=2,$$

因而方程组 $(A+E)x=0$ 的解空间是一维的，故 A 不能相似于对角阵．

［典型错误］ 部分考生说不清楚可相似于对角阵的原因，有的说因为只有一个特征值．有的未说明三重特征值 $\lambda=-1$．只对应了一个线性无关特征向量的理由．

例 5.25　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，已知 A 有三个线性无关的特征向量．$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值．试求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵．

［提示］ 因为 A 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值．所以．A 对应于 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量有两个，故秩 $(2E-A)=1$，对矩阵 $2E-A$ 作适当的初等行变换，通过秩 $(2E-A)=1$ 确定出 x 和 y，从而确定出 A．再求可逆矩阵 P 使 PAP^{-1} 为对角形．

［解］ 因为 A 有三个线性无关的特征向量．$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，所以 A 的对应于 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量有两个．故秩 $(2E-A)=1$．经过行的初等变换，

$$2E-A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -x & -2 & -y\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & x-2 & -x-y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

于是，解得 $x=2$，$y=-2$．

矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix},$$

其特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6).$$

由此得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$．$\lambda_3=6$．

对于特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$．解线性方程组 $(2E-A)x=0$，有

$$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对应的特征向量为 $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T$，$\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$.

对于特征值 $\lambda_2 = 6$，解线性方程组 $(6E - A)x = 0$，有

$$\lambda_3 E - A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对应的特征向量为 $\alpha_3 = (1, -2, 3)^T$.

令
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}，则 P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

[典型错误] 许多学生没有理解特征值的 λ 重数与矩阵 $\lambda E - A$ 的秩之间的关系从而无法正确求出 x，y，当然矩阵 P 就很难求出. 还有些考生在求 α_1，α_2 时没有注意到要求它们线性无关.

例 5.26 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

[提示] 本题主要考查矩阵的特征值、特征向量以及相似对角化. 先求出矩阵 A 的特征多项式，根据它有一个二重根求出 a 的值.

[解] 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 3 \\ -1 & -1 - a & \lambda - 5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a).$$

(Ⅰ) 若 $\lambda = 2$ 是特征方程的二重根，则有

$$2^2 - 16 + 18 + 3a = 0,$$

解得 $a = -2$.

当 $a = -2$ 时，矩阵 A 的特征值为 2，2，6，矩阵

$$2E - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

的秩为 1. 故线性方程组 $(2E - A)x = 0$ 的基础解系包含两个向量，即 $\lambda = 2$ 对应的线性无关的特征向量有两个，于是矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量，从而 A 可相似对角化.

(Ⅱ) 若 $\lambda = 2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a$ 为完全平方，所以有 $18 + 3a = 16$，解得 $a = -\frac{2}{3}$.

当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，A 的特征值为 2，4，4．矩阵

$$4E-A=\begin{pmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix},$$

其秩为 2，故线性方程组 $(4E-A)x=0$ 的基础解系只包含 1 个解向量，所以，此时矩阵 A 不可相似对角化．

［典型错误］ 主要错误有：

1．只求出 $a=-\frac{2}{3}$，而没有解得 a 的另一个解．

2．在讨论 A 是否可对角化时花了不少时间去求特征向量，结果花了大量时间仍不能得到正确的结论．表明他们不会用矩阵 $\lambda_i E-A$ 的秩作判定，也表明他们对齐次方程组解的结构理解不深．

例 5.27 已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x，使得向量组 x，Ax，A^2x 线性无关，且满足 $A^3x=3Ax-2A^2x$．（Ⅰ）记 $P=(x,Ax,A^2x)$，求 3 阶矩阵 B，使 $A=PBP^{-1}$；（Ⅱ）计算行列式 $|A+E|$．

［提示］ 本题主要考查将一个矩阵关系式转变成一个线性方程组并解之以及利用相似关系（或特征值）求行列式．

［解法 1］ （Ⅰ）设 $B=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$，则由 $AP=PB$ 得

$$(Ax,A^2x,A^3x)=(x,Ax,A^2x)\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}.$$

上式可写为

$$Ax=a_1x+b_1Ax+c_1A^2x, \quad ①$$

$$A^2x=a_2x+b_2Ax+c_2A^2x, \quad ②$$

$$A^3x=a_3x+b_3Ax+c_3A^2x. \quad ③$$

将 $A^3x=3Ax-2A^2x$ 代入(3)式得

$$3Ax-2A^2x=a_3x+b_3Ax+c_3A^2x. \quad ④$$

由于 x，Ax，A^2x 线性无关，故

由①式可得 $a_1=c_1=0$，$b_1=1$；

由②式可得 $a_2=b_2=0$，$c_2=1$；

由④式可得 $a_3=0$，$b_3=3$，$c_3=-2$；

从而
$$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 A 与 B 相似，故 $A+E$ 与 $B+E$ 相似．从而

$$|A+E|=|B+E|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4.$$

［解法 2］ （Ⅰ）利用 $A^3x=3Ax-2A^2x$，有

$$A[x,Ax,A^2x]=[Ax,A^2x,A^3x]=[Ax,A^2x,3Ax-2A^2x]$$
$$=[x,Ax,A^2x]\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}\xlongequal{\Delta}P\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix},$$

因 x，Ax，A^2x 线性无关，所以 P 可逆，故

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix}.$$

(Ⅱ) 同解法 1

[典型错误] (1) 将数字运算规律乱用到矩阵运算中．由条件 $A^3x+2A^2x-3Ax=0$ 得 $A(A-E)(A+3E)x=0$．认为 $A(A-E)(A+3E)=O$，再认为 $A=O$ 或 $A=-3E$．

(2) 想到 $A=PBP^{-1}$ 就误认为一定是对角矩阵．

例 5.28　设 A 为三阶矩阵，α_1，α_2，α_3 是线性无关的三维列向量，且满足

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3.$$

(Ⅰ) 求矩阵 B，使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；

(Ⅱ) 求矩阵 A 的特征值；

(Ⅲ) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵．

[提示] 本题考查矩阵的分块乘法；相似矩阵有相同的特征值以及特征值的求法；矩阵的相似对角化．

[解] (Ⅰ) 由题设条件，有

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}.$$

可知

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 因为 α_1，α_2，α_3 是线性无关的三维列向量，可知矩阵 $C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，所以 $C^{-1}AC=B$，即矩阵 A 与 B 相似．由此可得矩阵 A 与 B 有相同的特征值．

由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0.$$

得矩阵 B 的特征值，也即矩阵 A 的特征值

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=4.$$

(Ⅲ) 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(E-B)x=0$，得基础解系

$$\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm T},\ \xi_2=(-2,0,1)^{\mathrm T};$$

对应于 $\lambda_3=4$，解齐次线性方程组 $(4E-B)x=0$，得基础解系

$$\xi_3=(0,1,1)^{\mathrm T}.$$

令矩阵

$$Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

则

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

因 $Q^{-1}BQ=Q^{-1}C^{-1}ACQ=(CQ)^{-1}A(CQ)$，记矩阵

$$P=CQ=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=(-\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3),$$

故 P 即为所求的可逆矩阵.

[典型错误] 主要有些考生概念不清楚；有些考生根本就不知道如何去求. 大多数考生错在计算. 还有些考生把 Q 求出之后就误认为它即是所求的 P.

例 5.29 设 3 阶实对角矩阵 A 的各行元素之和均为 3. 向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$, $\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(Ⅰ) 求 A 的特征值与特征向量；

(Ⅱ) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ, 使得 $Q^TAQ=\Lambda$.

[提示] 本题(Ⅰ)要求解实对称矩阵 A 的特征值与特征向量. 但 A 是未知的，需要利用题设条件在不必求出 A 的情况也能解出来. 当然若先求出矩阵 A, 其他自然也能解出，只是工作量稍大. 问题(Ⅱ)是(Ⅰ)的延续，将特征向量正交化、单位化即得 Q.

[解] (Ⅰ) 由于矩阵 A 的各行元素之和均为 3. 所以

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

因为 $A\alpha_1=0$, $A\alpha_2=0$, 即 $A\alpha_1=0\alpha_1$, $A\alpha_2=0\alpha_2$,
故 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 是 A 的二重特征值, α_1, α_2 为 A 的属于特征值 0 的两个线性无关特征向量；$\lambda_3=3$ 是 A 的一个特征值；$\alpha_3=(1,1,1)^T$ 为 A 的属于特征值 3 的特征向量.

总之, A 的特征值为 0, 0, 3. 属于特征值 0 的全体特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ (k_1,k_2 不全为零), 属于特征值 3 的全体特征向量为 $k_3\alpha_3$ ($k_3\neq0$).

另一个解法是：设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},$$

由题设条件及 $A\alpha_1=0$, $A\alpha_2=0$, 有

$$\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=3,\\a_{12}+a_{22}+a_{23}=3,\\a_{13}+a_{23}+a_{33}=3;\\-a_{11}+2a_{12}-a_{13}=0,\\-a_{12}+2a_{22}-a_{23}=0.\\-a_{13}+2a_{23}-a_{33}=0,\\-a_{12}+a_{13}=0,\\-a_{22}+a_{23}=0,\\-a_{23}+a_{33}=0.\end{cases}$$

解此方程组, 便得

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

从而有
$$0=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3).$$

即 $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=3$ 是矩阵 A 的特征值. α_1, α_2 是 A 对应于 λ_1, λ_2 的两个线性无关的特征向量. 故对应于特征值 0 的全体特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ (k_1,k_2 不全为零)；对应于 $\lambda_3=3$ 的特征向量 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 满足方程组

$$\begin{cases} -x_1+2x_2-x_3=0, \\ \quad\; -x_2+x_3=0, \end{cases}$$

不难解得其基础解系 $\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，从而对应于 λ_3 的全体特征向量为 $k_3\alpha_3$ ($k_3\neq 0$).

(Ⅱ) 对 α_1、α_2 正交化. 令 $\xi_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$,

$$\xi_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\xi_1)}{(\xi_1,\xi_1)}\xi_1=\frac{1}{2}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

再分别将 ξ_1，ξ_2，α_3 单位化，得

$$\beta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix},$$

那么 Q 为正交矩阵，且 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$.

[典型错误] (1)不会直接求特征值 $\lambda_3=3$，只会先求 A、再求其它的解法；(2)忘了将 α_1，α_2，α_3 正交化、单位化、写成 $Q=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$；(3)$Q$ 中列向量的顺序与 Λ 中特征值顺序不对应.

考生只需认真一些，后两个错误是可以避免的.

例 5.30 某试验性生产线每年 1 月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工. 设第 n 年 1 月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n，记成向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式：$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$；

(Ⅱ) 验证 $\eta_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

(Ⅲ) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 时，求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

[提示] 本题考查用线性代数处理应用问题的能力. 求矩阵的特征值，特征向量以及矩阵的对角化.

[解] (Ⅰ) $\begin{cases} x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right), \\ y_{n+1}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right). \end{cases}$

化简得

$$\begin{cases} x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n, \\ y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n. \end{cases}$$

即
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}，于是\ A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）令 $P=(\eta_1,\eta_2)=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则由 $|P|=5\neq 0$ 知，η_1，η_2 线性无关.

因 $A\eta_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\eta_1$，故 η_1 为 A 的特征向量，且相应的特征值 $\lambda_1=1$.

因 $A\eta_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\eta_2$，故 η_2 为 A 的特征向量，且相应的特征值 $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

（Ⅲ）$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

由
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}，有\ A=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

于是
$$A^n=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1}=P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

又
$$P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

故
$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

[典型错误]（1）式列错．且不会利用第二问来纠正．

（2）不会验证特征向量，宁可去求特征向量．

（3）将 A 对角化后，应该是 $A^n=P\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}P^{-1}$，但不少考生却写成 $A^n=\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$.

六、二次型

·考试内容与要求·

考试内容(数学(一)与数学(二))

二次型及其矩阵表示　合同变换与合同矩阵　二次型的秩　惯性定理　二次型的标准形和规范形　用正交变换和配方法化二次型为标准形　二次型及其矩阵的正定性

考试要求(数学(一))