即
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}，于是 A = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）令 $P=(\eta_1,\eta_2)=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则由 $|P|=5\neq 0$ 知，η_1，η_2 线性无关.

因 $A\eta_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\eta_1$，故 η_1 为 A 的特征向量，且相应的特征值 $\lambda_1=1$.

因 $A\eta_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\eta_2$，故 η_2 为 A 的特征向量，且相应的特征值 $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

（Ⅲ）$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}=\cdots=A^n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

由
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}，有 A=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

于是
$$A^n=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1}=P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

又
$$P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

故
$$A^n=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

因此
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

[典型错误]（1）式列错．且不会利用第二问来纠正．

（2）不会验证特征向量，宁可去求特征向量．

（3）将 A 对角化后，应该是 $A^n=P\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}P^{-1}$，但不少考生却写成 $A^n=\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}$.

六、二次型

·考试内容与要求·

考试内容(数学(一)与数学(二))

二次型及其矩阵表示　合同变换与合同矩阵　二次型的秩　惯性定理　二次型的标准形和规范形　用正交变换和配方法化二次型为标准形　二次型及其矩阵的正定性

考试要求(数学(一))

1. 掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型秩的概念，了解合同变换和合同矩阵的概念，了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理.

2. 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形.

3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法.

考试要求(数学(二))

1. 了解二次型的概念，会用矩阵形式表示二次型，了解合同变换和合同矩阵的概念.

2. 了解二次型的秩的概念，了解二次型的标准形、规范形等概念，了解惯性定理，会用正交变换和配方法化二次型为标准形.

3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法.

·考试内容解析·

(一) 基本概念

1. 二次型及其矩阵

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = a_{11}x^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{22}x_2^2 \quad + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ &\qquad\qquad\qquad + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为一个 n 元二次型. 当系数 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$为实数时，称为实二次型，简称二次型. 线性代数一般只讨论实二次型.

如果记 $a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，则二次型的矩阵形式为

$$f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax,$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$为 n 阶实对称矩阵. A 称为二次型的矩阵，A 的秩 $r(A)$称为二次型 f 的秩.

2. 二次型的标准形和规范形

若二次型中只含有变量的平方项，即

$$f(x)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2,$$

其中 d_i $(i=1,2,\cdots,n)$为实数，则该二次型称为标准形.

若标准形中系数 d_i $(1\leqslant i\leqslant n)$为 -1、0 或 1，即

$$f(x)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_r^2\ (r\leqslant n),$$

则称该二次型为规范形.

3. 矩阵合同

设 A，B 为 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 C，使得

$$B=C^{\mathrm{T}}AC,$$

则称 A 与 B 合同，记作 $A\simeq B$. 这种对 A 的运算叫做 A 的合同变换.

矩阵合同具有反身性；对称性；传递性.

(二) 化二次型为标准形或规范形

(1) 经可逆线性变换，原二次型的矩阵与新二次型的矩阵合同.

(2) 任意一个实二次型经可逆线性变换可化为标准形. 此结论也可叙述为：任一实对称矩阵都与一个对角阵合同.

(3) 任意一个实二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$，可经过正交变换 $x=Qy$ 化成标准形 $f(x)=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值.

(4) 惯性定理　任一实二次型都可以经可逆线性变换化为规范形，且规范形是唯一的.

在二次型的规范形中，正项项数 p，负项项数 $r-p$ 是唯一确定的. p 称为正惯性指数，$r-p$ 称为负惯性指数，r 为二次型的秩. $p-(r-p)=2p-r$ 称为符号差.

惯性定理也可叙述为：任一实对称矩阵 A 与对角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

合同．其中主对角线元素中 1 的个数为正惯性指数 p，-1 的个数为负惯性指数 $r-p$.

（三）正定二次型和正定矩阵

1．正定二次型

对于二次型 $f(x)=x^{T}Ax$，如果对任意的 $x\neq 0$，都有 $x^{T}Ax>0$，则称该二次型为正定二次型．此时 A 称为正定矩阵.

2．二次型正定的充要条件

设二次型 $f(x)=x^{T}Ax$，则以下结论是等价的：

(1) f 的正惯性指数为 n，

(2) A 与 E 合同．即存在可逆矩阵 C 使得 $C^{T}AC=E$.

(3) A 的所有特征值都大于零.

(4) A 的各顺序主子式都大于零.

(5) 存在可逆矩阵 C，使得 $A=C^{T}C$.

(6) A 是正定矩阵.

•例 题 详 解•

例 6.1 已知二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，则常数 c 等于________.

[答案] 3.

[提示] 本题主要考查二次型的秩即为对应矩阵的秩以及当矩阵的秩小于矩阵的阶数时其行列式为零.

[解] 二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}.$$

由 $r(A)=2$ 知 $|A|=0$，即 $24c-72=0$．解之得 $c=3$.

[典型错误] 把二次型的矩阵写错.

例 6.2 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_3$，则 f 的正惯性指数为________.

[答案] 2.

[提示] 把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形，或求出特征值．正特征值个数即为正惯性指数.

[解法 1] 利用二次型的正惯性指数是其矩阵的正特征值个数.

由于二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$A$ 的特征方程是

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-2)=0,$$

故 A 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\sqrt{2}$，$\lambda_3=-\sqrt{2}$．从而 A 有两个正特征值．因此，二次型 f 的正惯性指数为 2．

[解法 2] 利用配方法化为标准形后得出正惯性指数．

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_3=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-(x_2^2-2x_2x_3)$$
$$=(x_1+x_2)^2-(x_2-x_3)^2+x_3^2=y_1^2-y_2^2+y_3^2,$$

其中 $y_1=x_1+x_2$，$y_2=x_2-x_3$，$y_3=x_3$，即

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

由于这个线性变换是可逆的，故由惯性定理知，二次型 f 的正惯性指数为 2．

例 6.3 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是________．

[答案] $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 或 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$．

[提示] 若 f 是正定的，则二次型 f 对应的矩阵的各阶顺序主子式大于零．

[解]

二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&\frac{t}{2}\\0&\frac{t}{2}&1\end{pmatrix}$，$f$ 为正定的充要条件是 A 的顺序主子式大于零，即

$D_1=2>0$，$D_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0$，$D_3=|A|=1-\dfrac{t^2}{2}>0$．即 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$．

例 6.4 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为________．

[答案] 2．

[提示] 本题主要考查学生是否掌握二次型的秩就是矩阵的秩，以及如何求矩阵的秩、如何用可逆的线性变换把二次型化成标准形．

[解法 1] 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

对 A 施以初等变换得
$$A\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

从而 $r(A)=2$，即二次型的秩为 2．

[解法 2] 对二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 做非奇异的线性变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

化成一个与它等价的二次型 $2y_1^2+\dfrac{3}{2}y_2^2$．由等价的二次型有相同的秩，二次型的秩为 2．

[典型错误] 对二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 作了不可逆的线性变换 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 得二次型 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$，导致部分学生填 3．

例 6.5 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$，则 $a=$________．

[答案] 2.

[提示] 本题主要考查二次型的标准形与其对应的实对称矩阵的特征值之间的关系.

[解法 1] 经正交变换化成标准形 $f=6y_1^2$，知 f 所对应的实对称矩阵的特征值应为 6，0，0. 另一方面，该实对称矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix},$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-a & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-a \end{vmatrix}$$
$$=[\lambda-(a+4)][\lambda-(a-2)]^2=0,$$

知 $a+4=6$，$a-2=0$. 所以 $a=2$.

[解法 2] 由标准形 $f=6y_1^2$，得 A 的秩应为 1. 为此计算 A 的行列式

$$|A|=(a+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=(a-2)^2(a+4).$$

令 $|A|=0$ 得 $a=2$ 或 $a=-4$. 当 $a=2$ 时，秩 $r(A)=1$. 当 $a=-4$ 时，秩 $r(A)=2$. 所以 $a=2$.

[典型错误] 在解法 1 中，把 $a-2=6$ 即 $a=8$ 也理解为符合要求的答案；在解法 2 中认为 $a=-4$ 也是一个答案. 没有回头验算一下秩看是否符合要求.

例 6.6 设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则 A 与 B.

(A) 合同且相似.　　(B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似.　　(D) 不合同且不相似.

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查判定两个实对称矩阵相似与合同的充分必要条件.

[解] 两个同阶实对称矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的特征值及重数；两个同阶实对称矩阵合同的充分必要条件是它们有相同的秩及相同的正惯性指数. 考生只要掌握了上面两条定理，再通过计算便知，A 有特征值 4，0，0，0；B 也有特征值 4，0，0，0，可见 $A\sim B$，且 A 与 B 的秩都是 1，正惯性指数也都是 1，故 A 与 B 合同.

[典型错误] 选(B)，(C)的都有. 原因主要是不知如何去判断.

例 6.7 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3.$$

(Ⅰ) 写出二次型 f 的矩阵表达式；

(Ⅱ) 用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵.

[提示] 这是一道常规题，先求二次型的矩阵 A，再求 A 的特征值(向量)，正交化单位化得正交矩阵 Q.

[解] (Ⅰ) f 的矩阵表达式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=x^{\mathrm T}Ax.$$

（Ⅱ）二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{bmatrix}$.

A 的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&2\\-2&\lambda-4&-4\\2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-36)=0.$$

其特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=6$，$\lambda_3=-6$.

二次型的标准形为

$$f=y_1^2+6y_2^2-6_3^2. \qquad (*)$$

以下求出对应于每一特征值的特征向量：

① 对应于 $\lambda_1=1$，有$(\lambda_1E-A)x=0$，而

$$\lambda_1E-A=E-A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-3&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

同解方程组为$\begin{cases}x_1=-2x_3,\\x_2=0,\end{cases}$对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$. 仿上求得：

② 对应于 $\lambda_2=6$ 的特征向量 $\alpha_2=(1,5,2)^{\mathrm{T}}$；

③ 对应于 $\lambda_3=-6$ 的特征向量 $\alpha_3=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$.

由于 A 为实对称矩阵．且 α_1、α_2，α_3 分别属于不同的特征值．故其为正交向量组．将其单位化，得

$$p_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\0\\\frac{-1}{\sqrt5}\end{pmatrix},\quad p_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\\\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}\end{pmatrix},\quad p_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{-1}{\sqrt6}\\\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}.$$

由此可得正交矩阵

$$P=(p_1p_2p_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{5}{\sqrt{30}}&\frac{-1}{\sqrt6}\\\frac{-1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix},$$

对二次型 f 作正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，则可将 f 化为标准形（$*$）.

［典型错误］ 计算错误，特征值或特征向量求错，或特征向量没有单位化.

例 6.8　设 A 为 n 阶实对称矩阵，秩$(A)=n$，A_{ij}是 $A=(a_{ij})_{n\times n}$中元素 a_{ij}的代数余子式($i,j=1,2,\cdots,n$)，二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j.$$

（Ⅰ）记 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$写成矩阵形式，并证明二次型 $f(x)$的矩阵为 A^{-1}；

（Ⅱ）二次型 $g(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 与 $f(x)$的规范形是否相同？说明理由.

[提示] 本题主要考查 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 与 A^* 的定义以及合同矩阵有相同的规范形.

[解法 1] (Ⅰ) 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式为

$$f(x)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

因秩$(A)=n$，故 A 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*.$$

从而

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}.$$

即 A^{-1} 也是实对称矩阵，因此二次型 $f(x)$ 的矩阵为 A^{-1}.

(Ⅱ) 因为

$$(A^{-1})^T AA^{-1}=(A^T)^{-1}E=A^{-1},$$

所以 A 与 A^{-1} 合同，于是 $g(x)=x^TAx$ 与 $f(x)$ 有相同的规范形.

[解法 2] (Ⅰ) 同解法 1.

(Ⅱ) 对二次型 $g(x)=x^TAx$ 作可逆线性变换 $x=A^{-1}y$，其中 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，

$$\begin{aligned}g(x)=x^TAx&=(A^{-1}y)^TA(A^{-1}y)=y^T(A^{-1})^TAA^{-1}y\\&=y^T(A^T)^{-1}AA^{-1}y=y^TA^{-1}y.\end{aligned}$$

由此得知 A 与 A^{-1} 合同. 于是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 必有相同的规范形.

[典型错误] (1) 忘记说明 A^{-1} 是对称矩阵；(2)不能证明 A 与 A^{-1} 合同.

例 6.9 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0),$$

通过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

[提示] 本题考查二次型正交变换前后对应矩阵特征值的关系，由此可得参数的值. 通过求特征向量，将其正交化、单位化，即可得正交变换矩阵.

[解] 二次型 f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$，特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-a\\0&-a&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0.$$

由 f 的标准形可见，A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$. 将 $\lambda_1=1$ (或 $\lambda_3=5$)代入特征方程，得 $a^2-4=0$，$a=\pm2$. 因 $a>0$，故取 $a=2$.

此处也可根据 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，得 $\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{vmatrix}=1\times2\times5$，即 $9-a^2=5$，所以 $a=\pm2$. 因为 $a>0$，故 $a=2$. 此时，

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}.$$

以下逐一求出对应于每一特征值的特征向量，并将其正交化、单位化：

(i) $\lambda_1=1$ 时，由$(E-A)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$，解得对应的特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$；

(ii) $\lambda_2=2$ 时，由 $(2E-A)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$，解得对应的特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；

(iii) $\lambda_3=5$ 时，由 $(5E-A)x=0$，即

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$，解得对应的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

将 ξ_1，ξ_2，ξ_3 单位化，得

$$p_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{-1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\quad p_2=\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad p_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}.$$

故所用的正交变换矩阵

$$P=(p_1p_2p_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{-1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}.$$

[典型错误] 缺乏对二次型经过正交变换化成标准形后，标准形中系数为特征值的了解；求特征向量发生计算错误；没有将 ξ_1，ξ_2，ξ_3 单位化.

例 6.10 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(Ⅰ) 求 a 的值；(Ⅱ) 求正交变换 $x=Qy$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形；

(Ⅲ) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

[提示] 本题考查二次型矩阵的相关性质，用正交变换化二次型为标准形，以及使该二次型为 0 的向量. 通过矩阵行列式为零求参数 a；用常规方法求正交变换；把 f 化为标准形后可求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

[解] (Ⅰ) 由于二次型 f 的秩为 2，对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 的秩为 2，所以有 $\begin{vmatrix}1-a&1+a\\1+a&1-a\end{vmatrix}=-4a=0$，得 $a=0$.

(Ⅱ) 当 $a=0$ 时，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\ |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\lambda,$$

可知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$.

A 的属于 $\lambda_1=2$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_1=(1,1,0)^{\mathrm T},\ \eta_2=(0,0,1)^{\mathrm T};$$

A 的属于 $\lambda_3=0$ 的线性无关的特征向量为

$$\eta_3=(-1,1,0)^{\mathrm T}.$$

易见 η_1，η_2，η_3 两两正交．将 η_1，η_2，η_3 单位化，得

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ e_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\ e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

取 $Q=(e_1,e_2,e_3)$，则 Q 为正交矩阵．

令 $x=Qy$，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2=2y_1^2+y_2^2.$$

（Ⅲ）［解法 1］ 在正交变换 $x=Qy$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 化成 $2y_1^2+2y_2^2=0$．解之得 $y_1=y_2=0$，从而

$$x=Q\begin{pmatrix}0\\0\\y_3\end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}0\\0\\y_3\end{pmatrix}=y_3e_3=k(-1,1,0)^{\mathrm{T}}，其中 k 为任意常数．$$

［解法 2］ 由于 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0$．所以

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_3=0,\end{cases}$$

其通解为 $x=k(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数．

［典型错误］ 二次型对应矩阵写错；特征向量没有单位化；（Ⅱ）中 e_1、e_2、e_3 的次序没有与 f 的标准形中系数 λ_1，λ_2，λ_3 对应；直接在原二次型（含参数 a）中令 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 将 x_3 表成 x_1，x_2 的表达式．

例 6.11 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

的秩为 2．

（Ⅰ）求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值．

（Ⅱ）指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面．

［提示］ 本题是线性代数与解析几何的一个结合．通过矩阵的秩判断行列式是否为零；通过二次型对应矩阵的特征多项式给出二次型的标准形．

［解］（Ⅰ）二次型 f 对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}$．因 $r(A)=2$，故

$$|A|=\begin{vmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{vmatrix}=0，解得 c=3.$$

容易验证，此时 A 的秩是 2，且 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9),$$

故所求特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=9$．

（Ⅱ）二次型 f 的标准形可表为

$$f=4y_2^2+9y_3^2=1,$$

由此可知 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 所给出的曲面是椭圆柱面．

［典型错误］ 1．二次型对应的矩阵写错，特征多项式求错；2．求出特征值后，许多学生去求特征向量了，事实上本题中不需要去求．3．将二次曲面类型说成圆、椭圆．

例 6.12 设二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$$

经正交变换 $x=Py$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$，其中 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 和 $y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$ 都是三维列向量，P 是三阶正交矩阵．试求常数 α，β．

［提示］ 利用正交变换把二次型化成标准形，等价于二次型的矩阵正交相似于对角阵．因此特征多项式

相等．比较同次幂系数即得．

［解］ 变换前后二次型的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1&\alpha&1\\\alpha&1&\beta\\1&\beta&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

由于 P 为正交矩阵，故 $P^TAP=P^{-1}AP=B$，即 $A\sim B$，故 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，即

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-\alpha&-1\\-\alpha&\lambda-1&-\beta\\-1&-\beta&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix},$$

$$\lambda^3-3\lambda^2+(2-\alpha^2-\beta^2)\lambda+(\alpha-\beta)^2\equiv\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda.$$

比较两端 λ 的同次幂的系数，得常数 $\alpha=\beta=0$.

［典型错误］ 1. 仅知道用正交变换化二次型为标准形，相应的矩阵是合同的，即 $P^TAP=B$，及相似矩阵具有相同的特征多项式不知道如何往下做．2. 行列式计算出错，反映出学生基本功不扎实，不会利用 $P^T=P^{-1}$.

例 6.13 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\quad(b>0),$$

其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

（Ⅰ）求 a，b 的值；

（Ⅱ）利用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵．

［提示］ 本题主要考查矩阵 A 的特征值之和为 A 的迹，A 的特征值之积为 A 的行列式．由此条件，可求出 a、b，此时该题就变成一道常规题了．

［解法 1］ （Ⅰ）二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}.$$

设 A 的特征值为 $\lambda_i\ (i=1,2,3)$．由题设，有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\begin{vmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12.$$

解得 $a=1$，$b=2$.

（Ⅱ）由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3),$$

得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-3$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组 $(2E-A)x=0$，得其基础解系

$$\xi_1=(2,0,1)^T,\quad \xi_2=(0,1,0)^T.$$

对于 $\lambda_3=-3$，解齐次线性方程组 $(-3E-A)x=0$，得基础解系

$$\xi_3=(1,0,-2)^T.$$

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 已是正交向量组，为得到规范正交向量组，只需将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化．由此得

$$\eta_1=\left(\frac{2}{\sqrt5},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt5}\right)^T,\quad \eta_2=(0,1,0)^T,\quad \eta_3=\left(\frac{1}{\sqrt5},\ 0,\ -\frac{2}{\sqrt5}\right)^T.$$

令矩阵

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{vmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{vmatrix},$$

则 Q 为正交矩阵．在正交变换 $x=Qy$ 下，有

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix},$$

且二次型的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

［解法 2］（Ⅰ）二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{pmatrix},$$

A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -b\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -b & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)[\lambda^2-(a-2)\lambda-(2a+b^2)]$$

设 A 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 $\lambda_1=2$，$\lambda_2+\lambda_3=a-2$，$\lambda_2\lambda_3=-(2a+b^2)$．由题设得

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+(a-2)=1,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2(2a+b^2)=-12.$$

解得 $a=1,b=2$.

（Ⅱ）由（Ⅰ），可得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-3$.

以下同解法 1.

［典型错误］ 1．直接计算 A 的特征值时，不会利用韦达定理；2．没有将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 正交化、单位化，而是直接记 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$

例 6.14 已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可经过正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$$

成椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$．求 a，b 的值和正交矩阵 P.

［提示］ 本题主要考查求正交变换将二次型化为标准形，以及二次型与二次曲面的关系．

［解］ 由 $\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{pmatrix}$ 相似得

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & -1\\ -b & \lambda-a & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & & \\ & \lambda-1 & \\ & & \lambda-4\end{vmatrix}.$$

解之得到

$$a=3,\quad b=1.$$

属于特征值 $\lambda_1=0$ 的单位特征向量为

$$x_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}};$$

属于特征值 $\lambda_2=1$ 的单位特征向量为

$$x_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}};$$

属于特征值 $\lambda_3=4$ 的单位特征向量为

$$x_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

因此

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

[典型错误] 只判断出 1，4 是二次型 A 对应的特征值，忘记 0 也是特征值，从而 P 少写一列；无法求出或求错分别对应于特征值 0，1，4 的特征向量；特征向量没有单位化；正交矩阵中列向量的次序与特征值的次序不对应.

例 6.15 设有 n 元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2,$$

其中 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为实数．试问：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型.

[提示] 将二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正定性转化为齐次线性方程组仅有零解的充要条件，进而转化为 n 阶行列式的计算问题.

[解] 由题设条件知，对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0,$$

其中等号成立当且仅当

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2=0,\\ x_2+a_2x_3=0,\\ \qquad\cdots\cdots\\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0,\\ x_n+a_nx_1=0.\end{cases}\tag{$*$}$$

方程组($*$)仅有零解的充分必要条件是其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

所以，当 $1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 时，对于任意的不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0,$$

即当 $a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$ 时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型.

[典型错误] 1. 行列式的计算出错；2. 把需满足的条件理解成($*$)的系数行列式为零.

例 6.16 设 A、B 分别为 m，n 阶正定矩阵. 试判定分块矩阵 $C=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$ 是否是正定矩阵.

[提示] 本题主要考查正定矩阵的定义，将 $m+n$ 维列向量 z 分为 m 维与 n 维两部分，利用 A、B 的正定性计算即得.

[解] 设 x，y 依次为 m 维，n 维列向量，则 $z=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ 为 $(m+n)$ 维列向量. 如 $z\neq 0$，则 x 与 y 不同时为零向量. 不妨设 $x\neq 0$，y 任意. 由于 A，B 都是正定的，应有 $x^{\mathrm T}Ax>0$，$y^{\mathrm T}By\geqslant 0$. 因此

$$z^{\mathrm T}Cz=(x^{\mathrm T}y^{\mathrm T})\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}x^{\mathrm T}Ax+y^{\mathrm T}By>0,$$

而当 $x=0$ 时，必有 $y\neq 0$，从而 $y^{\mathrm T}By>0$，此时也有 $z^{\mathrm T}Cz>0$. 总之，C 是正定矩阵.

[典型错误] $z=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\neq 0$. 没有分成两种情况，(1)$x\neq 0$；(2)$x=0$.

例 6.17 设 A 是 n 阶正定阵，E 是 n 阶单位阵，证明 $A+E$ 的行列式大于 1.

[提示] 利用正定矩阵的性质：存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{\mathrm T}AQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$.

其中 $\lambda_i>0\,(i=1,2,\cdots,n)$. 通过简单计算利用 $\lambda_i>0$ 即可得证.

[证明] 因 A 是正定阵，故存在正交阵 Q，使 $Q^{\mathrm T}AQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，其中所有 $\lambda_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，它们是矩阵 A 的特征值. 由此得

$$Q^{\mathrm T}(A+E)Q=Q^{\mathrm T}AQ+Q^{-1}Q=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}+E=\begin{pmatrix}\lambda_1+1 & & & \\ & \lambda_2+1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+1\end{pmatrix}.$$

把上式两边取行列式，得

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)=|Q^{\mathrm T}(A+E)Q|=|Q^{\mathrm T}|\cdot|A+E|\cdot|Q|=|A+E|.$$

故因为所有 $\lambda_i>0$，所以

$$|A+E|=\prod^{n}(\lambda_i+1)>1.$$

[典型错误] 不会利用正定矩阵的性质，缺乏简单的逻辑推理思维.

例 6.18 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 已知矩阵 $B=\lambda E+A^{\mathrm T}A$，试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵.

[提示] 利用正定矩阵的定义证明.

[证明] 因为 $$B^{\mathrm T}=(\lambda E+A^{\mathrm T}A)^{\mathrm T}=\lambda E+A^{\mathrm T}A=B,$$

所以 B 为 n 阶对称矩阵. 对于任意的实 n 维向量 x，有

$$x^{\mathrm T}Bx=x^{\mathrm T}(\lambda E+A^{\mathrm T}A)x=\lambda x^{\mathrm T}x+x^{\mathrm T}A^{\mathrm T}Ax=\lambda x^{\mathrm T}x+(Ax)^{\mathrm T}(Ax).$$

当 $x\neq 0$ 时，有 $x^{\mathrm T}x>0$，$(Ax)^{\mathrm T}(Ax)\geqslant 0$. 因此，当 $\lambda>0$ 时，对任意的 $x\neq 0$，有

$$x^{\mathrm T}Bx=\lambda x^{\mathrm T}x+(Ax)^{\mathrm T}Ax>0,$$

即 B 为正定矩阵.

[典型错误] 对正定矩阵的性质及其判别法不熟悉，造成失分率较高：没说明 B 为对称矩阵；有人认为 $A^{T}A$ 为正定矩阵，所以 B 也是正定矩阵．事实上当 $n>m$ 时，$A^{T}A$ 肯定不是正定矩阵．

例 6.19 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵．B^{T} 为 B 的转置矩阵．试证：$B^{T}AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$．

[提示] 本题主要考查实对称矩阵为正定的充分必要条件．

[证明] 用定义证明最方便：A 为正定矩阵$\Leftrightarrow$对于任意 n 元向量 $x\neq 0$，有 $x^{T}Ax>0$．

必要性．设 $B^{T}AB$ 为正定矩阵，则对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，有 $x^{T}(B^{T}AB)x>0$，即 $(Bx)^{T}A(Bx)>0$，于是，$Bx\neq 0$．因此，$Bx=0$ 只有零解，从而 $r(B)=n$．

充分性．因 $(B^{T}AB)^{T}=B^{T}A^{T}B=B^{T}AB$，故 $B^{T}AB$ 为实对称矩阵．若 $r(B)=n$，则线性方程组 $Bx=0$ 只有零解．从而对任意实 n 维列向量 $x\neq 0$，有 $Bx\neq 0$．又 A 为正定矩阵，所以对于 $Bx\neq 0$ 有 $(Bx)^{T}A(Bx)>0$．于是当 $x\neq 0$ 时，$x^{T}(B^{T}AB)x>0$，故 $B^{T}AB$ 为正定矩阵．

必要性的另一证法：由于 $B^{T}AB$ 正定，所以 $r(B^{T}AB)=n$．但另一方面 $r(B^{T}AB)\leqslant r(B)\leqslant n$．所以 $r(B)=n$．

[典型错误] 1．误以为 $B^{T}AB$ 合同于 A，由于 A 正定，推出 $B^{T}AB$ 也是正定的．2．由于 $r(B)=n$，误认为 B 是方阵．因此有 $|B|\neq 0$，从而得到 $Bx=0$ 只有零解．

例 6.20 设 A 为三阶实对称矩阵，且满足条件 $A^{2}+2A=O$．已知 A 的秩 $r(A)=2$．

(Ⅰ) 求 A 的全部特征值；

(Ⅱ) 当 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 E 为三阶单位矩阵．

[提示] 本题考查了矩阵特征值和特征向量的性质以及正定矩阵与特征值之间的关系．

[解法 1] (Ⅰ) 设 λ 为 A 的一个特征值，对应的特征向量为 α，则

$$A\alpha=\lambda\alpha\ (\alpha\neq 0)，\ A^{2}\alpha=\lambda^{2}\alpha.$$

于是

$$(A^{2}+2A)\alpha=(\lambda^{2}+2\lambda)\alpha.$$

由条件 $A^{2}+2A=O$ 推知 $(\lambda^{2}+2\lambda)\alpha=0$．又由于 $\alpha\neq 0$，故有 $\lambda^{2}+2\lambda=0$．解得 $\lambda=-2$，$\lambda=0$．

因为实对称矩阵 A 必可对角化，且 $r(A)=2$，所以

$$A\sim\begin{pmatrix}-2 & & \\ & -2 & \\ & & 0\end{pmatrix}=\Lambda.$$

因此，矩阵 A 的全部特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=-2，\lambda_3=0.$$

(Ⅱ) 矩阵 $A+kE$ 仍为实对称矩阵，由(Ⅰ)知，$A+kE$ 的全部特征值为 $-2+k$，$-2+k$，k．于是，当 $k>2$ 时矩阵 $A+kE$ 的全部特征值大于零．因此，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵．

[解法 2] (Ⅰ) 同解法 1．

(Ⅱ) 实对称矩阵必可对角化，故存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda，\ A=P\Lambda P^{-1}.$$

于是

$$A+kE=P\Lambda P^{-1}+kPP^{-1}=P(\Lambda+kE)P^{-1},$$

所以

$$A+kE\sim\Lambda+kE,$$

而

$$\Lambda+kE=\begin{pmatrix}k-2 & & \\ & k-2 & \\ & & k\end{pmatrix}.$$

$\Lambda+kE$ 为正定矩阵，只需其顺序主子式均大于 0，即 k 需满足

$$k-2>0,\ (k-2)^2>0,\ (k-2)^2k>0.$$

因此，当 $k>2$ 时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵.

［典型错误］ 1. 部分考生求出 $\lambda=-2$，$\lambda=0$ 之后就直接说 A 的全部特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=0$；2. 部分考生不知道或是没想到 $A+kE$ 的特征值与 A 的特征值的关系，于是把问题想的过于复杂，陷入困境.

第三部分　概率论与数理统计(数学二不要求)

一、随机事件和概率

·考试内容与要求·

考试内容

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

考试要求

1．了解样本空间(基本事件空间)的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算．

2．理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式．

3．理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算的方法；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法．

·考试内容解析·

(一) 随机事件与样本空间(基本事件空间)

1．随机试验

(1) 必然现象和随机现象　在一定条件下必然出现的现象，称为必然现象．在一定条件下可能出现也可能不出现的现象，称为随机现象．

(2) 随机试验　对随机现象的观测，称为试验．如果试验可以在相同的条件下重复进行，并且每次试验的结果不止一个，事先可以明确试验的所有可能结果，但不能预先知道究竟是哪一个结果出现，这样的试验称为随机试验，也简称为试验，记作 E．

2．随机事件

(1) 样本空间　随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间(或基本事件空间)，记作 Ω．样本空间的元素是随机试验 E 的可能结果，称为样本点，记作 ω．

(2) 随机事件　随机试验 E 的样本空间 Ω 中满足某些条件的子集，称为随机事件，简称事件．记作 A，B，C，…．在一次试验中，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，称事件 A 发生．由一个样本点构成的事件称为基本事件．

样本空间 Ω 是它本身的子集，在每次试验中一定发生，称 Ω 为必然事件．空集 $\varnothing$ 不含任何样本点，它是 Ω 的子集，在每次试验中都不发生，称 $\varnothing$ 为不可能事件．

3．事件的关系和运算

设随机试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，而 A、B、A_i $(i=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集，即 E 的随机事件．由于 E 的一个事件就是 Ω 的一个子集，因此事件间的关系与事件的运算就按照集合间的关系与集合的运算来表达，但要注意理解它们在概率论中的含义．

(1) 包含　如果 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，仍记作 $A\subset B$．这意味着如果事件 A 发生，则必导致事件 B 发生．

(2) 相等　如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$．此时 A 与 B 是 Ω 的同一个子集．

(3) 互不相容　如果 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的．这意味着事件 A 与事件 B 不能同