# 第三部分　概率论与数理统计(数学二不要求)

## 一、随机事件和概率

### ·考试内容与要求·

**考试内容**

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

**考试要求**

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算.

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式.

3. 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算的方法；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

### ·考试内容解析·

(一) 随机事件与样本空间(基本事件空间)

1. 随机试验

(1) 必然现象和随机现象　在一定条件下必然出现的现象，称为必然现象. 在一定条件下可能出现也可能不出现的现象，称为随机现象.

(2) 随机试验　对随机现象的观测，称为试验. 如果试验可以在相同的条件下重复进行，并且每次试验的结果不止一个，事先可以明确试验的所有可能结果，但不能预先知道究竟是哪一个结果出现，这样的试验称为随机试验，也简称为试验，记作 $E$.

2. 随机事件

(1) 样本空间　随机试验 $E$ 的所有可能结果组成的集合称为 $E$ 的样本空间(或基本事件空间)，记作 $\Omega$. 样本空间的元素是随机试验 $E$ 的可能结果，称为样本点，记作 $\omega$.

(2) 随机事件　随机试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 中满足某些条件的子集，称为随机事件，简称事件，记作 $A$，$B$，$C$，…. 在一次试验中，当且仅当子集 $A$ 中的一个样本点出现时，称事件 $A$ 发生. 由一个样本点构成的事件称为基本事件.

样本空间 $\Omega$ 是它本身的子集，在每次试验中一定发生，称 $\Omega$ 为必然事件. 空集 $\varnothing$ 不含任何样本点，它是 $\Omega$ 的子集，在每次试验中都不发生，称 $\varnothing$ 为不可能事件.

3. 事件的关系和运算

设随机试验 $E$ 的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，而 $A$、$B$、$A_i$ $(i=1,2,\cdots)$ 是 $\Omega$ 的子集，即 $E$ 的随机事件. 由于 $E$ 的一个事件就是 $\Omega$ 的一个子集，因此事件间的关系与事件的运算就按照集合间的关系与集合的运算来表达，但要注意理解它们在概率论中的含义.

(1) 包含　如果 $A\subset B$，则称事件 $B$ 包含事件 $A$，仍记作 $A\subset B$. 这意味着如果事件 $A$ 发生，则必导致事件 $B$ 发生.

(2) 相等　如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等，记作 $A=B$. 此时 $A$ 与 $B$ 是 $\Omega$ 的同一个子集.

(3) 互不相容　如果 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 是互不相容的. 这意味着事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同

时发生.

(4) 对立　如果 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 互为对立事件或互逆事件．$A$ 的对立事件记作 $\bar{A}$，即 $\bar{A}=B$．事件 $A$ 与事件 $B$ 互为对立事件，意味着在每次试验中事件 $A$ 与事件 $B$ 必有一个发生，且仅有一个发生．

(5) 并事件　事件 $A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$ 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的并事件或和事件．当且仅当事件 $A$ 与事件 $B$ 中至少有一个发生时，并事件 $A\cup B$ 发生．

事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并事件，事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的并事件．

(6) 交事件　事件 $A\cap B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$ 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的交事件或积事件．当且仅当事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生时，交事件 $A\cap B$ 发生．交事件 $A\cap B$ 也记作 $AB$．

事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件，事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的交事件．

(7) 差事件　事件 $A-B=\{\omega\mid\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$ 称为事件 $A$ 与事件 $B$ 的差事件．当且仅当事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生时，差事件 $A-B$ 发生．

易知 $A-B=A-AB$，$\bar{A}=\Omega-A$．

事件间的关系与事件的运算可以用图 25 直观地表示出来．

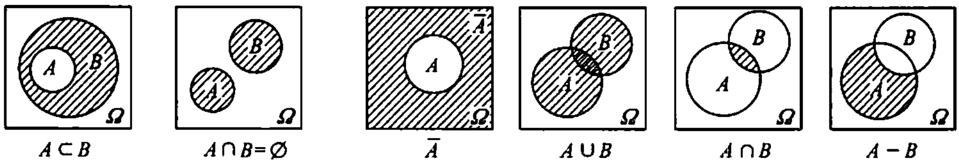


图　25

(8) 完全事件组　如果有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 或可列无限多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容(即当 $i\neq j$ 时，$A_i\cap A_j=\varnothing$，$i,j=1,2,\cdots$)，在每次试验中必有一个且仅有一个事件 $A_i$ 发生，即

$$A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j),\quad \bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega,$$

则称这个事件组为完全事件组或为样本空间 $\Omega$ 的一个划分．

4．事件的运算性质

设随机试验 $E$ 的样本空间为 $\Omega$，随机事件为 $A$，$B$，$C$，$A_i\ (i=1,2,\cdots)$，则有

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$．

(2) 结合律　$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$．

(3) 分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap A_i).$$

(4) 对偶律　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$．

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i,\ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{A}_i.$$

（二）事件的概率

1．概率的概念

设随机试验 $E$ 的样本空间为 $\Omega$，如果对于 $\Omega$ 中的每一个事件 $A$，有唯一的实数 $P(A)$ 和它对应，并且这个事件的函数 $P(A)$ 满足以下条件：

(1) 非负性　对于任一事件 $A$，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性　对于必然事件 $\Omega$，有 $P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性　对于两两互不相容的事件 $A_1$，$A_2$，…，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

则称 $P(A)$ 为事件 $A$ 的概率.

概率 $P(A)$ 是事件 $A$ 发生可能性大小的数值度量.

2. 概率的基本性质

(1) $P(\varnothing)=0$.

(2) 有限可加性　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3) 对于两个事件 $A$ 和 $B$，如果 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\quad P(A)\leqslant P(B).$$

对于任意两个事件 $A$ 和 $B$，有减法公式

$$P(B-A)=P(B)-P(AB).$$

对于任意事件 $A$，有 $P(A)\leqslant 1$.

(4) 加法公式　对于任意两个事件 $A$ 和 $B$，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

如果事件 $A$ 和事件 $B$ 互不相容，则有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

特别地，对于任意事件 $A$，有

$$P(A)+P(\bar{A})=1.$$

加法公式可以推广到 $n$ $(n\geqslant 3)$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的情形，此时有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

3. 古典型概率

如果试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 只有有限个样本点，并且由各个样本点所构成的基本事件发生的可能性相同，则称这样的试验为古典概型或等可能概型. 对于该试验的事件 $A$，则有

$$P(A)=\frac{A\text{ 中基本事件个数 }k}{\Omega\text{ 中基本事件总数 }n}.$$

4. 几何型概率

如果试验 $E$ 是从某一线段(或平面、空间中有界区域) $\Omega$ 上任取一点，并且所取的点位于 $\Omega$ 中任意两个长度(或面积、体积)相等的子区间(或子区域)内的可能性相同，则所取的点位于 $\Omega$ 中任意子区间(或子区域) $A$ 内这一事件(仍记作 $A$)的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的长度(或面积、体积)}}{\Omega\text{ 的长度(或面积、体积)}}.$$

5. 条件概率

设 $A$，$B$ 是两个事件，且 $P(A)>0$，称 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 $A$ 发生的条件下事件 $B$ 发生的条件概率，记作 $P(B|A)$，即

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

6. 计算概率的几个公式

(1) 乘法公式 设 $A$, $B$ 是两个事件，如果 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

如果 $P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(B)P(A|B).$$

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n$ 个事件，$n\geqslant 2$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(2) 全概率公式 设随机试验 $E$ 的样本空间为$\Omega,B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是完全事件组，$P(B_i)>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则对于事件 $A$，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).$$

(3) 贝叶斯公式 在全概率公式的条件下，如果 $P(A)>0$，则有

$$P(B_j|A)=\frac{P(AB_j)}{P(A)}=\frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

在一定的条件下，我们可以直接计算古典型概率和几何型概率，也可以利用概率的性质和公式计算概率．在大量独立重复试验中，可以用事件 $A$ 发生的频率$f_n(A)=\dfrac{A\text{ 在 }n\text{ 次试验中发生的次数 }n_A}{\text{试验次数 }n}$作为概率$P(A)$的近似值．

(三) 事件的独立性和独立重复试验

1. 独立事件

(1) 两个事件相互独立 如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称两个事件 $A$ 和 $B$ 相互独立．如果 $P(A)\neq 0$，则两个事件 $A$ 和 $B$ 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$．如果事件 $A$ 与事件 $B$ 相互独立，则 $A$ 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 $B$、$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立．

(2) $n\ (n\geqslant 3)$个事件两两独立和相互独立 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n$ 个事件，如果任意两个事件 $A_i$ 和 $A_j\ (i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$都相互独立，则称 $n$ 个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两相互独立．如果任意 $k\ (2\leqslant k\leqslant n)$个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$满足$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，则称 $n$ 个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立．

2. 独立试验

(1) 独立重复试验 如果在两个或多个试验中与各试验所联系的事件之间相互独立，且同一事件在各个试验中出现的概率相同，则称这些试验是相互独立重复的．

(2) 伯努利试验 如果试验只有两个结果 $A$ 和 $\bar{A}$，则称这种试验为伯努利试验．将一伯努利试验独立重复地进行 $n$ 次，称为 $n$ 重伯努利试验．设在每次试验中，概率 $P(A)=p\ (0<p<1)$，则在 $n$ 重伯努利试验中事件$A$ 出现$k\ (0\leqslant k\leqslant n)$次的概率为 $C_n^kp^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$．此公式称为二项概率公式．

(3) 简单随机抽样 如果从有限集合(也称为有限总体)$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$中任意抽取一个元素，每个元素被抽到的可能性相同，则称这一试验为简单随机抽样．如果一次试验完成后，把所抽出的元素放回 $\Omega$ 中，则称为放回抽样；否则称为不放回抽样．在放回抽样中，各次试验是相互独立的．

## ·例 题 详 解·

例 1.1 设 $A$, $B$ 为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$________.

[答案] 0.6.

[提示] 本题考查减法公式．

[解] 由 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.3$，得

$$P(AB)=P(A)-0.3=0.7-0.3=0.4，故\ P(\overline{AB})=0.6.$$

[典型错误] 认为总有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，从而无法解答．事实上，此式成立是有条件的．

例 1.2 设 $A$，$B$ 是任意两个随机事件．则 $P\{(\bar{A}\cup B)(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B})\}=$ ________.

[答案] 0.

[提示] 本题考查事件的运算与关系，先利用事件的运算规律化简所讨论的复杂事件．

[解] 由 $(\bar{A}\cup B)(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B})=[(\bar{A}A)\cup B][(\bar{A}A)\cup\bar{B}]=[\varnothing\cup B][\varnothing\cup\bar{B}]=B\bar{B}=\varnothing$，从而所求概率为 $P(\varnothing)$，等于 0.

[典型错误] 误用 $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cup B}$．$B\bar{B}=\Omega$ 等．

例 1.3 已知随机事件 $A$ 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 $B$ 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B|A)=0.8$，则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)=$ ________.

[答案] 0.7.

[提示] 利用概率的加法公式和乘法公式易得．

[解] $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)$

$$=0.5+0.6-0.5\times0.8=0.7.$$

[典型错误] 填 0.8．$P(AB)=P(A)P(B)$ 代入加法公式，而题中并未给出 $A$ 与 $B$ 独立的条件．

例 1.4 设随机事件 $A$，$B$ 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4、0.3 和 0.6．若 $\bar{B}$ 表示 $B$ 的对立事件，那么积事件 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B})=$ ________.

[答案] 0.3.

[提示] 利用加法公式求出 $P(AB)$，而 $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$.

[解] $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.3-0.6=0.1$.

因为 $A=A(B+\bar{B})=AB+A\bar{B}$．故

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3.$$

[典型错误] 误认为 $P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(B)$.

例 1.5 已知 $A$、$B$ 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$，且 $P(A)=p$．则 $P(B)=$ ________.

[答案] $1-p$.

[解] 由 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

因此 $$P(B)=1-P(A)=1-p.$$

[典型错误] 误认为 $A$ 与 $B$ 有独立性，从而有

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B}).$$

例 1.6 设两两相互独立的三事件 $A$，$B$ 和 $C$ 满足条件：$ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$ ________.

[答案] $\frac{1}{4}$.

[提示] 利用加法公式的推广形式．

[解] $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(B)P(C)-P(C)P(A)=3P(A)-3[P(A)]^2=\frac{9}{16}$，解得 $P(A)=\frac{1}{4}$.

[典型错误] 填 $\frac{3}{16}$．主要是认为 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$.

例 1.7 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$，则事件 $A$，$B$，$C$ 全不发生的概率为 ________.

[答案] $\frac{3}{8}$.

[提示] "$A$，$B$，$C$ 全不发生" 即为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，而 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}=\overline{A\cup B\cup C}$，从而可先求 $P(A\cup B\cup C)$，利用公式即得.

[解] 由 $ABC\subset AB$，$P(AB)=0$ 得 $P(ABC)=0$，所求事件概率为

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-\{P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\}\\&=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

[典型错误] ① 不知道如何求 $P(ABC)$，因为题中没有直接给出，而是要利用 $P(AB)=0$，及 $ABC\subset AB$，$P(ABC)\leqslant P(AB)$.

② "$A$，$B$，$C$ 全不发生" 错误地表示为$\overline{ABC}$，而$\overline{ABC}$实为 "$A$，$B$，$C$ 不全发生".

**例 1.8** 设两个相互独立的事件 $A$ 和 $B$ 都不发生的概率为$\frac{1}{9}$，$A$ 发生 $B$ 不发生的概率与 $B$ 发生 $A$ 不发生的概率相等，则 $P(A)=$______.

[答案] $\frac{2}{3}$.

[提示] 利用事件独立性的性质：$A$ 与 $B$ 相互独立，$\bar{A}$ 与 $B$ 相互独立，$A$ 与 $\bar{B}$ 相互独立，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立等价.

[解] 由题设知 $P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}$，$P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$. 因为 $A$，$B$ 相互独立，故 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$，$A$ 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 $B$ 也相互独立，从而$P(\bar{A})P(\bar{B})=\frac{1}{9}$，$P(A)P(\bar{B})=P(\bar{A})P(B)$，又 $P(A)=1-P(\bar{A})$，$P(B)=1-P(\bar{B})$，所以 $P(\bar{B})-P(\bar{A})P(\bar{B})=P(\bar{A})-P(\bar{A})P(\bar{B})$.

或者 $P(A-B)=P(B-A)$，$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$，所以 $P(A)=P(B)$.

故 $P(\bar{A})=P(\bar{B})=\frac{1}{3}$，$P(A)=1-P(\bar{A})=\frac{2}{3}$.

[典型错误] 填$\frac{4}{9}$. 主要原因将相互独立与互不相容混淆了. 误认为 $A$ 与 $B$ 互不相容，从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}&=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})\\&=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-(P(A)+P(B))=1-2P(A),\end{aligned}$$

于是 $P(A)=\frac{4}{9}$.

**例 1.9** 在区间(0,1)中随机地取两个数，则事件 "两数之和小于$\frac{6}{5}$" 的概率为________.

[答案] $\frac{17}{25}$.

[提示] 此题为几何型概率问题，将问题转化为几何概型.

[解] 用 $X$ 和 $Y$ 分别表示随机抽取的两个数，则

$$0<X<1,\ 0<Y<1.$$

$X$，$Y$ 取值的所有可能结果(即样本点全体)对应的集合为以 1 为边长的正方形 $\Omega$，其面积为 1，事件 "$X+Y\leqslant\frac{6}{5}$" 对应图 26 中阴影部分 $A$，$A$ 的面积为 $1-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{17}{25}$.

故所求概率等于

$$\frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{17}{25}.$$

[典型错误] 不知如何转化成几何概型. 当然此题还可转化为二维随机变量的相关问题.

**例 1.10** 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（$a$ 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 $x$ 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为________.

［答案］ $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.

［提示］ 如上题，本题仍是一个几何概型问题.

［解］ 半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ 也即样本空间 $\Omega$ 的面积为 $m(\Omega)=\frac{1}{2}\pi a^2$，所求事件对图 27 中阴影部分即区域 $A$ 的面积为 $m(A)=\frac{1}{2}a^2+\frac{\pi^2}{4}$，故得所求事件概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{\pi}{4}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

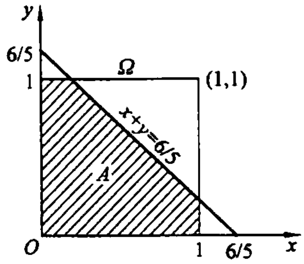


图 26

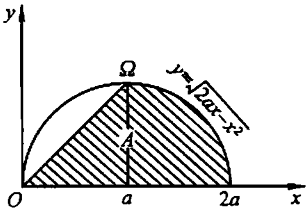


图 27

［典型错误］ 如上题.

**例 1.11** 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5. 现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为________.

［答案］ 0.75.

［提示］ 本题为简单的概率应用题，关键是如何用随机事件表达题意，显然所求概率为条件概率.

［解］ 用 $A$ 代表事件"甲命中目标"，$B$ 代表事件"乙命中目标"，则 $A\cup B$ 代表事件"目标被命中"，且 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.5+0.6-0.5\times0.6=0.8$，所求概率为

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0.6}{0.8}=0.75.$$

［典型错误］ 填 $\frac{6}{11}$，认为所求概率为

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}=\frac{6}{11}.$$

**例 1.12** 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%，30%，10%，从中随意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为________.

［答案］ $\frac{2}{3}$.

［提示］ 如同上题，要把本题转化成概率问题，用随机事件及其运算表示题中所给或所求.

［解］ 记事件 $A_i=$ "取出的产品为第 $i$ 等品"，$i=1,2,3$. 则 $A_1, A_2, A_3$ 互不相容，所求概率为

$$P(A_1|A_1\cup A_2)=\frac{P(A_1)}{P(A_1\cup A_2)}=\frac{P(A_1)}{P(A_1)+P(A_2)}=\frac{0.6}{0.6+0.3}=\frac{2}{3}.$$

［典型错误］ 不知如何表达"随意取一件，结果不是三等品"这一事件，事实上既可用 $\bar{A}_3$ 表示，又可用 $A_1\cup A_2$ 表示.

例 1.13　设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知两件中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为________.

[答案]　$\frac{1}{5}$.

[提示]　本题比上两题要难．但本质上是一样的．仍是求条件概率问题，只是表达问题时更复杂了.

[解]　用 $A$，$B$ 分别代表取出的第 1 和第 2 件为正品，则所求概率为

$$P(\bar{A}\cdot\bar{B}|\bar{A}\cup\bar{B})=P(\bar{A}\cdot\bar{B})/P(\bar{A}\cup\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cdot\bar{B})}{1-P(AB)}$$

$$=\frac{A_4^2}{A_{10}^2}\Big/\left[1-\frac{A_6^2}{A_{10}^2}\right]=\frac{4\times3}{10\times9}\Big/\left[1-\frac{6\times5}{10\times9}\right]=\frac{1}{5}.$$

[典型错误]　对"另一件也是不合格品"不会表示.

例 1.14　设三次独立试验中，事件 $A$ 出现的概率相等．若已知 $A$ 至少出现一次的概率等于 19/27，则事件 $A$ 在一次试验中出现的概率为________.

[答案]　$\frac{1}{3}$.

[提示]　本题为典型的 $n$ 重贝努利试验问题，要求每次试验中 $A$ 发生的概率.

[解]　设事件 $A$ 在一次试验中出现的概率为 $p$　$(0<p<1)$，则有 $1-(1-p)^3=\frac{19}{27}$．从而解得 $p=\frac{1}{3}$.

[典型错误]　填 $\frac{2}{3}$，认为 $A$ 至少出现一次的概率为 $1-p^3$，从而 $1-p^3=\frac{19}{27}$．故 $p=\frac{2}{3}$.

例 1.15　袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球、30 个是白球．今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是________.

[答案]　$\frac{2}{5}$.

[提示]　本题考查全概率公式.

[解]　令 $B=\{$第一人取得黄球$\}$，则 $\bar{B}=\{$第一人取得白球$\}$；$A=\{$第二人取得黄球$\}$，据全概率公式

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}+\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}=\frac{2}{5}.$$

例 1.16　设工厂 $A$ 和工厂 $B$ 的次品率分别为 1% 和 2%，现从由 $A$ 和 $B$ 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品属 $A$ 生产的概率是________.

[答案]　$\frac{3}{7}$.

[提示]　本题考查贝叶斯公式.

[解]　用 $A$ 和 $B$ 分别代表产品是工厂 $A$ 和工厂 $B$ 生产的、$C$ 代表产品是次品，则所求概率为

$$P(A|C)=\frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)}=\frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{1}{100}}{\frac{60}{100}\cdot\frac{1}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{2}{100}}=\frac{3}{7}.$$

[典型错误]　填 $\frac{1}{3}$．误算所求概率为

$$\frac{1\%}{1\%+2\%}=\frac{2}{3}.$$

问题在于考生对贝叶斯公式何时使用、如何使用不清楚.

例 1.17　以 $A$ 表示事件"甲种产品畅销，乙种产品滞销"．则其对应事件 $\bar{A}$ 为

(A)"甲种产品滞销，乙种产品畅销".　　(B)"甲、乙两种产品均畅销".

(C)"甲种产品滞销".　　(D)"甲种产品滞销或乙种产品畅销".

[答案]　(D).

[提示]　本题考查随机事件的对立事件的表述问题.

[解]　用 $A_1$ 表示"甲产品畅销"、$A_2$ 表示"乙产品畅销"，则 $A=A_1\bar{A}_2$．从而 $\bar{A}=\overline{A_1\bar{A}_2}=\bar{A}_1\cup A_2$．即

$\bar{A}$ 表示“甲产品滞销或乙种产品畅销”，故正确答案为(D).

[典型错误] 错选(A). 错在 $\bar{A}=\bar{A}_1A_2$.

例 1.18 对于任意二事件 $A$ 和 $B$，与 $A\cup B=B$ 不等价的是

(A) $A\subset B$. (B) $\bar{B}\subset\bar{A}$. (C) $A\bar{B}=\varnothing$. (D) $\bar{A}B=\varnothing$.

[答案] (D).

[提示] 本题考查随机事件的关系与运算.

[解] 显然，$A\cup B=B$ 等价于 $A\subset B$. 而 $A\subset B$ 与 $\bar{B}\subset\bar{A}$ 等价，$\bar{B}\subset\bar{A}$ 与 $A\bar{B}=\varnothing$ 等价，只有 $\bar{A}B=\varnothing$ 与 $A\subset B$ 不等价，故应选(D).

例 1.19 在电炉上安装了 4 个温控器. 其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 $t_0$，电炉就断电，以 $E$ 表示事件“电炉断电”，而 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值. 则事件 $E$ 等于

(A) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$. (B) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$. (C) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$. (D) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$.

[答案] (C).

[提示] “电炉断电”这一事件 $E$ 发生意味着 4 个温控器至少有两个显示的温度值大于或等于 $t_0$，即若将 4 个温控器上的值 $t_1,t_2,t_3,t_4$ 从小到大排序的话. 排在第 3 的温度值一定大于或等于 $t_0$.

[解] $\{T_{(i)}\geqslant t_0\}$ 表示有 $5-i$ 个温控器显示的温度 $\geqslant t_0$，$i=1,2,3,4$，故应选(C).

[典型错误] 由于对 $T_{(i)}$ 不理解，所以无法将事件 $\{T_{(i)}\geqslant t_0\}$ 用语言描述，从而无从选择.

例 1.20 设 $A$ 和 $B$ 是任意两个概率不为零的不相容事件，则下列结论中肯定正确的是

(A) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 不相容. (B) $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容.

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$. (D) $P(A-B)=P(A)$.

[答案] (D).

[提示] 讨论事件相容与否. 直接利用定义即可.

[解] 由于 $A$ 与 $B$ 互不相容，即 $AB=\varnothing$. 所以 $A-B=A-AB=A$，故应选(D).

[典型错误] ① 选(B)，认为 $A$ 与 $B$ 不相容一定有 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容，事实上. $\bar{A}\bar{B}=\overline{A\cup B}$ 也可能为 $\varnothing$，故不能确定 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相容.

② 选(C)，原因在于把事件的不相容性与事件的独立性两个概念混淆了.

例 1.21 若二事件 $A$ 和 $B$ 同时出现的概率 $P(AB)=0$，则

(A) $A$ 和 $B$ 不相容(相斥). (B) $AB$ 是不可能事件.

(C) $AB$ 未必是不可能事件. (D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

[答案] (C).

[提示] 用举反例的方法排除错误结论.

[解] 设 $P(A)=0$，取 $B=A\neq\varnothing$，则 $P(AB)=P(A)=0$. 但 $A$ 和 $B$ 不是互不相容的，故不能选(A).

设随机变量 $X$ 服从[0,1]区间上的均匀分布，令 $A=\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$，$B=\left\{X\geqslant\frac{1}{2}\right\}$，则 $AB=\left\{X=\frac{1}{2}\right\}\neq\varnothing$，但 $P(AB)=0$，故不能选(B). 又 $P(A)=\frac{1}{2}$. $P(B)=\frac{1}{2}$. 故也不能选(D). 由上面的例子可知选项(C)是正确的.

[典型错误] 选(A). (B). (D). 都是把必要条件当成充分条件了. 因为 $A$ 与 $B$ 互斥，或 $AB$ 是不可能事件，或 $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$，都可推出 $P(AB)=0$，但反之不一定成立.

例 1.22 设 $A$. $B$ 为两随机事件，且 $B\subset A$，则下列式子正确的是

(A) $P(A\cup B)=P(A)$. (B) $P(AB)=P(A)$.

(C) $P(B|A)=P(B)$. (D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

[答案] (A).

[提示] 利用事件的运算性质易得.

［解］ 由于 $B\subset A$，所以 $AB=B$，$A\cup B=A$，则应选(A)，而不能选(B)．又 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}$，从而不能选(C)．

只有当 $A\subset B$ 时 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，故也不能选(D)．

［典型错误］ 选(B)，错以为 $AB=A$；选(D)，记错公式．

**例 1.23** 设当事件 $A$ 与 $B$ 同时发生时，事件 $C$ 必发生，则

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$．　　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$．

(C) $P(C)=P(AB)$．　　(D) $P(C)=P(A\cup B)$．

［答案］ (B)．

［提示］ 利用加法公式推证．

［解］ 由于 $AB\subset C$，则

$$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1,$$

故选(B)．

［典型错误］ 选(C)或(D)，错把题中条件理解为 $C=AB$，或 $C=A\cup B$．

**例 1.24** 设 $A$，$B$ 为随机事件，且 $P(B)>0$，$P(A|B)=1$．则必有

(A) $P(A\cup B)>P(A)$．　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$．

(C) $P(A\cup B)=P(A)$．　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$．

［答案］ (C)．

［提示］ 本题考查概率的加法公式和条件概率公式．

［解］ 由 $P(A|B)=1$ 知，

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=1，即 P(AB)=P(B)．$$

故
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)．$$

正确答案为(C)．

［典型错误］ ① 选(D)，误把 $P(A\cup B)$ 当成了 $P(AB)$．

② 选(A)或(B)，认为 $A\subset A\cup B$ 可推出 $P(A)<P(A\cup B)$，或 $B\subset A\cup B$ 可推出 $P(B)<P(A\cup B)$，事实上，取 $A=B$ 就知道这两个结论不成立．

**例 1.25** 设 A，B 为任意两个事件且 $A\subset B$，$P(B)>0$，则下列选项必然成立的是

(A) $P(A)<P(A|B)$．　　(B) $P(A)\leqslant P(A|B)$．

(C) $P(A)>P(A|B)$．　　(D) $P(A)\geqslant P(A|B)$．

［答案］ (B)．

［提示］ 利用乘法公式比较 $P(A)$ 与 $P(A|B)$．

［解］ 由于 $A\subset B$，所以 $AB=A$，从而

$$P(A)=P(AB)=P(B)P(A|B)\leqslant P(A|B)．$$

故选(B)．

**例 1.26** 设 $A$、$B$ 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B|A)=P(B|\bar{A})$，则必有

(A) $P(A|B)=P(\bar{A}|B)$．　　(B) $P(A|B)\neq P(\bar{A}|B)$．

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$．　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$．

［答案］ (C)．

［提示］ 利用条件概率的定义或乘法公式改写已知等式和选项等式，考查它们之间的联系，在诸多等式中 $P(AB)$ 成为了它们的桥梁．

［解］ 由题设知 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$，$P(\bar{A}|B)=\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(B)}=\dfrac{P(B|\bar{A})P(\bar{A})}{P(B)}=\dfrac{P(B|A)P(\bar{A})}{P(B)}$，故不能判定 $P(A|B)$ 与 $P(\bar{A}|B)$ 之间的关系，因此不选(A)或(B)．

由 $B=(AB)\cup(\bar{A}B)$，$(AB)\cap(\bar{A}B)=\varnothing$ 及 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$ 知

$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$
$$=[P(A)+P(\bar{A})]P(B|A)=P(B|A),$$

故 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$，即应选(C).

**例 1.27** 设 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，$P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$．则

(A) 事件 $A$ 和 $B$ 互不相容.　　(B) 事件 $A$ 和 $B$ 互相对立.

(C) 事件 $A$ 和 $B$ 互不独立.　　(D) 事件 $A$ 和 $B$ 相互独立.

[答案] (D).

[提示] 由条件概率的定义改写已知等式，观察是否有 $AB=\varnothing$ 或 $P(AB)=P(A)P(B)$.

[解] 由已知等式知

$$P(A|B)=1-P(\bar{A}|\bar{B})=P(A|\bar{B}),$$

则
$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}.$$

从而 $P(AB)[1-P(B)]=[P(A)-P(AB)]P(B)$，化简得 $P(AB)=P(A)P(B)$．即 $A$ 与 $B$ 相互独立.

[典型错误] 选(C)．由于计算错误无法推出 $P(AB)=P(A)P(B)$.

**例 1.28** 设 $A$，$B$，$C$ 三个事件两两独立，则 $A$，$B$，$C$ 相互独立的充分必要条件是

(A) $A$ 与 $BC$ 独立.　　(B) $AB$ 与 $A\cup C$ 独立.

(C) $AB$ 与 $AC$ 独立.　　(D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立.

[答案] (A).

[提示] 本题考查三事件独立的条件．根据 $A$，$B$，$C$ 相互独立的定义，在已知 $A$，$B$，$C$ 两两独立的情况下，只需验证 $P(ABC)$ 是否等于 $P(A)P(B)P(C)$.

[解] 因为 $A,B,C$ 两两独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$．$P(BC)=P(B)P(C)$，$P(CA)=P(C)P(A)$，于是 $A,B,C$ 相互独立 $\Leftrightarrow P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC)\Leftrightarrow A$ 与 $BC$ 独立，故应选(A).

其他选项不能推出 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

**例 1.29** 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$，$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$，$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$．$A_4=\{$正面出现两次$\}$，则事件

(A) $A_1,A_2,A_3$ 相互独立.　　(B) $A_2,A_3,A_4$ 相互独立.

(C) $A_1,A_2,A_3$ 两两独立.　　(D) $A_2,A_3,A_4$ 两两独立.

[答案] (C).

[提示] 用独立的定义直接验证.

[解] 经计算可知：$P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{1}{2}$，$P(A_3)=\frac{1}{2}$，$P(A_4)=\frac{1}{4}$，$P(A_1A_2)=\frac{1}{4}$，$P(A_1A_3)=\frac{1}{4}$，$P(A_1A_4)=\frac{1}{4}$，$P(A_2A_3)=\frac{1}{4}$，$P(A_2A_4)=\frac{1}{4}$，$P(A_3A_4)=0$．$P(A_1A_2A_3)=0$，$P(A_2A_3A_4)=0$，故由事件相互独立及两两独立的定义知 $A_1,A_2,A_3$ 两两独立.

**例 1.30** 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份．随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 $p$；

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 $q$.

[提示] 本题考查全概率公式和贝叶斯公式，是常见题型.

[解] 设 $H_i=\{$报名表是第 $i$ 区考生的$\}$ $(i=1,2,3)$，

$A_j=\{$第 $j$ 次抽到的报名表是男生表$\}$ $(j=1,2)$，则

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3};$$

$$P(A_1|H_1)=\frac{7}{10},\ P(A_1|H_2)=\frac{8}{15},\ P(A_1|H_3)=\frac{20}{25}.$$

(1) $p=P(\bar{A}_1)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\bar{A}_1|H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}.$

(2) 由全概率公式得

$$P(A_2|H_1)=\frac{7}{10},\ P(A_2|H_2)=\frac{8}{15},\ P(A_2|H_3)=\frac{20}{25}.$$

$$P(\bar{A}_1A_2|H_1)=\frac{7}{30},\ P(\bar{A}_1A_2|H_2)=\frac{8}{30},\ P(\bar{A}_1A_2|H_3)=\frac{5}{30}.$$

$$P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A_2|H_i)=\frac{1}{3}\left[\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right]=\frac{61}{90}.$$

$$P(\bar{A}_1A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\bar{A}_1A_2|H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}\right)=\frac{2}{9}.$$

因此，$q=P(\bar{A}_1|A_2)=P(\bar{A}_1A_2)/P(A_2)=\frac{2/9}{61/90}=\frac{20}{61}.$

**[典型错误]** 求对 $q$ 的很少，原因是考生比较难理解题意.

**例 1.31** 玻璃杯成箱出售，每箱 20 只，假设各箱含 0，1，2 只残次品的概率相应为 0.8，0.1 和 0.1. 一顾客欲购一箱玻璃杯，在购买时，售货员随意取一箱，而顾客随机地察看 4 只：若无残次品，则买下该箱玻璃杯，否则退回. 试求：

(1) 顾客买下该箱的概率 $\alpha$；

(2) 在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 $\beta$.

**[提示]** 本题仍是考查全概率公式和贝叶斯公式.

**[解]** 引进下列事件：$A=\{$顾客买下所察看的一箱$\}$，$B_i=\{$箱中恰好有 $i$ 件残次品$\}(i=0,1,2)$. 由题设知 $P(B_0)=0.8$，$P(B_1)=0.1$，$P(B_2)=0.1$；

$$P(A|B_0)=1,\ P(A|B_1)=C_{19}^4/C_{20}^4=4/5,\ P(A|B_2)=C_{18}^4/C_{20}^4=12/19.$$

(1) 由全概率公式

$$\alpha=P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)=0.8\times1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}\approx0.94.$$

(2) 由贝叶斯公式

$$\beta=P(B_0|A)=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\frac{0.8}{0.94}=0.85.$$

**[典型错误]** 不会假设事件，把应用问题转化为全概率公式和贝叶斯公式问题，因而不会用相应的公式.

**例 1.32** 设 $A$，$B$ 是任意二事件，其中 $A$ 的概率不等于 0 和 1，证明

$$P(B|A)=P(B|\bar{A})$$

是事件 $A$ 与 $B$ 独立的充分必要条件.

**[提示]** 根据 $A$ 与 $B$ 独立的定义证明.

**[证]** 由于 $A$ 的概率不等于 0 和 1，知题中两个条件概率都存在.

(1) 必要性. 由事件 $A$ 与 $B$ 独立，知事件 $\bar{A}$ 与 $B$ 也独立，因此 $P(B|A)=P(B)$，$P(B|\bar{A})=P(B)$，从而

$$P(B|A)=P(B|\bar{A}).$$

(2) 充分性. 由 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$，可见

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)},$$

$$P(AB)[1-P(A)]=P(A)P(B)-P(A)P(AB),$$

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

因此 $A$ 和 $B$ 独立.

例 1.33　假设一厂家生产的每台仪器，以概率 0.70 可以直接出厂；以概率 0.30 需进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂；以概率 0.20 定为不合格品不能出厂．现该厂生产了 $n$ ($n\geqslant 2$)台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立)．求

(1) 全部能出厂的概率 $\alpha$；

(2) 其中恰好有两件不能出厂的概率 $\beta$；

(3) 其中至少有两件不能出厂的概率 $\theta$．

[提示]　本题考查全概率公式以及 $n$ 重贝努利试验中二项概率公式或二项分布．

[解]　引入事件 $A=\{$仪器需进一步调试$\}$，$B=\{$仪器可以出厂$\}$，则任一仪器可出厂的概率为

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.3\times 0.8+0.7\times 1=0.94.$$

用 $X$ 代表所生产的 $n$ 台仪器中能出厂的台数，则 $X$ 为 $n$ 次独立重复试验中事件 $B$ 发生的次数，服从参数为 $n$，0.94 的二项分布．因此

$$\begin{aligned}
\alpha&=P\{X=n\}=(0.94)^n,\\
\beta&=P\{X=n-2\}=C_n^2(0.94)^{n-2}(0.06)^2,\\
\theta&=P\{X\leqslant n-2\}=1-P\{X=n-1\}-P\{X=n\}\\
&=1-n\cdot(0.94)^{n-1}(0.06)-(0.94)^n.
\end{aligned}$$

## 二、随机变量及其分布

### ·考试内容与要求·

**考试内容**

随机变量　随机变量的分布函数的概念及其性质　离散型随机变量的概率分布　连续型随机变量的概率密度　常见随机变量的分布　随机变量函数的分布

**考试要求**

1．理解随机变量的概念；理解分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

的概念及性质；会计算与随机变量相联系的事件的概率．

2．理解离散型随机变量及其概率分布的概念，掌握 0－1 分布、二项分布、几何分布、超几何分布、泊松(Poisson)分布及其应用．

3．了解泊松定理的结论和应用条件，会用泊松分布近似表示二项分布．

4．理解连续型随机变量及其概率密度的概念，掌握均匀分布、正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$、指数分布及其应用，其中参数为 $\lambda$ ($\lambda>0$)的指数分布的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

5．会求随机变量函数的分布．

### ·考试内容解析·

**(一) 随机变量及其分布函数**

1．随机变量

定义在样本空间 $\Omega=\{\omega\}$ 上的实值函数 $X=X(\omega)$，$\omega\in\Omega$，称为随机变量．随机变量也可以取复数值，称为复值随机变量．我们只讨论实值随机变量．

以下我们讨论两类随机变量——离散型随机变量和连续型随机变量．

2．随机变量的分布函数

(1) 分布函数　对于任意实数 $x$，称函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$，$x\in\mathbf{R}$ 为随机变量 $X$ 的分布函数．随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x)$，$x\in\mathbf{R}$ 就是 $X$ 在区间$(-\infty,x]$内取值这一事件的概率．