例 1.33　假设一厂家生产的每台仪器，以概率 0.70 可以直接出厂；以概率 0.30 需进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂；以概率 0.20 定为不合格品不能出厂，现该厂生产了 n ($n\geqslant 2$)台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立)．求

(1) 全部能出厂的概率 α；

(2) 其中恰好有两件不能出厂的概率 β；

(3) 其中至少有两件不能出厂的概率 θ.

［提示］　本题考查全概率公式以及 n 重贝努利试验中二项概率公式或二项分布．

［解］　引入事件 $A=\{$仪器需进一步调试$\}$，$B=\{$仪器可以出厂$\}$，则任一仪器可出厂的概率为

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.3\times 0.8+0.7\times 1=0.94.$$

用 X 代表所生产的 n 台仪器中能出厂的台数，则 X 为 n 次独立重复试验中事件 B 发生的次数，服从参数为 n，0.94 的二项分布．因此

$$\begin{aligned}\alpha &= P\{X=n\}=(0.94)^n,\\ \beta &= P\{X=n-2\}=C_n^2(0.94)^{n-2}(0.06)^2,\\ \theta &= P\{X\leqslant n-2\}=1-P\{X=n-1\}-P\{X=n\}\\ &=1-n\cdot(0.94)^{n-1}(0.06)-(0.94)^n.\end{aligned}$$

二、随机变量及其分布

·考试内容与要求·

考试内容

随机变量　随机变量的分布函数的概念及其性质　离散型随机变量的概率分布　连续型随机变量的概率密度　常见随机变量的分布　随机变量函数的分布

考试要求

1．理解随机变量的概念；理解分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

的概念及性质；会计算与随机变量相联系的事件的概率．

2．理解离散型随机变量及其概率分布的概念，掌握 0－1 分布、二项分布、几何分布、超几何分布、泊松(Poisson)分布及其应用．

3．了解泊松定理的结论和应用条件，会用泊松分布近似表示二项分布．

4．理解连续型随机变量及其概率密度的概念，掌握均匀分布、正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$、指数分布及其应用，其中参数为 λ ($\lambda>0$)的指数分布的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

5．会求随机变量函数的分布．

·考试内容解析·

(一) 随机变量及其分布函数

1．随机变量

定义在样本空间 $\Omega=\{\omega\}$ 上的实值函数 $X=X(\omega)$，$\omega\in\Omega$，称为随机变量．随机变量也可以取复数值，称为复值随机变量．我们只讨论实值随机变量．

以下我们讨论两类随机变量——离散型随机变量和连续型随机变量．

2．随机变量的分布函数

(1) 分布函数　对于任意实数 x，称函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$，$x\in\mathbb{R}$ 为随机变量 X 的分布函数．随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，$x\in\mathbb{R}$ 就是 X 在区间$(-\infty,x]$内取值这一事件的概率．

(2) 分布函数的性质　随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 具有下面的性质：

1° $F(x)$ 是一个单调不减函数.

2° 对任意 $x\in\mathrm{R}$，有 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

3° $F(x)$ 在点 $x\in\mathrm{R}$ 是右连续的，即 $F(x^+)=F(x)$.

4° 对于任意两个实数 $x_1<x_2$，有 $P\{x_1<x\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$.

(二) 离散型随机变量

1. 离散型随机变量及其概率分布

(1) 离散型随机变量　如果一个随机变量可能取的不相同的值是有限多个或可列无穷多个，则称它为离散型随机变量.

(2) 离散型随机变量的概率分布　设离散型随机变量 X 可能取的值是 $x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots$. X 取各可能值的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $p_k\geqslant 0\ (k=1,2,\cdots)$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$，则称上式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律. X 的分布函数为

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}P\{X=x_k\},\quad x\in\mathrm{R},$$

$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内除 X 可能取的值 $x_k\ (k=1,2,\cdots)$ 外处处是连续的. 对于两个任意实数 $a<b$，有

$$P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a),$$

$$P\{X=a\}=F(a)-F(a^-).$$

2. 常用的离散型随机变量及其概率分布

(1) (0-1)分布　设随机变量 X 只可能取 0 和 1 两个值，它的概率分布为

$$P\{X=0\}=1-p,P\{X=1\}=p\ (0<p<1),$$

或写成

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1\ (0<p<1),$$

则称 X 服从 0-1 分布，记为 $X\sim(0-1)$.

(2) 二项分布　设事件 A 在任意一次试验中出现的概率都是 $p\ (0<p<1)$，在 n 次独立重复试验(即 n 重伯努利试验)中事件 A 发生的次数 X 可能取的值是 $0,1,2,\cdots,n$，它的概率分布是

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(0<p<1),\ k=0,1,2,\cdots,n,$$

称 X 服从参数为 n，p 的二项分布，记为 $X\sim B(n,p)$.

(3) 几何分布　设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p\quad(0<p<1),\quad k=1,2,\cdots,$$

则称 X 服从几何分布.

(4) 超几何分布　设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n},\ k=0,1,2,\cdots,n,$$

其中 M,N,n 都是正整数，且 $n\leqslant M\leqslant N$，则称 X 服从参数为 M，N 和 n 的超几何分布，记为 $X\sim H(n,M,N)$.

(5) 泊松分布　设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}\quad(\lambda>0),\ k=0,1,2,\cdots,$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim P(\lambda)$.

3. 泊松定理

在伯努利试验中，设事件 A 在试验中发生的概率为 p_n (p_n 与试验次数 n 有关)，如果当 $n\to\infty$ 时，$np_n\to$

λ，则有

$$C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

其中 $\lambda>0$.

泊松定理表明，如果 $X\sim B(n,p)$，其中 n 充分大($n\geqslant100$)，p 充分小($p<0.1$)，而 np 适中，则可以用泊松分布近似表示二项分布．即有

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots,n,$$

其中 $\lambda=np$.

（三）连续型随机变量

1．连续型随机变量及其概率密度

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，如果存在非负可积函数 $f(x)$，使得对于任意实数 x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x\in\mathbf{R},$$

则称 X 为连续型随机变量．函数 $f(x)$称为 X 的概率密度．

概率密度 $f(x)$具有如下性质：

(1) $f(x)\geqslant0$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

(3) 对于任意实数 $x_1<x_2$，有 $P\{x_1<X\leqslant x_2\}=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$.

需要指出，连续型随机变量 X 取任一给定实数 a 的概率为零，即 $P\{x=a\}=0$．因此在计算 X 在某一区间内取值的概率时，不必区分这个区间是开区间还是闭区间或半开半闭区间．另外，改变 X 的概率密度 $f(x)$在这个区间内有限个点的函数值，并不改变 X 在该区间内取值的概率．

(4) 在 $f(x)$的连续点 x 处，有 $f(x)=F'(x)$.

2．常用的连续型随机变量及其概率密度

(1) 均匀分布　如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 在区间(a,b)内服从均匀分布，记为 $X\sim U(a,b)$，其中 a 和 b 是分布的参数．X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

(2) 指数分布　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant0,\end{cases}$$

则称 X 服从参数为 λ ($\lambda>0$ 是常数)的指数分布，记为 $X\sim E(\lambda)$．X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant0.\end{cases}$$

(3) 正态分布　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in\mathbf{R},$$

其中 $\sigma>0$ 及 μ 均为常数．则称 X 服从参数为 μ，σ 的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，也称 X 为正态随机变

量．特别地，当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，称 X 服从标准正态分布，此时 $X\sim N(0,1)$．标准正态随机变量的概率密度和分布函数分别用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示，即有

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,x\in\mathbf{R}.$$

由于标准正态随机变量的概率密度 $\varphi(x)$ 是偶函数，函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于 y 轴对称，从而有

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x),x\in\mathbf{R}.$$

如果 $X\sim N(0,1)$，则对于任意实数 $a>0$，有

$$P\{|X|>a\}=2[1-\Phi(a)],\quad P\{|X|\leqslant a\}=2\Phi(a)-1.$$

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其分布函数为 $F(x)$，则有

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\quad x\in\mathbf{R},$$

$$P\{a<X\leqslant b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),\quad -\infty<a<b<+\infty.$$

设 $X\sim N(0,1)$，对于给定的 $\alpha\ (0<\alpha<1)$，如果 u_α 满足条件

$$P\{X>u_\alpha\}=\alpha,$$

则称 u_α 为标准正态分布的 α 分位点．由于

$$\Phi(u_\alpha)=1-\alpha.$$

因此可利用标准正态分布表查出 u_α 的值．

（四）随机变量函数的分布

1．离散型随机变量函数的概率分布

设 X 是离散型随机变量，概率分布为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots,$$

则随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 取值 $g(x_k)$ 的概率为

$$P\{Y=g(x_k)\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

如果在函数值 $g(x_k)$ 中有相同的数值，则将它们相应的概率之和作为随机变量 $Y=g(X)$ 取该值的概率，就可以得到 $Y=g(X)$ 的概率分布．

2．连续型随机变量函数的概率密度

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，$x\in\mathbf{R}$，函数 $y=g(x)$ 在 X 可能取值的区间上处处可导且单调，$h(y)$ 为它的反函数．则随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 (α,β) 是函数 $g(x)$ 在 X 可能取值的区间上的值域．

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 X 的线性函数 $Y=aX+b\ (a\neq 0)$ 也服从正态分布，且

$$Y=aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2).$$

特别，对于 $a=\frac{1}{\sigma}$，$b=-\frac{\mu}{\sigma}$，则有

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$$

·例 题 详 解·

例 2.1　一实习生用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $p_i=\frac{1}{i+1}$ $(i=1,2,3)$，以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，则 $P\{X=2\}=$ ________．

［答案］ $\frac{11}{24}$．

［提示］ $\{X=2\}$表示3个零件中恰有2个合格品，共有三种情况，可用随机事件的运算形式表示.

［解］ 用 A_i 表示事件“第 i 个零件是合格品”，则 $P(\bar{A}_i)=\frac{1}{i+1}$，$P(A_i)=1-\frac{1}{i+1}=\frac{i}{i+1}$，所求概率

$$\begin{aligned}P\{X=2\}&=P(\bar{A}_1A_2A_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(A_1A_2\bar{A}_3)\\&=P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{24}.\end{aligned}$$

［典型错误］ $\{X=2\}=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$，从而 $P\{X=2\}=P(A_1A_2)+P(A_1A_3)+P(A_2A_3)$. 问题在于$\{X=2\}$的表示中包含了 $A_1A_2A_3$ 情形，另外概率计算中要用到 A_1A_2，A_1A_3，A_2A_3 互不相容，但并不成立.

例 2.2 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

则 $A=$________，$P\left\{|X|<\frac{\pi}{6}\right\}=$________.

［答案］ 1，$\frac{1}{2}$.

［提示］ 利用分布函数的右连续性可得 A 的值.

［解］ 由 $F(x)$的右连续性，知 $F\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$，得出 $A=1$.

$$P\left\{|X|<\frac{\pi}{6}\right\}=P\left\{-\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{6}\right\}=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-0=\frac{1}{2}.$$

［典型错误］ $P\left\{|X|<\frac{\pi}{6}\right\}=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=1.$

例 2.3 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in[0,1],\\ \frac{2}{9}, & x\in[3,6],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若 k 使得$P\{X\geqslant k\}=\frac{2}{3}$，则 k 的取值范围是________.

［答案］ $[1,3]$

［提示］ 本题考查对随机变量概率密度和概率分布概念的理解. 注意 $P\{X\geqslant k\}=\int_k^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$.

［解］ 当 $k<0$ 时，$P\{X\geqslant k\}=1$；

当 $0\leqslant k<1$ 时，$P\{X\geqslant k\}=\int_k^1\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_3^6\frac{2}{9}\mathrm{d}x=1-\frac{k}{3}$；

当 $1\leqslant k\leqslant 3$ 时，$P\{X\geqslant k\}=\int_3^6\frac{2}{9}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$；

当 $3<k\leqslant 6$ 时，$P\{X\geqslant k\}=\int_k^6\frac{2}{9}\mathrm{d}x=\frac{2}{9}(6-k)$；

当 $k>6$ 时，$P\{X\geqslant k\}=0$.

显然，$k\in[1,3]$为所求.

例 2.4 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\leqslant x<1,\\ 0.8, & 1\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3,\end{cases}$$

则 X 的概率分布为________.

[答案]

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

[提示] 本题考查离散型随机变量的分布律与分布函数之间的关系.

[解] 由 $P\{X=x\}=F(x+0)-F(x-0)$ 可得,

$$P\{X=-1\}=0.4-0=0.4,\ P\{X=1\}=0.8-0.4=0.4,$$
$$P\{X=3\}=1-0.8=0.2.$$

[典型错误] 由 $F(x)$ 的形式特点不会判断 X 是离散型随机变量.

例 2.5 已知随机变量 X 的概率密度

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\ -\infty<x<+\infty,$$

则 X 的分布函数 $F(x)=$________.

[答案] $\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$.

[提示] 本题考查随机变量的分布函数. 由公式 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx$ 可得.

[解] 当 $x<0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{x}dx=\frac{1}{2}e^{x}$;

当 $x\geqslant 0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-x}dx=1-\frac{1}{2}e^{-x}$.

[典型错误] 当 $x\geqslant 0$ 时, $F(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x}$.

例 2.6 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$, 且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\mu=$________.

[答案] 4

[提示] 二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根, 即判别式 $\Delta=4^2-4X<0$.

[解] 由题设知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $16-4X<0$ 即 $X>4$. 由于 $P\{X>4\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{4-\mu}{\sigma}\right\}=1-\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}$, 故 $\mu=4$.

[典型错误] 不知道结论 $\Phi(0)=\frac{1}{2}$.

例 2.7 若随机变量 X 服从均值为 2, 方差为 σ^2 的正态分布, 且 $P\{2<X<4\}=0.3$, 则 $P\{X<0\}=$________.

[答案] 0.2.

[提示] 利用 X 的概率密度关于 $x=2$ 为轴对称, 或正态分布的概率性质.

[解法 1] 由于 X 的概率密度关于 $x=2$ 为轴对称,

故 $$P\{X<2\}=P\{X>2\}=0.5,\ P\{0<X<2\}=P\{2<X<4\}=0.3,$$

从而 $$P\{X<0\}=P\{X<2\}-P\{0\leqslant X<2\}=P\{X<2\}-P\{0<X<2\}$$
$$=0.5-0.3=0.2.$$

[解法 2] $P\{2<X<4\}=P\left\{0<\frac{X-2}{\sigma}<\frac{2}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi(0)$.

由已知得 $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-\Phi(0)=0.3$，从而 $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.3+\Phi(0)=0.3+0.5=0.8$，

则 $P\{X<0\}=P\left\{\frac{X-2}{\sigma}<\frac{-2}{\sigma}\right\}=\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.2$.

[典型错误] 由于 σ^2 未知，从而无从下手.

例 2.8 设随机变量 X 服从参数为2，p 的二项分布，随机变量 Y 服从参数为3，p 的二项分布. 若 $P\{X\geqslant 1\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{Y\geqslant 1\}=$ ________.

[答案] $\frac{19}{27}$.

[提示] 用二项分布的分布律分别表出 $P\{X\geqslant 1\}$，$P\{Y\geqslant 1\}$，可求出.

[解] 由于 $P\{X=0\}=1-P\{X\geqslant 1\}=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$. 故由 $P\{X=0\}=C_2^0p^0q^2=q^2=\frac{4}{9}$，得 $q=\frac{2}{3}$. 从而

$$P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-C_3^0p^0q^3=1-q^3=1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}.$$

[典型错误] 将 $P\{X\geqslant 1\}$ 表示为 $\sum_{k=1}^{2}C_2^kp^kq^{2-k}=2pq+p^2=\frac{5}{9}$，在求解 p 时出现计算错误，而同样方法计算$P\{Y\geqslant 1\}$时较繁琐.

例 2.9 设随机变量 X 服从参数为λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$ ________.

[答案] e^{-1}.

[提示] 本题考查常见随机变量的概率分布和数字特征.

[解] 由 X 服从参数为λ 的指数分布知，

$DX=\frac{1}{\lambda^2}$，则

$$P\{X>\sqrt{DX}\}=P\left\{X>\frac{1}{\lambda}\right\}=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{e}.$$

[典型错误] 没能理解 DX 只是一个特殊常数，从而不知如何求解题中的概率；也有部分考生没能正确记住指数分布的概率密度和数字特征，从而得到错误的答案.

例 2.10 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

以 Y 表示对X 的三次独立重复观察中事件$\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$ ________.

[答案] $\frac{9}{64}$.

[提示] Y 服从参数为 3，$p=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$的二项分布.

[解] $Y\sim B(3,p)$，其中

$$p=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,dx=\frac{1}{4}，故$$

$$P\{Y=2\}=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{64}.$$

[典型错误] 无法判断出 Y 服从二项分布.

例 2.11 设随机变量 X 服从(0,2)上的均匀分布. 则随机变量 $Y=X^2$ 在(0,4)内概率分布密度 $f_Y(y)=$

________.

［答案］ $\frac{1}{4\sqrt{y}}$.

［提示］ 本题考查连续型随机变量函数的概率密度的求法，直接使用公式即可.

［解法 1］ $y=x^2$. $0<x<2$ 的反函数 $x=\sqrt{y}$，$0<y<4$.

$$f_Y(y)=f_X(\sqrt{y})\cdot|(\sqrt{y})'|=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2},\ 0<\sqrt{y}<2,$$

即
$$f_Y(y)=\frac{1}{4\sqrt{y}},\ 0<y<4.$$

［解法 2］ 记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $0<y<4$ 时，
$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}\\&=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}\\&=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{y}.\end{aligned}$$

从而
$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{4\sqrt{y}}.$$

［典型错误］ 填 $\frac{\sqrt{y}}{2}$，忘记所求是概率密度，而不是分布函数，是粗心的结果.

例 2.12 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数. 为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取

(A) $a=\frac{3}{5}$，$b=-\frac{2}{5}$.　　(B) $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{2}{3}$.

(C) $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$.　　(D) $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{3}{2}$.

［答案］ (A).

［提示］ 根据分布函数的性质求解.

［解］ 由 $F(x)$ 为分布函数，应有 $F(+\infty)=1$，即

$$\lim_{x\to+\infty}[aF_1(x)-bF_2(x)]=aF_1(+\infty)-bF_2(+\infty)=a-b=1.$$

显然只能选(A).

例 2.13 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

［答案］ (D).

［提示］ 根据分布函数和密度函数的性质来判断.

［解］ 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=2\neq 1$. 则 $f_1(x)+f_2(x)$ 不可能是概率密度，不能选(A).

设 $f_1(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\0, & 其他,\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\0, & x>0,\end{cases}$ 从而 $f_1(x)f_2(x)=0$ 不可能作为概率密度，于是不能选(B).

又因为 $F(+\infty)=F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2\neq 1$. 所以也不能选(C). 只有(D)满足. 实际上，$F(x)$ 为 $\max\{X_1,X_2\}$ 的分布函数，其中 X_1、X_2 的分布函数分别为 $F_1(x)$，$F_2(x)$.

例 2.14 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$

(A) 单调增大.　　(B) 单调减小.　　(C) 保持不变.　　(D) 增减不定.

[答案] (C).

[提示] 注意当 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$时，$\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

[解] $P\{|X-\mu|<\sigma\} = P\left\{-1<\dfrac{X-\mu}{\sigma}<1\right\}$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1,$$

显然不随 σ 的增大而变化，为常数.

[典型错误] 选(A). 认为当 σ 增大时，事件$\{|X-\mu|<\sigma\}$发生的可能性在增大.

例 2.15　设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布，$X \sim N(\mu,4^2)$，$Y \sim N(\mu,5^2)$，记 $p_1 = P\{X \leqslant \mu-4\}$，$p_2 = P\{Y \geqslant \mu+5\}$. 则

(A) 对任何实数 μ，都有 $p_1 = p_2$.　　(B) 对任何实数 μ，都有 $p_1 < p_2$.

(C) 只对 μ 的个别值，才有 $p_1 = p_2$.　　(D) 对任何实数 μ，都有 $p_1 > p_2$.

[答案] (A).

[提示] 同上题.

[解]

$$p_1 = P\{X \leqslant \mu-4\} = P\left\{\frac{X-\mu}{4} \leqslant -1\right\} = \Phi(-1),$$

$$p_2 = P\{Y \geqslant \mu+5\} = P\left\{\frac{Y-\mu}{5} \geqslant 1\right\} = 1-\Phi(1).$$

由于 $\Phi(-1) = 1-\Phi(1)$，从而 $p_1 = p_2$，故选(A).

例 2.16　设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\} > P\{|Y-\mu_2|<1\}，则必有$$

(A) $\sigma_1 < \sigma_2$.　　(B) $\sigma_1 > \sigma_2$.

(C) $\mu_1 < \mu_2$.　　(D) $\mu_1 > \mu_2$.

[答案] (A).

[提示] $\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1)$，$\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2} \sim N(0,1)$.

[解] 由于 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，所以$\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1)$，则

$$P\{|X-\mu_1|<1\} = P\left\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right| < \frac{1}{\sigma_1}\right\}$$

$$=\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{\sigma_1}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1,$$

同理

$$P\{|Y-\mu_2|<1\} = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-1.$$

由已知不等式可推得 $\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_1}\right) > \Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\right)$，而 $\Phi(x)$单调不减，从而 $\sigma_2 > \sigma_1$.

[典型错误] 选(B). 认为当 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$时，事件$\{|X-\mu|<1\}$发生的可能性越大，σ 应越大.

例 2.17　假设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y = \min\{X,2\}$的分布函数

(A) 是连续函数.　　(B) 至少有两个间断点.

(C) 是阶梯函数.　　(D) 恰好有一个间断点.

[答案] (D).

[提示] 本题考查随机变量函数的分布函数，求出后再判断连续性.

[解] 记 $F_X(x)$，$F_Y(y)$分别为 X，Y 的分布函数.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$$

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min(X,2)\leqslant y\}=1-P\{\min(X,2)>y\}$$
$$=1-P\{X>y,y<2\},\text{则}$$

当 $y\geqslant 2$ 时　$F_Y(y)=1$;

当 $y<2$ 时　$F_Y(y)=1-P\{X>y\}=1-(1-F_X(y))=F_X(y)$

$$=\begin{cases}1-e^{-\lambda y}, & 0\leqslant y<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

即
$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-e^{-\lambda y}, & 0\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

显然，$F_Y(y)$只有一个间断点，故应选(D).

例 2.18　一台设备由三大部件构成. 在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10，0.20 和 0.30. 假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求 X 的概率分布.

[提示]　可设 $A_i=\{$部件 i 需要调整$\}(i=1,2,3)$，再用 A_1，A_2，A_3 的运算表示$\{X=k\}$，从而求出概率分布.

[解]　设 $A_i=\{$部件 i 需要调整$\}(i=1,2,3)$，

$$P(A_1)=0.10,\ P(A_2)=0.20,\ P(A_3)=0.30.$$

X 可能取值0,1,2,3. 由于A_1、A_2，A_3 相互独立，

$$P\{X=0\}=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=0.9\times0.8\times0.7=0.504,$$
$$P\{X=1\}=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$
$$=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.398,$$
$$P\{X=2\}=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)$$
$$=0.1\times0.2\times0.7+0.1\times0.8\times0.3+0.9\times0.2\times0.3=0.092,$$
$$P\{X=3\}=P(A_1A_2A_3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006.$$

即

X	0	1	2	3
P	0.504	0.398	0.092	0.006

[典型错误]　误认为 X 的取值为1，2，3，漏掉 $X=0$.

例 2.19　假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$服从参数为 λt 的泊松分布.

(1) 求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布；

(2) 求在设备已无故障工作 8 小时的情形下，再无故障运行 8 小时的概率 Q.

[提示]　根据题意，设法把 T 与 $N(t)$联系上，如事件$\{T>t\}$与$\{N(t)=0\}$ 等价.

[解]　(1) 当 $t<0$ 时，由于 T 是非负随机变量 $F(t)=P\{T\leqslant t\}=0$.

当 $t\geqslant0$ 时，由于事件$\{T>t\}$与$\{N(t)=0\}$等价，

$$F(t)=P\{T\leqslant t\}=1-P\{T>t\}$$
$$=1-P\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t}.$$

于是，T 服从参数为λ 的指数分布.

(2) $Q=P\{T\geqslant16\mid T\geqslant8\}=\dfrac{P\{T\geqslant16,T\geqslant8\}}{P\{T\geqslant8\}}=\dfrac{P\{T\geqslant16\}}{P\{T\geqslant8\}}=\dfrac{e^{-16\lambda}}{e^{-8\lambda}}=e^{-8\lambda}$.

[典型错误]　无法找到 T 与 $N(t)$的联系，从而不能求解，本题有一定的难度.

例 2.20　从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗. 假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是$\dfrac{2}{5}$. 设 X 为途中遇到红灯的次数，求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望.

[提示]　本题为常规题. X 服从二项分布.

[解]　显然 X 服从二项分布 $B\left(3,\dfrac{2}{5}\right)$，$X$ 的可能取值为0,1,2,3：其概率分别为

$$P\{X=0\}=C_3^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=\frac{27}{125},\ P\{X=1\}=C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{54}{125},$$

$$P\{X=2\}=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{36}{125},\ P\{X=3\}=C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(1-\frac{2}{5}\right)^0=\frac{8}{125}.$$

即 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	27/125	54/125	36/125	8/125

据上，可得 X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{27}{125}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{81}{125}, & 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{117}{125}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

X 的数学期望为

$$E(X)=0\times\frac{27}{125}+1\times\frac{54}{125}+2\times\frac{36}{125}+3\times\frac{8}{125}=\frac{6}{5}.$$

$\left(\text{或：}E(X)=np=3\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{5}\right).$

［典型错误］ 分布函数的概念不清楚，从而写不对．在写分布函数时，将分段区间写错．

例 2.21 设随机变量 X 在[2,5]上服从均匀分布．现在对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于 3 的概率．

［提示］ 若令 Y 表示三次独立观测值大于 3 的次数．则 Y 服从二项分布．

［解］ X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 2\leqslant x\leqslant 5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记 $A=\{X>3\}$，则

$$P(A)=P\{X>3\}=\int_3^5\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

用 Y 表示三次独立观测中观测值大于 3 的次数，则 Y 服从参数为 $n=3$，$p=\dfrac{2}{3}$ 的二项分布，故所求概率为

$$P\{Y\geqslant 2\}=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}.$$

［典型错误］ 记 X 表示三次独立观测中观测值大于 3 的次数，而 X 在题中已有明确定义，从而造成混淆．

例 2.22 在电源电压不超过 200 伏，在 200～240 伏之间和超过 240 伏三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1．0.001 和 0.2．假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220,25^2)$．试求：

(1) 该电子元件损坏的概率 α；

(2) 该电子元件损坏时．电源电压在 200～240 伏的概率 β.

附表

x	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40
$\Phi(x)$	0.530	0.579	0.655	0.726	0.788	0.841	0.885	0.919

[提示] 本题考查正态分布的概率计算、全概率公式和贝叶斯公式，是一道综合题.

[解] 引进下列事件：$A_1=\{$电压不超过 200 伏$\}$，$A_2=\{$电压在 200～240 伏$\}$，$A_3=\{$电压超过 240 伏$\}$，$B=\{$电子元件损坏$\}$.由于 $X\sim N(220,25^2)$，因此

$$P(A_1)=P\{X\leqslant 200\}=P\left\{\frac{X-220}{25}\leqslant\frac{200-220}{25}\right\}=\Phi(-0.8)=0.212,$$

$$P(A_2)=P\{200\leqslant X\leqslant 240\}=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.576,$$

$$P(A_3)=P\{X>240\}=1-0.212-0.576=0.212.$$

由题设知 $P(B|A_1)=0.1$，$P(B|A_2)=0.001$，$P(B|A_3)=0.2$.

(1) 由全概率公式

$$\alpha=P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.064\,2.$$

(2) 由贝叶斯公式

$$\beta=P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}\approx 0.009.$$

[典型错误] 通常使用全概率公式或贝叶斯公式并不涉及随机变量，而本题却要用 X 的相关事件表达公式中的 A_i，故考生常觉得无法使用两公式.

例 2.23 某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩(百分制)近似正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

附表

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

[提示] 本题考查正态分布的相关概率的计算，并查表.

[解] 设 X 为考生的外语成绩，由题设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\mu=72$. 现在求 σ^2. 由条件知

$$0.023=P\{X\geqslant 96\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\geqslant\frac{96-72}{\sigma}\right\}=1-\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right),\ \text{从而}$$

$$\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.977.$$

由 $\Phi(x)$的数值表，可见$\frac{24}{\sigma}=2$，因此 $\sigma=12$，这样 $X\sim N(72,12^2)$. 故所求概率为：

$$Q\{60\leqslant X\leqslant 84\}=P\left\{\frac{60-72}{12}\leqslant\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{84-72}{12}\right\}=P\left\{-1\leqslant\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 1\right\}$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=2\times 0.841-1=0.682.$$

例 2.24 设随机变量 X 的概率密度为$f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度$f_Y(y)$.

[提示] 本题考查连续型随机变量的概率密度的求法，通常有两种方法：其一，先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$，而后求导可得 $f_Y(y)$；其二，利用定理结论直接套用，求出 $f_Y(y)$.

[解法 1] Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}\leqslant y\}=P\{\sqrt[3]{X}>1-y\}$$

$$=P\{X>(1-y)^3\}=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{(1-y)^3}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(1-y)^3\right],$$

因此，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}.$$

[解法 2] 函数 $y=1-\sqrt[3]{x}$ 的反函数 $h(y)=(1-y)^3$，则

$$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|$$
$$=\frac{1}{\pi[1+(1-y)^6]}\cdot 3(1-y)^2=\frac{3}{\pi}\cdot\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}.$$

[典型错误] 在解法 2 中漏掉 $|h'(y)|$ 项.

例 2.25 假设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，证明：$Y=1-e^{-2X}$在区间(0,1)内服从均匀分布.

[提示] 本题仍有两种解法，这里只给出一种.

[解] X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0.\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

设 $G(y)=P\{Y\leqslant y\}$为 Y 的分布函数．由于 $X>0$，有 $0<Y=1-e^{-2X}<1$，易得：

(1) 当 $y\leqslant 0$ 时，$G(y)\equiv 0$，

(2) 当 $y\geqslant 1$ 时，$G(y)\equiv 1$，

(3) 当 $0<y<1$ 时，$G(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-e^{-2X}\leqslant y\}$

$$=P\{e^{-2X}\geqslant 1-y\}=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{2}\ln(1-y)\right\}$$
$$=F\left(-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right)=y.$$

总之有

$$G(y)=\begin{cases}0, & \leqslant 0.\\ y, & 0<y<1.\\ 1, & y>1.\end{cases}$$

所以 Y 在区间(0,1)上服从均匀分布.

例 2.26 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x\in[1,8],\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

$F(x)$是 X 的分布函数．求随机变量 $Y=F(X)$的分布函数.

[提示] 首先要计算 X 的分布函数 $F(x)$．随机变量的分布函数是定义在$(-\infty,+\infty)$区间内的函数，根据题设条件，应分段计算 $F(x)$的表达式．$Y=F(X)$是随机变量 X 的函数，求 Y 的分布要用求随机变量的分布函数法计算，或利用求单调函数的密度函数公式，计算 $Y=F(X)$的密度函数 $g(y)$，然后再利用分布函数的定义计算 Y 的分布函数.

[解法 1] 易见当 $x<1$ 时 $F(x)=0$；当 $x>8$ 时 $F(x)=1$；对于 $x\in[1,8]$，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx=\int_{1}^{x}\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}dx=\sqrt[3]{x}-1.$$

设 $G(y)$是随机变量 $Y=F(X)$的分布函数．显然，当 $y\leqslant 0$ 时，$G(y)=0$；当 $y\geqslant 1$ 时，$G(y)=1$，对于$y\in(0,1)$，有

$$G(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}$$
$$=P\{\sqrt[3]{X}-1\leqslant y\}=P\{X\leqslant (y+1)^3\}$$
$$=\int_{1}^{(y+1)^3}\frac{1}{3\sqrt[3]{t}}dt=y,$$

故

$$G(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ y, & 0<y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$$

［解法 2］ 当 $x<1$ 时，$F(x)=0$. 当 $x>8$ 时，$F(x)=1$. 当 $1\leqslant x\leqslant 8$ 时，$F(x)=\int_1^x \frac{dt}{3\sqrt[3]{t^2}}=\sqrt[3]{x}-1$.

设 $G(y)$是随机变量 $Y=F(X)$的分布函数. $F(x)$在$[1,8]$上严格单调递增，且 $F(1)=0$，$F(8)=1$. 记 $h(y)=F^{-1}(y)=(y+1)^3$，根据随机变量的密度函数公式得 Y 的概率密度为

$$g_Y(y)=\begin{cases} f[h(y)]\,|h'(y)|, & 0\leqslant y\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

则当 $y<0$ 时，$G(y)=0$；当 $y>1$ 时 $G(y)=1$，

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$G(y)=\int_{-\infty}^y g_Y(t)\,dt=\int_0^y dt=y$.

也可以由

$$\begin{aligned} G(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\} \\ &=P\{X\leqslant F^{-1}(y)\}=F[F^{-1}(y)]=y, \end{aligned}$$

$$G(y)=\begin{cases} 0, & y\leqslant 0, \\ y, & 0<y<1, \\ 1, & y\geqslant 1. \end{cases}$$

例 2.27 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & -1<x<0, \\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

令 $Y=X^2$. $F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的分布函数. 求

（Ⅰ）Y 的概率密度$f_Y(y)$;

（Ⅱ）$F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

［提示］ 本题考查连续型随机变量函数的概率密度的求法，但需要注意的是不可直接套用公式，因为 $y=g(x)=x^2$ 不单调. 本题的第二问考查二维随机变量分布函数的定义，注意 $F\left(-\frac{1}{2},4\right)=P\left\{X\leqslant -\frac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}$及 $Y=X^2$.

（Ⅰ）［解法 1］ Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}.$$

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$，$f_Y(y)=0$；

当 $0<y\leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned} F_Y(y)&=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\} \\ &=P\{-\sqrt{y}\leqslant X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\} \\ &=\frac{1}{2}\sqrt{y}+\frac{1}{4}\sqrt{y}=\frac{3}{4}\sqrt{y}. \end{aligned}$$

$$f_Y(y)=\frac{3}{8\sqrt{y}};$$

当 $1\leqslant y<4$ 时，

$$F_Y(y)=P\{-1\leqslant X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y},$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{8\sqrt{y}};$$

当 $y\geqslant 4$ 时，$F_Y(y)=1$，$f_Y(y)=0$. 故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

[解法 2]　由 $f_X(x)$可得 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ \dfrac{1}{2}(x+1), & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$，$f_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}\\&=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}\\&=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}),\end{aligned}$$

则当 $0<y<1$ 时，　$F_Y(y)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{y}}{4}\right)-\dfrac{1}{2}(-\sqrt{y}+1)=\dfrac{3}{4}\sqrt{y}, f_Y(y)=\dfrac{3}{8\sqrt{y}}$；

当 $1\leqslant y<4$ 时，$F_Y(y)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{y}}{4}, f_Y(y)=\dfrac{1}{8\sqrt{y}}$；

当 $y\geqslant 4$ 时，$F_Y(y)=1$，$f_Y(y)=0$.

[解法 3]　记 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$，$f_Y(y)=0$.

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$，

$$\begin{aligned}f_Y(y)=F'_Y(y)&=F'_X(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+F'_X(-\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})].\end{aligned}$$

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{8\sqrt{y}}$；

当 $1\leqslant y<4$ 时，$f_Y(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(\dfrac{1}{4}+0\right)=\dfrac{1}{8\sqrt{y}}$；

当 $y\geqslant 4$ 时，$f_Y(y)=0$.

(Ⅱ)[解法 1]

$$\begin{aligned}F\left(-\frac{1}{2},4\right)&=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},X^2\leqslant 4\right\}\\&=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant 2\right\}=P\left\{-2\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}\\&=P\left\{-1<X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

[解法 2]　由于 $P\{Y\leqslant 4\}=1$，所以 $\left\{X\leqslant-\dfrac{1}{2}\right\}$与$\{Y\leqslant 4\}$独立，

则

$$F\left(-\frac{1}{2},4\right)=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}P\{Y\leqslant 4\}=\frac{1}{4}.$$

[典型错误]　① 不区分 $y\geqslant 0$ 和 $y<0$，$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$.

② (Ⅰ)的解法 1 和解法 2 中，不会计算复合函数 $F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$ 和 $f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})$.

③ 直接套用公式得到错误结论：

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(-\sqrt{y})\,|(-\sqrt{y})'|, & 0<y<1, \\ f_X(\sqrt{y})\,|(\sqrt{y})'|, & 0<y<4, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

等等.

④ 在求解(Ⅱ)时，想先求(X,Y)的概率密度$f(x,y)$。实际上，由于$Y=X^2$，$f(x,y)$并不存在；部分考生想求$F(x,y)$，由于计算较复杂，从而最终无法求出$F\left(-\frac{1}{2},4\right)$；还有考生认为$X$与$Y$是独立的.

三、多维随机变量及其分布

·考试内容与要求·

考试内容

多维随机变量及其分布　二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布　二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度　随机变量的独立性和不相关性　常用二维随机变量的分布　两个及两个以上随机变量简单函数的分布

考试要求

1. 理解多维随机变量的概念，理解多维随机变量的分布的概念和性质. 理解二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布，理解二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度. 会求与二维随机变量相关事件的概率.

2. 理解随机变量的独立性及不相关概念，掌握随机变量相互独立的条件.

3. 掌握二维均匀分布. 了解二维正态分布的概率密度，理解其中参数的概率意义.

4. 会求两个随机变量简单函数的分布，会求多个相互独立随机变量简单函数的分布.

·考试内容解析·

(一) 二维随机变量及其分布函数

1. 二维随机变量

设$X=X(\omega)$，$Y=Y(\omega)$是定义在样本空间Ω上的两个随机变量，则称向量(X,Y)为二维随机变量(或随机向量).

2. 二维随机变量的分布函数和边缘分布函数

(1) 二维随机变量的分布函数　设(X,Y)是二维随机变量，对于任意实数x和y，称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,\ Y\leqslant y\},\ x,\ y\in \mathbf{R}.$$

为二维随机变量(X,Y)的分布函数或随机变量X和Y的联合分布函数.

二维随机变量(X,Y)的分布函数具有如下性质：

① 对于任意x，$y\in \mathbf{R}$，有

$$0\leqslant F(x,y)\leqslant 1,$$
$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0,$$
$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,$$
$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,$$
$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$

② $F(x,y)$关于x和关于y右连续，即

$$F(x^+,y)=F(x,y),\ F(x,y^+)=F(x,y),\ x,\ y\in \mathbf{R}.$$

③ $F(x,y)$关于x单调不减、关于y单调不减.