$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(-\sqrt{y})\,|(-\sqrt{y})'|, & 0<y<1, \\ f_X(\sqrt{y})\,|(\sqrt{y})'|, & 0<y<4, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

等等.

④ 在求解(Ⅱ)时，想先求(X,Y)的概率密度$f(x,y)$。实际上，由于$Y=X^2$，$f(x,y)$并不存在；部分考生想求$F(x,y)$，由于计算较复杂，从而最终无法求出$F\left(-\frac{1}{2},4\right)$；还有考生认为$X$与$Y$是独立的.

三、多维随机变量及其分布

·考试内容与要求·

考试内容

多维随机变量及其分布　二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布　二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度　随机变量的独立性和不相关性　常用二维随机变量的分布　两个及两个以上随机变量简单函数的分布

考试要求

1. 理解多维随机变量的概念，理解多维随机变量的分布的概念和性质. 理解二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布，理解二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度. 会求与二维随机变量相关事件的概率.

2. 理解随机变量的独立性及不相关概念，掌握随机变量相互独立的条件.

3. 掌握二维均匀分布. 了解二维正态分布的概率密度，理解其中参数的概率意义.

4. 会求两个随机变量简单函数的分布，会求多个相互独立随机变量简单函数的分布.

·考试内容解析·

(一) 二维随机变量及其分布函数

1. 二维随机变量

设$X=X(\omega)$，$Y=Y(\omega)$是定义在样本空间Ω上的两个随机变量，则称向量(X,Y)为二维随机变量(或随机向量).

2. 二维随机变量的分布函数和边缘分布函数

(1) 二维随机变量的分布函数　设(X,Y)是二维随机变量，对于任意实数x和y，称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,\ Y\leqslant y\},\ x,\ y\in\mathbf{R}.$$

为二维随机变量(X,Y)的分布函数或随机变量X和Y的联合分布函数.

二维随机变量(X,Y)的分布函数具有如下性质：

① 对于任意x，$y\in\mathbf{R}$，有

$$0\leqslant F(x,y)\leqslant 1,$$
$$F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0,$$
$$F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,$$
$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,$$
$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$

② $F(x,y)$关于x和关于y右连续，即

$$F(x^+,y)=F(x,y),\ F(x,y^+)=F(x,y),\ x,\ y\in\mathbf{R}.$$

③ $F(x,y)$关于x单调不减、关于y单调不减.

④ 随机点(X,Y)落在矩形域 $G=\{(x,y)\mid x_1<X\leqslant x_2,\ y_1<Y\leqslant y_2\}$上的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=P\{x_1<X\leqslant x_2,\ y_1<Y\leqslant y_2\}$$
$$=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1).$$

(2) 二维随机变量的边缘分布函数　设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，分别称函数

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

和

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

为(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布函数.

(二) 二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布

1. 二维离散型随机变量的概率分布

如果二维随机变量(X,Y)可能取的值为$(x_i,y_j)(i,j=1,2,\cdots)$，则称$(X,Y)$为二维离散型随机变量. 如果$(X,Y)$取值$(x_i,y_j)$的概率为

$$P\{X=x_i,\ Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,\ j=1,2,\cdots,$$

其中 $p_{ij}\geqslant 0\ (i,j=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$，则称上式为二维离散型随机变量$(X,Y)$的概率分布或随机变量 X 和 Y 的联合概率分布.

2. 边缘概率分布

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

$$P\{X=x_i,\ Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,\ j=1,2,\cdots,$$

则分别称

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot},\quad i=1,2,\cdots$$

和

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j},\quad j=1,2,\cdots$$

为(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘概率分布.

3. 条件概率分布

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

$$P\{X=x_i,\ Y=y_j\}=p_{ij},\ i,\ j=1,2,\cdots,$$

对于给定的 j，如果 $P\{Y=y_j\}>0\quad(j=1,2,\cdots)$，则称

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\ i=1,\ 2,\ \cdots$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件概率分布. 对于给定的 i，如果$P\{X=x_i\}>0\quad(i=1,2,\cdots)$，则称

$$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\ j=1,\ 2,\ \cdots$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件概率分布.

(三) 二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度

1. 二维连续型随机变量的概率密度

设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，如果存在非负函数$f(x,y)$，使得对于任意实数 x 和 y，都有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量，函数$f(x,y)$称为(X,Y)的概率密度或随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

二维随机变量(X,Y)的概率密度$f(x,y)$具有如下性质：

① $f(x,y)\geqslant 0$.

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$.

③ 如果$f(x,y)$在点(x,y)处连续，则有

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

④ 随机点(X,Y)落在xOy平面上区域G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 二维连续型随机变量的边缘概率密度

设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，则分别称

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,\ x\in\mathrm{R}\ 和 f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x,\ y\in\mathrm{R}$$

为(X,Y)关于X和关于Y的边缘概率密度.

3. 二维连续型随机变量的条件概率密度

(1) 条件分布函数　设(X,Y)是二维随机变量．y是给定的实数．如果对于任意给定的正数ε，有$P\{y<Y\leqslant y+\varepsilon\}>0$，且极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} P\{X\leqslant x\,|\,y<Y\leqslant y+\varepsilon\}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P\{X\leqslant x,y<Y\leqslant y+\varepsilon\}}{P\{y<Y\leqslant y+\varepsilon\}},\ x\in\mathrm{R}$$

存在，则称此极限为在条件$Y=y$下X的条件分布函数，记作$F_{X|Y}(x|y)$或$P\{X\leqslant x\,|\,Y=y\}$．类似地可定义$F_{Y|X}(y|x)$.

(2) 条件概率密度　设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$．边缘概率密度$f_X(x)$和$f_Y(y)$连续且恒大于0．则称$\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在条件$Y=y$下X的条件概率密度．称$\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$为在条件$X=x$下Y的条件概率密度，分别记作$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$，即

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\ f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

对于二维连续型随机变量(X,Y)的条件分布函数$F_{X|Y}(x|y)$和$F_{Y|X}(y|x)$，有

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}t,\ F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,t)}{f_X(x)}\mathrm{d}t.$$

(四) 随机变量的独立性

设二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$．关于X和关于Y的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$．如果对于任意实数x和y，有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量X和Y相互独立.

如果(X,Y)是二维离散型随机变量，则随机变量X和Y相互独立的充分必要条件是

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,$$

即 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}\quad(i,j=1,2,\cdots)$.

如果(X,Y)是二维连续型随机变量，则随机变量X和Y相互独立的充分必要条件是

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),\ (x,y)为f(x,y),\ f_X(x),\ f_Y(y)的连续点.$$

(五) 二维均匀分布和二维正态分布

1. 二维均匀分布

如果二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 G 是 xOy 平面上的有界区域，A 为 G 的面积，则称(X,Y)在区域 G 上服从均匀分布.

2. 二维正态分布

如果二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},\ x,\ y\in\mathbf{R},$$

其中 μ_1，μ_2，$\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，$-1<\rho<1$ 均为常数. 则称(X,Y)服从参数为 μ_1，μ_2，σ_1，σ_2 和 ρ 的二维正态分布，记作

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$$

也称(X,Y)为二维正态随机变量.

在二维正态随机变量(X,Y)的概率密度中，参数 μ_1 和 σ_1^2 是随机变量 X 的数学期望和方差. μ_2 和 σ_2^2 是随机变量 Y 的数学期望和方差，ρ 是随机变量 X 和 Y 的相关系数(见随机变量的数字特征).

如果$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,则$(X,Y)$关于 X 和关于 Y 的边缘分布都是正态分布，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$；随机变量 X 和 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$.

(六) 两个随机变量函数的分布

设二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$，则随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=\iint\limits_{g(x,y)\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果 $Z=X+Y$，则 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\mathrm{d}y\quad\left(\text{或}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)\mathrm{d}x\right),$$

由此可得 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y.$$

如果随机变量 X 和 Y 相互独立，(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$和 $f_Y(y)$，则上式可化为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

这两个公式称为卷积公式，记为 f_X*f_Y，即

$$f_X*f_Y=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则随机变量 $Z=X+Y$ 服从正态分布，且

$$Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

对于不全为零的常数 k_1，k_2，随机变量 $W=k_1X+k_2Y$ 服从正态分布，且

$$W=k_1X+k_2Y\sim N(k_1\mu_1+k_2\mu_2,k_1^2\sigma_1^2+k_2\sigma_2^2).$$

设随机变量 X 和 Y 相互独立，分别具有分布函数 $F_X(x)$和 $F_Y(y)$，则随机变量 $M=\max(X,Y)$和 $N=\min(X,Y)$的分布函数分别为

$$F_{\max}(z)=P\{M\leqslant z\}=F_X(z)F_Y(z).$$

$$F_{\min}(z)=P\{N\leqslant z\}=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

（七）n 维随机变量

以上关于二维随机变量的结论，可以推广到 n（$n>2$）维随机变量.

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，$X_1=X_1(\omega)$，$X_2=X_2(\omega)$，…，$X_n=X_n(\omega)(\omega\in\Omega)$是定义在 Ω 上的随机变量，则称 n 维向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为 n 维随机向量或 n 维随机变量. 称 n 元函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\}(-\infty<x_i<+\infty,i=1,2,\cdots,n)$$

为 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数或随机变量 X_1，X_2，…，X_n 的联合分布函数.

如果存在非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得对于任意实数 x_1，x_2，…，x_n，有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n,$$

则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的概率密度.

关于 X_1，X_2，…，X_n 中任意 k（$1\leqslant k<n$）个随机变量 X_{i_1}，X_{i_2}，…，X_{i_k}的边缘分布函数为

$$F_{X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_k}}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})=P\{X_{i_1}\leqslant x_{i_1},X_{i_2}\leqslant x_{i_2},\cdots,X_{i_k}\leqslant x_{i_k}\}.$$

如果对于任意的 x_1，x_2，…，$x_n\in\mathbf{R}$，有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称随机变量 X_1，X_2，…，X_n 相互独立. 随机变量 X_1，X_2，…，X_n 相互独立的一个充分必要条件是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n),$$

其中 $f_{X_i}(x_i)$是$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$关于 X_i 的边缘概率密度

$$f_{X_i}(x_i)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\cdots\mathrm{d}x_n,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

设$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$的分布函数为 $F_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$的分布函数为 $F_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$(X_1,\cdots,X_m,Y_1,\cdots,Y_n)$的分布函数为$F(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)$，如果对于任意实数 x_1，x_2，…，x_m，y_1，y_2，…，y_n，有

$$F(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)=F_1(x_1,\cdots,x_m)F_2(y_1,\cdots,y_n),$$

则称$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$相互独立. 由此可得 X_i（$i=1,2,\cdots,m$）和 Y_j（$j=1,2,\cdots,n$）相互独立：对于连续函数 $g(t_1,t_2,\cdots,t_m)$和 $h(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，随机变量 $g(X_1,X_2,\cdots,X_m)$和 $h(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$相互独立.

设 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)(i=1,2,\cdots,n)$，且它们相互独立，$k_1$，$k_2$，…，$k_n$ 是不全为零的常数，则随机变量 $Z=\sum\limits_{i=1}^{n}k_iX_i$ 仍然服从正态分布，且有

$$Z=\sum_{i=1}^{n}k_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}k_i^2\sigma_i^2\right).$$

设随机变量 X_1，X_2，…，X_n 相互独立，分布函数分别为 $F_{X_1}(x_1)$，$F_{X_2}(x_2)$，…，$F_{X_n}(x_n)$，则随机变量 $M=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和 $N=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数分别为

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)],\quad z\in\mathbf{R}.$$

如果 X_1，X_2，…，X_n 还具有相同的分布函数 $F(x)$，则有

$$F_{\max}(z)=[F(z)]^n,$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^n,\quad z\in\mathbf{R}.$$

·例题详解·

例 3.1 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则$P\{X+Y\leqslant 1\}=$ ________.

[答案] $\frac{1}{4}$.

[提示] 本题考查二维随机变量由概率密度求概率的基本方法.

[解] $P\{X+Y\leqslant 1\}=\iint\limits_{x+y\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}6x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}6x(1-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

[典型错误] 将答案写成1. 估计是这样得来的:

$$P\{X+Y\leqslant 1\}=\iint\limits_{x+y\leqslant 1}6x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}6x\mathrm{d}y=1.$$

这是概念性的错误, $f(x,y)$是个分段函数. 仅当$0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$时$f(x,y)=6x$, 所以实际的积分区域应是$0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$与$x+y\leqslant 1$的交, 而将所求概率直接写成$\iint\limits_{x+y\leqslant 1}6x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$显然是错误的.

例 3.2 设X和Y为两个随机变量, 且

$$P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7},\ P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7},$$

则$P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=$ ______.

[答案] $\frac{5}{7}$.

[提示] $\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=\{X\geqslant 0\}\cup\{Y\geqslant 0\}$, 利用概率的加法公式可得.

[解] 记$A=\{X\geqslant 0\}$, $B=\{Y\geqslant 0\}$. 则

$$\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=A\cup B,\ \{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=AB.$$

从而 $P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=P\{X\geqslant 0\}+P\{Y\geqslant 0\}-P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.$$

[典型错误] 错认为$\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=\{X\geqslant 0\}\cap\{Y\geqslant 0\}$; 部分考生对用随机变量表示的随机事件不理解, 不会用加法公式计算, 总想找到(X,Y)的分布而后算概率.

例 3.3 设随机变量X与Y相互独立, 且均服从区间$[0,3]$上的均匀分布, 则$P\{\max(X,Y)\leqslant 1\}=$ ________.

[答案] $\frac{1}{9}$.

[提示] $\{\max(X,Y)\leqslant 1\}=\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}$.

[解] $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1\}P\{Y\leqslant 1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

[典型错误] ① 填$\frac{5}{9}$, $P\{\max(X,Y)\leqslant 1\}=1-P\{X\geqslant 1,Y\geqslant 1\}=1-P\{X\geqslant 1\}P\{Y\geqslant 1\}=1-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$. 或者,

$$\begin{aligned}P\{\max(X,Y)\leqslant 1\}&=P\{(X\leqslant 1)或(Y\leqslant 1)\}\\&=P\{X\leqslant 1\}+P\{Y\leqslant 1\}-P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}.\end{aligned}$$

② 填$\frac{2}{3}$, $P\{\max(X,Y)\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1\}+P\{Y\leqslant 1\}$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

例 3.4 从数 1，2，3，4 中任取一个数，记为 X，再从 1，…，X 中任取一个数，记为 Y，则 $P\{Y=2\}$ = ________.

[答案] $\frac{13}{48}$.

[提示] 本题考查离散随机变量的概率分布和全概率公式.

[解] $P\{Y=2\}=\sum\limits_{i=2}^{4}P\{X=i\}P\{Y=2\mid X=i\}=\sum\limits_{i=2}^{4}\frac{1}{4}\times\frac{1}{i}=\frac{13}{48}$.

[典型错误] 对由随机变量表示的随机事件不理解，不会用概率公式计算.

例 3.5 设平面区域 D 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0$，$x=1$，$x=e^2$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为________.

[答案] $\frac{1}{4}$.

[提示] 本题考查服从二维均匀分布随机变量的概率密度以及边缘概率密度. 由于只求一点处的值，从而变得简单了.

[解] 区域 D 的面积为 $A=\int_1^{e^2}\frac{dx}{x}=(\ln|x|)\Big|_1^{e^2}=2$，故 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy, & 1\leqslant x\leqslant e^2\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 1\leqslant x\leqslant e^2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

故 $f_X(2)=\frac{1}{4}$.

[典型错误] 填 1. 误算了 $f(x,y)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

例 3.6 设相互独立的两个随机变量 X，Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为：

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

，则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为：________.

[答案]

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

.

[提示] 本题考查二维离散型随机变量函数的分布律求法，先找出 Z 的取值范围，而后分别计算概率.

[解] $P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\frac{3}{4}$,

故 Z 的分布律为：

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

.

例 3.7 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则

(A) $P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　(B) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

(C) $P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　(D) $P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

[答案] (B).

[提示] 由于两个独立正态随机变量的和或差都还是正态随机变量，所以可知 $X+Y$ 或 $X-Y$ 的分布，从而求出概率.

[解] 因为 $X+Y\sim N(1,2)$，所以

$$P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{1}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}.$$

或 $P\{X+Y\leqslant 1\}=P\{X+Y>1\}=\frac{1}{2}$，故应选(B).

[典型错误] ① 选(A). 由于熟知 $\Phi(0)=\frac{1}{2}$，误以为 $P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.

② 选(D). 错在认为 $X-Y\sim N(1,2)$，计算期望值时出现错误.

例 3.8 设随机变量 X_i 的概率分布为

X_i	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$(i=1,2)$，

且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$，则 $P\{X_1=X_2\}$ 等于

(A) 0. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

[答案] (A).

[提示] X_1，X_2 同分布并不是相等，$\{X_1=X_2\}=\{X_1=X_2=-1\}\cup\{X_1=X_2=0\}\cup\{X_1=X_2=1\}$，分别求出三部分的概率.

[解] 由于 $P\{X_1X_2=0\}=1$. 从而 $P\{X_1\neq 0,X_2\neq 0\}=0$，即

$$P\{X_1=-1,X_2=-1\}=P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=-1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0,$$

而同样由题设知，

$$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=-1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X_1=0,X_2=-1\}=P\{X_2=-1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_2=1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_1=1\}=\frac{1}{4},$$

故 $P\{X_1=0,X_2=0\}=0$，从而 $P\{X_1=X_2\}=P\{X_1=X_2=-1\}+P\{X_1=X_2=0\}+P\{X_1=X_2=1\}=0$，应选(A).

[典型错误] ① 选(B). 原因是错误地认为 $P\{X_1=X_2\}=P\{X_1=X_2=0\}=P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}=\frac{1}{4}$，但 X_1 与 X_2 并不独立.

② 选(D). 误认为 X_1，X_2 同分布就一定相等.

例 3.9 设随机变量 X 和 Y 相互独立，其概率分布为

X	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列式子正确的是

(A) $X=Y$. (B) $P\{X=Y\}=0$. (C) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$. (D) $P\{X=Y\}=1$.

[答案] (C).

[提示] 类似上题，计算 $P\{X=Y\}=P\{X=Y=-1\}+P\{X=Y=1\}$.

[解]
$$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}\\&=P\{X=-1\}P\{Y=-1\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故选(C).

[典型错误] 选(A)或(D). 误认为 X, Y 同分布一定相等.

例 3.10 设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则

(A) $a=0.2$, $b=0.3$. (B) $a=0.4$, $b=0.1$. (C) $a=0.3$, $b=0.2$. (D) $a=0.1$, $b=0.4$.

[答案] (B).

[提示] 本题考查二维离散型随机变量的概率分布，要理解事件独立性的概念. 会求相关概率. 由题设得到 a. b 的方程.

[解] 已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，也就是

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}.$$

而

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a,$$

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.4+a,$$

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b,$$

则

$$a=(0.4+a)(a+b).$$

又由概率分布的性质知 $0.4+a+b+0.1=1$，即 $a+b=0.5$，从而可解得 $a=0.4$，$b=0.1$，故选(B).

[典型错误] 部分考生忘记还有概率分布性质可用，而解不出 a. b 的值：错选(A)，(C)，(D)，主要是在利用概率分布时出现错误.

例 3.11 设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，且它们不相关，则

(A) X 与 Y 一定独立. (B) (X,Y)服从二维正态分布.

(C) X 与 Y 未必独立. (D) $X+Y$ 服从一维正态分布.

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查正态分布的相关性质，要熟悉相关结论，用举反例等方法排除错误答案.

[解] 若设(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}\left[e^{-\frac{9}{16}\left(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2\right)}+e^{-\frac{9}{16}\left(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2\right)}\right].$$

经计算，

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad \rho_{XY}=0.$$

即 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，且 X 与 Y 不相关.

由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立. 排除(A).

由 $f(x,y)$的表达式知，(X,Y)不服从二维正态分布，排除(B).

可算得 $Z=X+Y$ 的密度函数为 $f_Z(z)=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\left(e^{-\frac{3z^2}{16}}+\sqrt{2}e^{-\frac{3z^2}{8}}\right)$. 故 $X+Y$ 不服从一维正态分布. 排除(D)，答案应选(C).

[典型错误] ① 选(A). 认为正态随机变量不相关的充要条件是相互独立. 错在对已知结论不甚理解. 正确结论是：若(X,Y)为二维正态随机变量，则 X 与 Y 不相关的充要条件是 X 与 Y 相互独立.

② 选(B). 把必要条件当成充分条件了. 已知性质是：设(X,Y)服从二维正态分布. 则 X，Y 服从正态分布；反之不对.

③ 选(D). X 与 Y 不相关推不出 X 与 Y 独立. 从而也推不出 $X+Y$ 服从一维正态分布.

例 3.12 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $P\{X<Y\}$.

[提示] 由概率密度求概率有公式：设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，D 为 xOy 面上一区域，则

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

[解] $P\{X<Y\}=\iint_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^y e^{-(x+y)}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-y}(1-e^{-y})\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

[典型错误] $P\{X<Y\}=\int_{-\infty}^{Y}f_X(x)\mathrm{d}x$，把 Y 当成数值了.

例 3.13 设随机变量 X 和 Y 独立，都在区间[1,3]上服从均匀分布；引进事件 $A=\{X\leqslant a\}$，$B=\{Y>a\}$，已知 $P(A\cup B)=\frac{7}{9}$，求常数 a.

[提示] 由 X 和 Y 独立，可知 A 与 B 相互独立.

[解] 设 $p=P(A)$. 由 X 与 Y 同分布，知

$$P(\bar{B})=P\{Y\leqslant a\}=P\{X\leqslant a\}=P(A)=p,\ P(B)=1-p.$$

由

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=p+(1-p)-p(1-p)$$
$$=p^2-p+1=\frac{7}{9},$$

得 $p_1=\frac{1}{3}$，$p_2=\frac{2}{3}$. 于是 a 有两个值：由 $\frac{a-1}{2}=p_1$ 得 $a_1=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$；由 $\frac{a-1}{2}=p_2$ 得 $a_2=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$.

[典型错误] 由于粗心，误以为 $p=P(A)=P(B)$.

例 3.14 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布. 每位乘客在中途下车的概率为 $p\ (0<p<1)$，且中途下车与否相互独立. 以 Y 表示在中途下车的人数. 求：

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

[提示] 由于乘客下车与否相互独立，所以第一问可看成一个 n 重贝努利试验问题. 第二问中的二维随机变量是离散的.

[解] (1) $P\{Y=m\mid X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$，$0\leqslant m\leqslant n$，$n=0,1,2,\cdots$.

(2) $P\{X=n,Y=m\}=P\{Y=m\mid X=n\}P\{X=n\}$

$$=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\cdot\frac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n,\ 0\leqslant m\leqslant n,\ n=0,1,2,\cdots.$$

[典型错误] ① 把 $Y\Big|_{X=n}\sim B(n,p)$ 错认为 $Y\sim B(n,p)$.

② 不知使用乘法公式求解 $P\{X=n,Y=m\}$.

例 3.15 甲、乙两人独立地各进行两次射击，假设甲的命中率为 0.2，乙的命中率为 0.5. 以 X 和 Y 分别表示甲和乙的命中次数. 试求 X 和 Y 的联合概率分布.

[提示] 本题考查离散型随机变量 X 与 Y 相互独立的充分必要条件，由此条件易得 (X,Y) 的概率分布.

[解] X 服从参数为 $n=2$，$p=0.2$ 的二项分布，Y 服从参数为 $n=2$，$p=0.5$ 的二项分布，它们的概率分布分别为：

X	0	1	2
P	0.64	0.32	0.04

Y	0	1	2
P	0.25	0.5	0.25

由 X 和 Y 的独立性知 X 和 Y 的联合概率分布为：

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.16	0.08	0.01
1	0.32	0.16	0.02
2	0.16	0.08	0.01

[典型错误] 误认为 X，Y 都服从几何分布，从而得到错误结果.

例 3.16 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 X 和 Y 的联合分布函数 $F(x,y)$.

[提示] 由联合概率密度求联合分布函数只需要计算二重积分

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}v,$$

在计算过程中注意区域的划分.

[解] (1) 当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，有

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=0.$$

(2) 当 $x>1$ 且 $y>1$ 时，有

$$F(x,y)=1.$$

(3) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，有

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v=x^2y^2.$$

(4) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$，且 $y>1$ 时，有

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^1 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v=x^2.$$

(5) 当 $x>1$ 且 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，有

$$F(x,y)=\int_0^1\int_0^y 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v=y^2.$$

故 X 和 Y 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{ 或 }y<0,\\ x^2y^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ y>1,\\ y^2, & x>1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & x>1,\ y>1.\end{cases}$$

[典型错误] 不分区域，错误地得到 $F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v=x^2y^2$，$-\infty<x,\ y<+\infty$.

例 3.17 假设随机变量 U 在区间$[-2,2]$上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & U\leqslant -1,\\ 1, & U>-1;\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}-1, & U\leqslant 1,\\ 1, & U>1.\end{cases}$$

试求 X 和 Y 的联合概率分布.

[提示] 首先应通过所给的 X，Y 的取值，判断出(X,Y)的几种可能值，以及取这些可能值的条件；其次熟悉均匀分布的定义并会求在任一点 x 处的分布值 $P\{U<x\}$.

[解] 随机向量(X,Y)有四个可能值：$(-1,-1)$，$(-1,1)$，$(1,-1)$，$(1,1)$.

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\leqslant -1,U\leqslant 1\}=\frac{1}{4};$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\leqslant -1,U>1\}=0;$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\leqslant 1\}=\frac{1}{2};$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=\frac{1}{4}.$$

于是，得 X 和 Y 的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

［典型错误］ 考生被所给的随机变量之间的关系搞糊涂，从而无从下手．实际上，求二维离散型随机变量的概率分布，无非是先找出(X,Y)的所有可能取值，而后分别求各个值上的取值概率．

例 3.18 假设二维随机变量(X,Y)在矩形 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$上服从均匀分布．记

$$U=\begin{cases}0, & X\leqslant Y,\\ 1, & X>Y;\end{cases}\quad V=\begin{cases}0, & X\leqslant 2Y,\\ 1, & X>2Y.\end{cases}$$

求 U 和 V 的联合概率分布．

［提示］ 先判断(U,V)有几种可能取值，而后弄清各取值的条件，将求(U,V)的分布问题转化为计算(X,Y)的相关概率问题．

［解］ 由题设可得

$$P\{X\leqslant Y\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X>2Y\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y<X\leqslant 2Y\}=\frac{1}{4}.$$

(U,V)有四个可能值：$(0,0)$，$(0,1)$，$(1,0)$，$(1,1)$．

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X\leqslant Y,X\leqslant 2Y\}=P\{X\leqslant Y\}=\frac{1}{4};$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X\leqslant Y,X>2Y\}=0;$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\leqslant 2Y\}=P\{Y<X\leqslant 2Y\}=\frac{1}{4};$$

$$P\{U=1,V=1\}=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

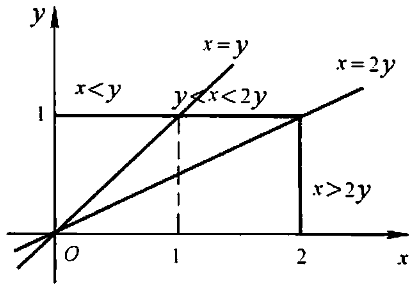

图 28

例 3.19 设 A，B 为两个随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生};\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求：(Ⅰ) 二维随机变量(X,Y)的概率分布；

(Ⅱ) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布．

［提示］ 本题考查的知识点较多，包括概率公式运算、二维离散型随机变量的概率分布、二维离散型随机变量简单函数的概率分布的求法等，是一道综合题．

［解］ (Ⅰ) $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$，$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$，则

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{2}{3},$$

$\left(\text{或 } P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}\right)$.

故(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(Ⅱ) Z 的可能取值为 0，1，2.

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3},$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12},$$

即 Z 的概率分布为

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

[典型错误] ① 不会把求(X,Y)的概率分布转化成计算随机事件的概率. ② 因计算量较大，出现不应有的计算错误. ③ 未能把 Z 正确理解为一维离散型随机变量. 因为常见的题型多是求 Z 的概率密度.

例 3.20 设二维随机变量(X,Y)的概念分布为

X \ Y	−1	0	1
−1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中 a，b，c 为常数，且 X 的数学期望 $EX=-0.2$，$P\{Y\leqslant 0\mid x\leqslant 0\}=0.5$，记 $Z=X+Y$. 求

(Ⅰ) a，b，c 的值；

(Ⅱ) Z 的概率分布；

(Ⅲ) $P\{X=Z\}$.

[提示] 本题是一道综合题，考核的知识点较多，包括二维离散型随机变量的概率分布的性质、数学期望、条件概率、二维离散型随机变量函数的概率分布等. 难点在于由已知条件求解 a，b，c 的值. 由已知的两个条件可得关于a,b,c 的两个方程，第三个方程由概率分布的简单性质而得，从而联立解出a,b,c.

[解] (Ⅰ) 由概率分布的性质知，

$$a+b+c+0.6=1,$$

即

$$a+b+c=0.4.$$

由 $EX=-0.2$，可得 $-a+c=-0.1$.

再由 $P\{Y\leqslant 0\mid X\leqslant 0\}=\frac{P\{X\leqslant 0,Y\leqslant 0\}}{P\{X\leqslant 0\}}=\frac{a+b+0.1}{a+b+0.5}=0.5$,

得 $a+b=0.3$.

解以上关于 a，b，c 的三个方程得 $a=0.2$，$b=0.1$，$c=0.1$.

(Ⅱ) Z 的可能取值为 -2，-1，0，1，2

$$P\{Z=-2\}=P\{X=-1,\ Y=-1\}=0.2,$$

$$P\{Z=-1\}=P\{X=-1,\ Y=0\}+P\{X=0,\ Y=-1\}=0.1,$$

$$P\{Z=0\}=P\{X=-1,\ Y=1\}+P\{X=0,\ Y=0\}+P\{X=1,\ Y=-1\}=0.3,$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,\ Y=0\}+P\{X=0,\ Y=1\}=0.3,$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,\ Y=1\}=0.1,$$

即 Z 的概率分布为

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

(Ⅲ) $P\{X=Z\}=P\{Y=0\}=0+b+0.1=0.1+0.1=0.2$.

[典型错误] ① 不知道由概率分布的性质得到 $a+b+c+0.6=1$；

② 对于用随机变量表达的随机事件不理解，不知道利用条件概率公式求解 $P\{Y\leqslant 0|X\leqslant 0\}$；

③ 在求解(Ⅲ)时，不会把 $Z=X+Y$ 代入得 $P\{X=Z\}=P\{Y=0\}$.

例 3.21 设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量(X,Y)的分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值. 试将其余数值填入表中的空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

[提示] 正确解答本题并不难，只要注意到 X 与 Y 相互独立并熟悉(X,Y)的概率分布与关于 X 和关于 Y 的边缘概率分布之间的关系以及它们的简单性质等. 计算时用到如下结论：$\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{3}p_{ij}=1$，$\sum\limits_{i=1}^{2}p_{i\cdot}=1$，$\sum\limits_{j=1}^{3}p_{\cdot j}=1$，$p_{\cdot j}=\sum\limits_{i=1}^{2}p_{ij}$，$p_{i\cdot}=\sum\limits_{j=1}^{3}p_{ij}$，$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，$i=1$，2，$j=1$，2，3.

[解]

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

过程如下：

$$p_{11}=p_{\cdot 1}-p_{21}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24},$$

$$p_{1\cdot}=\frac{p_{11}}{p_{\cdot 1}}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{4},$$

$$p_{13}=p_{1\cdot}-p_{11}-p_{12}=\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=\frac{1}{12},$$

$$p_{2\cdot}=1-p_{1\cdot}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

$$p_{\cdot 2}=\frac{p_{12}}{p_{1\cdot}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2},$$

$$p_{22}=p_{\cdot 2}-p_{12}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8},$$

$$p_{23}=p_{2\cdot}-p_{21}-p_{22}=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4},$$

$$p_{\cdot 3}=p_{13}+p_{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}.$$

[典型错误] 对相关性质不熟悉，想用解方程组方法求解.

例 3.22 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

(1) 求 X 的概率密度$f_X(x)$；(2)求概率 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

[提示] 由联合概率密度 $f(x,y)$求边缘概率密度 $f_X(x)$，利用公式 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$. 求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$所用公式见例 3.12 之提示.

[解] (1) $f_X(x)=\begin{cases}\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

(2) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\iint\limits_{x+y\leqslant 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}[e^{-(1-x)}-e^{-x}]dx=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}.$$

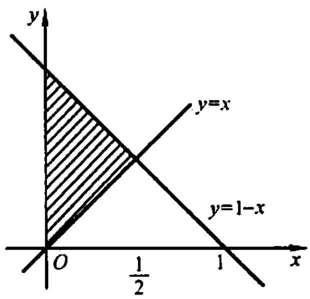

图 29

[典型错误] 答案为 $f_X(x)=e^{-x}(-\infty<x<+\infty)$. 错在不知道如何分段求$f_X(x)$.

例 3.23 一电子仪器由两个部件构成. 以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命(单位:千小时)，已知 X 和 Y 的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1)问 X 和 Y 是否独立? (2)求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率 α.

[提示] 有两种办法判断 X 与 Y 是否独立：其一，验证是否有 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$成立. 若成立，表明 X 与 Y 独立，否则 X 与 Y 不独立：其二，验证是否有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$(对 $f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$的每个连续点)成立，若成立，表明 X 与 Y 独立，若存在 $f(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$的连续点(x,y)使 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，则 X 与 Y 不独立.

[解法 1] (1) X 和 Y 的分布函数分别为：

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

由于 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，知 X 和 Y 独立.

(2) $\alpha=P\{X>0.1,Y>0.1\}=P\{X>0.1\}\cdot P\{Y>0.1\}$

$$=[1-F_X(0.1)]\cdot[1-F_Y(0.1)]=\mathrm{e}^{-0.05}\cdot\mathrm{e}^{-0.05}=\mathrm{e}^{-0.1}.$$

[解法 2] (1) 以 $f(x,y)$，$f_1(x)$和 $f_2(y)$分别代表(X,Y)，X 和 Y 的概率密度，有

$$f(x,y)=\frac{\partial F^2(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}0.25\mathrm{e}^{-0.5(x+y)}, & x\geqslant0,\ y\geqslant0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}0.5\mathrm{e}^{-0.5x}, & x\geqslant0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0.5\mathrm{e}^{-0.5y}, & y\geqslant0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

由于 $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$知 X 和 Y 独立.

(2) $\alpha=P\{X>0.1,Y>0.1\}=\int_{0.1}^{+\infty}\int_{0.1}^{+\infty}0.25\mathrm{e}^{-0.25(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{0.1}^{+\infty}0.5\mathrm{e}^{-0.5x}\mathrm{d}x\cdot\int_{0.1}^{+\infty}0.5\mathrm{e}^{-0.5y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-0.1}.$$

例 3.24 设随机变量 X 在区间$(0,1)$内服从均匀分布．在 $X=x$ $(0<x<1)$的条件下，随机变量 Y 在区间$(0,x)$内服从均匀分布．求：

(Ⅰ) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度；

(Ⅱ) Y 的概率密度；

(Ⅲ) 概率 $P\{X+Y>1\}$.

[提示] 本题考查连续型随机变量的联合概率密度、边缘概率密度和条件密度的概念及它们之间的关系和求法，同时考查已知二维随机变量的概率密度求相关概率的方法．本题的难点在于怎样理解题中的已知条件，并由此写出在$X=x$条件下，Y 的条件密度.

[解] (Ⅰ) X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在 $X=x$ $(0<x<1)$条件下，Y 的条件密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $0<y<x<1$ 时，随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{x},$$

在其他点(x,y)处，有 $f(x,y)=0$，即

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ) 当 $0<y<1$，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_y^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\ln y;$$

当 $y\leqslant0$ 或 $y\geqslant1$ 时，$f_Y(y)=0$. 因此

$$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅲ) 所求概率

$$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{x}\frac{1}{x}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx = 1 - \ln 2.$$

[典型错误] ① 不能由已知条件求出条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

② 不知道关系式 $f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$.

③ 当 $x \leqslant 0$ 或 $x \geqslant 1$ 时，不会求 $f(x,y)$. 其实由 $f_X(x) = 0$ 易得 $f(x,y) = 0$.

④ 求出 $f_Y(y) = -\ln y$，而不是正确答案中的分段函数.

⑤ 在计算概率 $P\{X+Y>1\}$时，误为

$$P\{X+Y>1\} = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{1-y} \frac{1}{x} dx = \ln 2.$$

例 3.25 设 ξ，η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量. 已知 ξ 的分布律为 $P\{\xi = i\} = \frac{1}{3}(i = 1,2,3)$. 又设 $X = \max\{\xi, \eta\}$，$Y = \min\{\xi, \eta\}$. 求二维随机变量(X,Y)的分布律.

[提示] 求二维离散型随机变量的分布律就是两点：一，找出所有可能的取值；二，分别求各个取值的概率，在求概率时转化为求(ξ,η)相关联的概率.

[解] 由于总有 $Y \leqslant X$，故

当 $i<j$ 时，$P\{X=i, Y=j\} = 0$；

当 $i=j$ 时，$P\{X=i, Y=i\} = P\{\xi=i, \eta=i\} = P\{\xi=i\}P\{\eta=i\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$；

当 $i>j$ 时，$P\{X=i, Y=j\} = P\{\xi=i, \eta=j\} + P\{\xi=j, \eta=i\}$

$$= P\{\xi=i\}P\{\eta=j\} + P\{\xi=j\}P\{\eta=i\}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

则(X,Y)的分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

例 3.26 假设随机变量 X_1，X_2，X_3，X_4 相互独立，且同分布 $P\{X_i = 0\} = 0.6$，$P\{X_i = 1\} = 0.4$ $(i = 1,2,3,4)$. 求行列式 $X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

[提示] 本题考查多维离散型随机变量简单函数的概率分布求法. 考虑分两步求解：第一步求 $Y_1 = X_1X_4$，$Y_2 = X_2X_3$ 的概率分布；第二步求 $X = Y_1 - Y_2$ 的概率分布.

[解] 记 $Y_1 = X_1X_4$，$Y_2 = X_2X_3$，则 $X = Y_1 - Y_2$. 且 Y_1 和 Y_2 独立同分布：

$$P\{Y_1 = 1\} = P\{Y_2 = 1\} = P\{X_2 = 1, X_3 = 1\} = 0.16,$$

$$P\{Y_1 = 0\} = P\{Y_2 = 0\} = 1 - 0.16 = 0.84.$$

随机变量 $X = Y_1 - Y_2$ 有三个可能值：-1，0，1.

$$P\{X = -1\} = P\{Y_1 = 0, Y_2 = 1\} = 0.84 \times 0.16 = 0.134\,4,$$

$$P\{X = 1\} = P\{Y_1 = 1, Y_2 = 0\} = 0.16 \times 0.84 = 0.134\,4,$$

$$P\{X = 0\} = 1 - 2 \times 0.134\,4 = 0.731\,2.$$

于是行列式 X 的概率分布为

X	-1	0	1
P	0.134 4	0.731 2	0.134 4

[典型错误] 由于是求四个随机变量的函数的概率分布，不分步而直接求解还是比较复杂的，容易出现计算错误．

例 3.27 假设一电路装有三个同种电气元件，其工作状态相互独立，且无故障工作时间都服从参数为 $\lambda>0$的指数分布．当三个元件都无故障时，电路正常工作，否则整个电路不能正常工作．试求电路正常工作的时间 T 的概率分布．

[提示] 记 X_i 为第 i 个元件无故障工作的时间，$i=1,2,3$．则 $T=\min\{X_1,X_2,X_3\}$．

[解] 以 X_i （$i=1,2,3$)表示第 i 个元件无故障的时间，则X_1,X_2,X_3 相互独立同分布．其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

显然，$T=\min\{X_1,X_2,X_3\}$．

设 $G(t)$是 T 的分布函数，当 $t\leqslant 0$ 时，$G(t)=0$，当 $t>0$ 时，

$$\begin{aligned}G(t)&=P\{T\leqslant t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{X_1>t,X_2>t,X_3>t\}\\&=1-P\{X_1>t\}\cdot P\{X_2>t\}P\{X_3>t\}=1-[1-F(t)]^3=1-e^{-3\lambda t},\end{aligned}$$

所以

$$G(t)=\begin{cases}1-e^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

T 服从参数为 3λ 的指数分布．

[典型错误] 对于应用题，考生往往不能把问题转化成概率语言来描述．或者建立不起来 T 与 X_1．X_2，X_3 的联系．

例 3.28 设随机变量 X 与 Y 独立，X 服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，Y 服从$[-\pi,\pi]$上的均匀分布．求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度(计算结果用标准正态分布函数 Φ 表示)．

[提示] 本题考查两个独立随机变量之和的概率分布，较常见，直接用卷积公式求解即可．

[解] X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty;\ f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

由于 X 与 Y 独立，可用卷积公式求 $Z=X+Y$ 的概率密度．注意到 $f_Y(y)$仅在$[-\pi,\pi]$上才取非零值，所以 Z 的概率密度函数为

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\pi}^{\pi}f_X(z-y)\cdot f_Y(y)dy\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy.\end{aligned}$$

令 $t=\frac{z-y-\mu}{\sigma}$，则有

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right].$$

[典型错误] 由于 $f_Z(z)$只能用积分形式表示，部分考生不知道通过积分的变量代换来建立与 $\Phi(x)$的联系，其中

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

例 3.29 设随机变量 X、Y 相互独立，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度．

[提示] 本题考查两个独立随机变量的简单函数的概率密度，有两种求法：其一，先求 $F_Z(z)$，而

$f_Z(z)=F'_Z(z)$；其二，利用卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-2x)\mathrm{d}x$.

［解法1］ 由于 X 与 Y 相互独立，所以(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此，Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{2X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x+y\leqslant z} f_X(x)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases} 0, & z\leqslant 0, \\ \int_0^{\frac{z}{2}}(1-e^{2x-z})\,\mathrm{d}x, & 0<z\leqslant 2, \\ \int_0^1 (1-e^{2x-z})\,\mathrm{d}x, & z>2, \end{cases}$$

所以，Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases} 0, & z\leqslant 0, \\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0<z\leqslant 2, \\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z>2. \end{cases}$$

［解法2］ 由于 X 与 Y 相互独立，所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-2x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f_Y(z-2x)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases} 0, & z\leqslant 0 \\ \int_0^{\frac{z}{2}} e^{-(z-2x)}\mathrm{d}x, & 0<z\leqslant 2 \\ \int_0^1 e^{-(z-2x)}\mathrm{d}x, & z>2 \end{cases}=\begin{cases} 0, & z\leqslant 0, \\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0<z\leqslant 2, \\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z>2. \end{cases}$$

［典型错误］ ①在解法 1 中，求二重积分时不会对 Z 分段讨论. ②在解法 2 中，由于没有现成的公式，所以卷积公式写错，或者写出卷积公式又不知如何对 Z 的不同区间进行求积分.

例 3.30 设二维随机变量(X, Y)在矩形 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$上服从均匀分布，试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度 $f(s)$.

［提示］ $S=XY$，本题仍是求二维随机变量的概率密度，先求 S 的分布函数 $F(s)$，再由 $f(s)=F'(s)$得到概率密度.

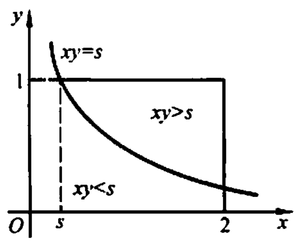

图 30

［解］ 二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & (x,y)\in G, \\ 0, & (x,y)\overline{\in} G. \end{cases}$$

设 $F(s)=P\{S\leqslant s\}$为 S 的分布函数，则

当 $s\leqslant 0$ 时，$F(s)=0$；当 $s\geqslant 2$ 时，$F(s)=1$.

现在，设 $0<s<2$. 曲线 $xy=s$ 与矩形 G 的上边交于点$(s,1)$；位于曲线 $xy=s$ 上方的点满足 $xy>s$，位于下方的点满足 $xy<s$，于是

$$F(s)=P\{S\leqslant s\}=P\{XY\leqslant s\}=1-P\{XY>s\}=1-\iint\limits_{xy>s}\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_s^2\mathrm{d}x\int_{\frac{s}{x}}^1\mathrm{d}y=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s).$$

于是，

$$f(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln s), & 0<s<2,\\ 0, & s\leqslant 0 \text{ 或 } s\geqslant 2.\end{cases}$$

［典型错误］ ① 不知道对 s 如何分段求解 $F(s)$.

② 计算二重积分时出现错误.

例 3.31　设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形 $G=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 3,1\leqslant y\leqslant 3\}$ 上的均匀分布，试求随机变量 $U=|X-Y|$ 的概率密度 $p(u)$.

［提示］ 首先正确写出正方形 G 上的均匀分布的密度函数．然后，利用分布函数的定义，先求出随机变量 U 的分布函数，求分布函数时注意将自变量 u 的变化区间进行合理的划分，以方便计算．最后求导便求出密度函数 $p(u)$.

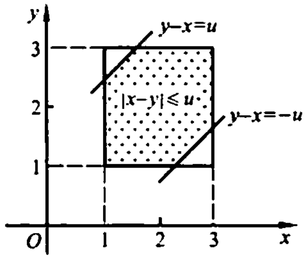

图　31

［解］ 由条件知 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & \text{若 } 1\leqslant x\leqslant 3,\ 1\leqslant y\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

以 $F(u)=P\{U\leqslant u\}(-\infty<u<\infty)$ 表示随机变量 U 的分布函数．显然，当 $u\leqslant 0$ 时，$F(u)=0$；当 $u\geqslant 2$ 时 $F(u)=1$.

设 $0<u<2$，则

$$F(u)=\iint\limits_{|x-y|\leqslant u} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{|x-y|\leqslant u}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}[4-(2-u)^2]=1-\frac{1}{4}(2-u)^2.$$

于是，随机变量的密度为

$$p(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(2-u), & 0<u<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.32　设随机变量 X 与 Y 独立，其中 X 的概率分布为

X	1	2
P	0.3	0.7

而 Y 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

［提示］ 本题考查考生应用概率的基本知识分析问题及解决问题的能力．要解答该题实际需要解决两个问题：

(1) 要说明 $U=X+Y$ 是连续型随机变量.

(2) 求 U 的密度函数.

解决这两个问题都需要知道随机变量 U 的分布函数，在求 U 的分布函数过程中要用全概率公式及随机变量独立的性质．然后再应用连续型随机变量的概率密度与其分布函数的关系导出 $g(u)$．所以本题涉及知识点较多.

［解］ 设 $F(y)$ 是 Y 的分布函数，则由全概率公式，知 $U=X+Y$ 的分布函数为.

$$\begin{aligned}G(u)&=P\{X+Y\leqslant u\}\\&=0.3P\{X+Y\leqslant u\mid X=1\}+0.7P\{X+Y\leqslant u\mid X=2\}\\&=0.3P\{Y\leqslant u-1\mid X=1\}+0.7P\{Y\leqslant u-2\mid X=2\}.\end{aligned}$$

由于 X 与 Y 独立，可见

$$G(u)=0.3P\{Y\leqslant u-1\}+0.7P\{Y\leqslant u-2\}.$$

由此得 U 的概率密度

$$g(u)=G'(u)=0.3F'(u-1)+0.7F'(u-2)$$

$$=0.3f(u-1)+0.7f(u-2).$$

本题表明了离散型随机变量 X（X 仅取有限个值）与连续型随机变量 Y 在相互独立的条件下，其和 $U=X+Y$ 是连续型随机变量.

解的开始到得出 U 的分布函数

$$G(u)=0.3P\{Y\leqslant u-1\}+0.7P\{Y\leqslant u-2\}$$

的以上步骤是证明 $U=X+Y$ 为连续型随机变量过程，$G(u)$ 对 u 求导数是求 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

[典型错误] 由于 U 是一个离散型随机变量与一个连续型随机变量的和，不知如何求解.

例 3.33 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：（Ⅰ）(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（Ⅱ）$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

（Ⅲ）$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

[提示] 本题考查的知识点较多，包括二维连续型随机变量的边缘概率密度，两个随机变量简单函数的概率密度，以及条件概率等，是一道综合题，但每一问之间联系并不紧密，可分别求解.

[解]（Ⅰ）当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{2x}\mathrm{d}y=2x$；

当 $x\leqslant0$ 或 $x\geqslant1$ 时，$f_X(x)=0$，故

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $0<y<2$ 时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x=1-\frac{y}{2};$$

当 $y\leqslant0$ 或 $y\geqslant2$ 时，$f_Y(y)=0$. 故

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（Ⅱ）[解法 1] 当 $z\leqslant0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z\geqslant2$ 时，$F_Z(z)=1$；

当 $0<z<2$ 时，

$$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=z-\frac{z^2}{4};$$

故

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

[解法 2] 由于 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)\,\mathrm{d}x$，其中

$$f(x,2x-z)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<z<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $z\leqslant0$ 或 $z\geqslant2$ 时，$f_Z(z)=0$；

当 $0<z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x=1-\frac{z}{2}$，

故

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(Ⅲ)
$$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}}=\frac{3/16}{1/4}=\frac{3}{4}.$$

[典型错误] ① 求边缘密度时不会分段，或直接求得 $f_X(x)=2x$，$f_Y(y)=1-\frac{y}{2}$.

② 在(Ⅱ)的解法 1 中 $f_Z(z)$的分段不正确；在(Ⅱ)的解法 2 中不能套用已有公式而给出错误的卷积公式；

③ 在求解第三问时，由于对用随机变量表达的随机事件不理解，不知道利用条件概率的公式求解.

四、随机变量的数字特征

·考试内容与要求·

考试内容

随机变量的数学期望(均值)、方差、标准差及其性质　随机变量函数的数学期望　矩、协方差、相关系数及其性质

考试要求

1. 理解随机变量数字特征(数学期望、方差、标准差、矩、协方差、相关系数)的概念，会运用数字特征的基本性质，并掌握常用分布的数字特征.

2. 会求随机变量函数的数学期望.

·考试内容解析·

(一) 随机变量的数学期望

1. 定义

(1) 离散型随机变量的数学期望　设离散型随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots,$$

如果无穷级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 绝对收敛，则称此无穷级数的和为随机变量 X 的数学期望或均值，记作 $E(X)$，即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k.$$

(2) 连续型随机变量的数学期望　设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，如果反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx$ 绝对收敛，则称此反常积分的值为随机变量 X 的数学期望或均值，记作 $E(X)$，即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx.$$

说明　如果上述的无穷级数或反常积分不绝对收敛，则称随机变量的数学期望不存在.

2. 性质

(1) 设 C 是常数，则有 $E(C)=C$.

(2) 设 X 是随机变量，C 是常数，则有

$$E(CX)=CE(X).$$

(3) 设 X 和 Y 是两个随机变量，则有

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y).$$