[典型错误] 类似例 1.43 不会找出两个闭区间：$[\varepsilon,e]$和$[e,b]$．考生要适当做一些练习．

小结　从以上的例题可知．“函数　极限　连续”这部分内容的核心．是准确理解极限概念．熟练掌握求极限的方法．求极限的方法可列举许多条．我们认为以下的方法是经常用到的：

(1) 根据极限定义证明某些极限．

(2) 一些初等方法．比如．有理化分子(分母)；因式分解；同乘(除)一个因式以及三角函数恒等式等等．

(3) 利用重要极限及它们的变形．

(4) 根据“单调有界数列必收敛”的准则，先证明数列极限存在．再求极限．

(5) 利用“夹逼准则”．

(6) 等价无穷小代换．除了要记住一些经常用到的等价无穷小、更要注意等价无穷小的代换只能在乘、除运算时才可进行．在加、减运算时不要做这种代换．

(7) 把函数展开为泰勒多项式(麦克劳林多项式)．

(8) 洛必达法则．这是求“未定式”极限的有力工具．但有时未必是简单的．如能把上述一些方法综合使用，会化简计算．此外，洛必达法则可以在一个题中连续使用．但在使用前必须检查它是否是“未定型”．

(9) 利用定积分概念．把某些数列的极限转化为求一个函数在闭区间上的定积分．

二、一元函数微分学

·考试内容与要求·

考试内容

导数和微分的概念　导数的几何意义和物理意义　函数的可导性与连续性之间的关系　平面曲线的切线和法线　导数和微分的四则运算　基本初等函数的导数　复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法　高阶导数的概念　某些简单函数的 n 阶导数　一阶微分形式的不变性　微分中值定理　洛必达(L'Hospital)法则　函数的极值　函数单调性　函数图形的凹凸性、拐点及渐近线　函数图形的描绘　函数最大值和最小值　弧微分　曲率的概念　曲率半径

考试要求

1．理解导数和微分的概念，理解导数与微分的关系．理解导数的几何意义．会求平面曲线的切线方程和法线方程．了解导数的物理意义，会用导数描述一些物理量．理解函数的可导性与连续性之间的关系．

2．掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式．了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分．

3．了解高阶导数的概念．会求简单函数的高阶导数．

4．会求分段函数的导数．会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数．

5．理解并会用罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理和泰勒(Taylor)定理．了解并会用柯西(Cauchy)中值定理．

6．掌握用洛必达法则求未定式极限的方法．

7．理解函数的极值概念．掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法．掌握函数最大值和最小值的求法及其简单的应用．

8．会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，会描绘函数的图形．

9．了解曲率和曲率半径的概念，会计算曲率和曲率半径．

·考试内容解析·

(一) 导数概念

1．导数定义　设函数$y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义．若自变量从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时．函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$与自变量增量 Δx 之比的极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在. 则称$f(x)$在 $x = x_0$ 处可导，此极限值称为 $f(x)$在 $x = x_0$ 处的导数. 记作$f'(x_0)$. 或$y'\Big|_{x=x_0}$，$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$等.

2. 左导数：若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限值为 $f(x)$在 $x = x_0$ 处的左导数. 记作 $f'_-(x_0)$.

3. 右导数：若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限值为 $f(x)$在 $x = x_0$ 处的右导数，记作 $f'_+(x_0)$.

4. 若函数 $f(x)$在区间(a,b)内任意点 x 处的导数$f'(x)$都存在.则称 $f(x)$在(a,b)内可导.

5. 若函数$f(x)$在(a,b)内可导,且 $f'_+(a)$及 $f'_-(b)$都存在，则称 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

(二) 函数可导的条件

1. $f(x)$在 $x = x_0$ 处可导的必要(非充分)条件是 $f(x)$在 $x = x_0$ 处连续.

2. $f(x)$在 $x = x_0$ 处可导的充分与必要条件是 $f'_-(x_0)$与 $f'_+(x_0)$存在且相等.

(三) 导数的几何意义与物理意义

1. 设函数 $f(x)$可导，则 $f'(x_0)$等于曲线 $y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处切线的斜率.

曲线 $y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线与法线方程分别是：

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

和

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad [f'(x_0) \neq 0]$$

2. 设一质点作变速直线运动. 若其位移 s 随时间 t 的变化规律为函数 $s = s(t)$，则导数$s'(t_0)$表示该质点在时刻 t_0 的瞬时速度.

注 导数的物理意义可作多种解释，如细棒状物质的线密度，电路中的电流强度. 转动物体的角速度等.

(四) 导数的计算

1. 基本初等函数的导数公式

(1) $(c)' = 0$ (c 为常数)；

(2) $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ (μ 为实数)；

(3) $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$；

(4) $(e^x)' = e^x$；

(5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$；

(6) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$；

(7) $(\sin x)' = \cos x$；

(8) $(\cos x)' = -\sin x$；

(9) $(\tan x)' = \sec^2 x$；

(10) $(\cot x)' = -\csc^2 x$；

(11) $(\sec x)' = \sec x \tan x$；

(12) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$；

(13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$；

(14) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$；

(15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$；

(16) $(\text{arccot}\, x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$.

2. 导数的四则运算法则

设函数 $u(x)$. $v(x)$都可导，则

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$；

(2) $(uv)' = u'v + uv'$. 特别$(cu)' = cu'$ (c 为常数)；

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

3. 复合函数求导法

设 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，$y=f(u)$ 在对应的 $u=\varphi(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且

$$\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x),\text{即 } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

4. 反函数的导数

若 $x=\varphi(y)$ 在某区间内单调、可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则其反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间内也可导，且

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

5. 隐函数的导数

设 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的可导函数．注意到 x 是自变量，y 是 x 的函数，y 的函数是 x 的复合函数．在方程的两边同时对 x 求导，可得到一个含有 y' 的方程，从中解出 y' 即是．

注　y' 也可由多元函数微分法中的隐函数求导公式 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$ 得到，这里 $y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数．

6. 高阶导数

(1) 函数 $y=f(x)$ 导数的导数，称为函数 $f(x)$ 的二阶导数，即 $y''=(y')'$．记作 $y''=f''(x)$，或 $\frac{d^2y}{dx^2}$，$y^{(2)}$．

一般地，函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数为 $y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'$．也可写作 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^ny}{dx^n}$．

(2) 设 $u(x)$，$v(x)$ 具有 n 阶导数，则有

$$[au(x)+bv(x)]^{(n)}=au^{(n)}(x)+bv^{(n)}(x)\ (a、b \text{ 为常数})$$

$$[u(x)v(x)]^{(n)}=u^{(n)}(x)v(x)+C_n^1u^{(n-1)}(x)v'(x)+\cdots+C_n^ku^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)+\cdots+u(x)v^{(n)}(x).$$

7. 由参数方程所确定的函数的导数

设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha<t<\beta)$ 确定的函数，

(1) 若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

(2) 若 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 二阶可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]'_t\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

（五）微分

1. 微分定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x 的某邻域内有定义，若对应于自变量的增量 Δx，函数的增量 Δy 可以表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 与 Δx 无关，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，并把 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x 处的微分，记作 dy 或 $df(x)$，即 $dy=A\Delta x$．

2. 函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x 处可导，此时 $A=f'(x)$，即有 $dy=f'(x)dx$．

3. 一阶微分形式的不变性　设 $y=f(u)$ 可微，则微分 $dy=f'(u)du$，其中 u 不论是自变量还是中间变量，以上微分形式保持不变．

（六）微分中值定理

1. 罗尔(Rolle)定理　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，并且 $f(a)=f(b)$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$．

2. 拉格朗日(Lagrange)中值定理　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$．

3．柯西(Cauchy)中值定理　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

4．泰勒(Taylor)定理

(1) 假设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a,b) 内具有直到 n 阶的导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n].$$

此公式称为带有佩亚诺(Peano)型余项的泰勒公式.

(2) 假设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则对于 $x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 是 x_0 与 x 之间的某个值．此公式称为带有拉格朗日型余项的泰勒公式.

注　当 $x_0=0$ 时，以上两公式称为麦克劳林(Maclaurin)公式，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

和

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

(七) 洛必达(L'Hospital)法则

1．$\left(\dfrac{0}{0}\right)$ 型　设 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内可导，$g'(x)\neq 0$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2．$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ 型　设 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内可导，$g'(x)\neq 0$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注　以上 $x\to x_0$ 的极限过程改为 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，公式仍然成立.

(八) 利用导数研究函数及平面曲线的性态

1．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，若对任一 $x\in(a,b)$，有 $f'(x)>0$　(<0)，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加(减少).

注　若将上面的不等式 $f'(x)>0(<0)$，改为 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$，且使 $f'(x)=0$ 的点(驻点)只有有限个，则结论仍成立.

2．判断极值的第一充分条件：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内连续，x_0 是 $f(x)$ 的驻点或不可导点，在 $(x_0-\delta,x_0)$ 及 $(x_0,x_0+\delta)$ 内 $f(x)$ 均可导.

(1) 若在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内 $f'(x)<0(>0)$，而在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内 $f'(x)>0(<0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值(极大值)；

(2) 若在 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 内 $f'(x)$ 不改变符号，则 $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值.

3．判断极值的第二充分条件：设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处，一阶导数 $f'(x_0)=0$，二阶导数 $f''(x_0)$ 存在且不等于零，则当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；$f''(x_0)<0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

4．曲线凹凸性的判断：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上 $f''(x)>0(<0)$，则曲线 $y=f(x)$ 在 I 上凹或下凸（下凹或上凸）.

在连续曲线上，凹凸部分的分界点称为曲线的拐点.

5. 曲线的渐近线

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C$（$C$ 为常数），则 $y=C$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条铅直渐近线；

(3) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$，则 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

注　上面的极限过程 $x\to x_0$ 换成 $x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0^-$，$x\to\infty$ 换成 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$，结论也成立.

(九) 平面曲线的曲率

1. 弧微分

设 $y=f(x)$ 是平面内的光滑曲线，则弧微分 $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$.

若曲线方程为 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ 则弧微分为 $ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$.

2. 曲率

(1) 设 M 和 N 是曲线上不同的两点，弧 $\overset{\frown}{MN}$ 的长为 Δs，当 M 点沿曲线到达 N 点时，M 点处的切线所转过的角为 $\Delta\alpha$，则称极限 $K=\lim\limits_{\Delta s\to0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 为该曲线在点 M 处的曲率.

(2) 曲率计算公式

若曲线方程为 $y=f(x)$，则曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

若曲线由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ 给出，则曲率 $K=\dfrac{|x_t'y_t''-y_t'x_t''|}{(x_t'^2+y_t'^2)^{3/2}}$.

(3) 曲率半径 $R=\dfrac{1}{K}$　$(K\neq0)$.

·例题详解·

例 2.1　已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$________.

[答案]　-1.

[提示]　本题考查对函数导数的定义，以及对导数定义等价形式的掌握. 根据已知 $f'(3)=2$，可将题设极限式“凑出”函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的导数形式.

[解]　由于

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=-\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{(-h)}.$$

故由导数定义，得

$$\text{原式}=-\frac{1}{2}f'(3)=-1.$$

[典型错误]　将题设极限式按 $\dfrac{0}{0}$ 型洛必达法则去求解，$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-f'(3-h)}{2}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1$.

虽然答案不错，但解法是错误的. 因为洛必达法则要求 $f'(x)$ 在 $x=3$ 的附近存在，而本题只给出 $f(x)$ 在 $x=3$ 一点的可导性. 另外此种解法中还用了 $\lim\limits_{h\to0}f'(3-h)=f'(3)$，这相当于又增加了 $f'(x)$ 在 $x=3$ 处连续的条件，这就更加错误了.

例 2.2　设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$，则 $y''\Big|_{x=0}=$______.

[答案]　$-\dfrac{3}{2}$.

[提示]　本题考查复合函数在一点处的二阶导数. 求解本题需正确使用复合函数微分法. 对于多个中间

变量的复合函数. 首先要分清函数的复合层次，每一层都可以使用下面公式：

$$(\text{复合函数})'_x=(\text{复合函数})'_{\text{中间变量}}\times(\text{中间变量})'_x.$$

在本题中，可先将函数化成$y=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x^2)]$，然后再求导较为方便.

[解] 由于 $y=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x^2)]$，故有

$$y'=\frac{-1}{2(1-x)}-\frac{2x}{2(1+x^2)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x}{1+x^2},$$

$$y''=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2},$$

因而

$$y''\Big|_{x=0}=-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}.$$

[典型错误] 由于没有利用取对数简化函数，直接对 $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$求导，使计算麻烦，特别是求 y''时，计算冗长，稍不注意即计算错误.

例 2.3 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}$，则 $f'(t)=$______.

[答案] $(2t+1)e^{2t}$.

[提示] 本题考查重要极限和导数. 关键是先利用重要极限求出 $f(t)$的具体表达式，再用函数乘积的求导法得出结果.

[解]

$$\lim_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}=t\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2t}=te^{2t},$$

即

$$f(t)=te^{2t}.$$

从而

$$f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}=(2t+1)e^{2t}.$$

[典型错误] 虽然函数$f(t)$的自变量是 t，但在求极限$\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}$时，应注意到是 x 在变化，此时应将 t 视为常数. 个别考生不清楚这一点，不去先求极限，而是试图对带有极限号的$\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}$求导，于是导致错误.

例 2.4 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$______.

[提示] 这是一道简单的综合题，主要考查对函数记号的认识，复合函数求导法、以及求简单函数的原函数，求函数表达式等基本运算. 常见解法有以下几种：一是设 $e^x=t$，解出 $x=\ln t$，或将等式右边凑出关于 e^x 的表达式，也可直接从求复合函数$f(e^x)$的导数人手.

[解法 1] 令$e^x=t$，由 $f'(e^x)=xe^{-x}$得

$$f'(t)=\frac{\ln t}{t},$$

从而$f(t)=\frac{1}{2}\ln^2t+C$，根据 $f(1)=0$，知 $C=0$，所以

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln^2x.$$

[解法 2] 由于$xe^{-x}=\frac{\ln e^x}{e^x}$，所以 $f'(e^x)=xe^{-x}$可变形为$f'(e^x)=\frac{\ln e^x}{e^x}$. 从而 $f'(x)=\frac{\ln x}{x}$(以下同解法 1).

[解法 3] 由于 $f'(e^x)=xe^{-x}$，所以

$$(f(e^x))'_x=f'(e^x)\cdot e^x=xe^{-x}\cdot e^x=x.$$

从而

$$f(e^x)=\frac{1}{2}x^2+C.$$

令 $e^x=t$，便有 $f(t)=\frac{1}{2}\ln^2t+C$，即 $f(x)=\frac{1}{2}\ln^2x+C$. 根据 $f(1)=0$，知 $C=0$. 所以 $f(x)=$

$\frac{1}{2}\ln^2 x$.

[典型错误] 由 $f'(e^x)=xe^{-x}$得

$$f(e^x)=\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C.$$

令 $x=0$，得 $f(1)=-1+C=0$，故 $C=1$，于是

$$f(e^x)=-xe^{-x}-e^{-x}+1.$$

令 $t=e^x$，得 $f(t)=-\frac{\ln t}{t}-\frac{1}{t}+1$，故 $f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+1$.

这里的错误出在对导函数记号$f'(e^x)$的认识上，误将对中间变量 e^x的导数认为是对x的导数.

例 2.5 已知函数$y=y(x)$由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定. 则$y''(0)=$______.

[答案] -2.

[提示] 本题考查隐函数求导法. 常见解法有两种：注意到 x 是自变量，y 是x 的函数，y 的函数是x 的复合函数. 在方程两边对 x 求导，解出 y'，进而再求出 y''. 另一种方法是用多元函数微分法中的隐函数求导公式.

[解法 1] 在方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 两边对 x 求导，得

$$e^y y'+6y+6xy'+2x=0, \tag{1}$$

注意到 $x=0$ 时，$y(0)=0$，在(1)式中令 $x=0$，解得 $y'(0)=0$.

在(1)式两边再对 x 求导，得

$$e^y y'^2+e^y y''+6y'+6y'+6xy''+2=0 \tag{2}$$

在(2)式中，令 $x=0$，可解得 $y''(0)=-2$.

[解法 2] 令$F(x,y)=e^y+6xy+x^2-1$，则有

$$\begin{aligned} y'&=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{6y+2x}{e^y+6x}, \\ y''&=-\frac{(6y'+2)(e^y+6x)-(6y+2x)(e^y\cdot y'+6)}{(e^y+6x)^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

注意到 $y(0)=0$，$y'(0)=0$，可解得 $y''(0)=-2$.

[典型错误] 在解法 1 中，由(1)式解出 $y'=-\frac{6y+2x}{e^y+6x}$，再对 x 求导，得到解法 2 中的(3)式. 又将 $y'=-\frac{6y+2x}{e^y+6x}$代入(3)式，得出一个 y''的冗长的表达式. 最后将$y(0)=0$ 代入求 $y''(0)$，很容易发生运算的错误.

例 2.6 设 $y=y(x)$由$\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$所确定，则 $\frac{dy}{dx}=$______.

[答案] $\frac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$.

[提示] 本题考查隐函数和参数方程求导. 利用由参数方程所确定的函数的求导公式$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$，而$\frac{dy}{dt}$需用隐函数求导法得到.

[解] $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$；在 $2y-ty^2+e^t=5$ 两边对 t 求导，有 $2\frac{dy}{dt}-y^2-2ty\frac{dy}{dt}+e^t=0$，得到$\frac{dy}{dt}=\frac{y^2-e^t}{2(1-ty)}$，于是$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-e^t}{2(1-ty)}\Big/\frac{1}{1+t^2}$，即$\frac{dy}{dx}=\frac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$.

[典型错误] 错将求导公式写作$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}$.

例 2.7 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=t-\ln(1+t), \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$所确定，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$______.

[答案] $\dfrac{(6t+5)(t+1)}{t}$.

[提示] 连续使用两次由参数方程所确定的函数的导数计算公式.

[解] $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}}=3t^2+5t+2;$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(3t^2+5t+2)'_t}{(t-\ln(1+t))'_t}=\frac{6t+5}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}.$$

[典型错误] 在求二阶导数时遗漏了除以$\dfrac{dx}{dt}$，变为$\dfrac{d^2y}{dx^2}=(3t^2+5t+2)'_t=6t+5$.

例 2.8 设函数$y=y(x)$由方程$2^{xy}=x+y$确定，则$dy\Big|_{x=0}=$______.

[答案] $(\ln 2-1)dx$.

[提示] 本题考查隐函数所确定的函数在一点处的微分．利用微分运算法则求出dy，再将$x=0$代入，或利用隐函数求导法，求出y'及$y'\Big|_{x=0}$，再求$dy\Big|_{x=0}=(y'dx)\Big|_{x=0}$.

[解] 在等式$2^{xy}=x+y$两边求微分，得

$$2^{xy}\ln 2d(xy)=dx+dy,$$

即 $2^{xy}\ln 2(ydx+xdy)=dx+dy$，令$x=0$，并注意到$y\Big|_{x=0}=1$，

得 $(\ln 2)dx=dx+dy\Big|_{x=0}$，从而$dy\Big|_{x=0}=(\ln 2-1)dx$.

也可用下面方法求解：在$2^{xy}=x+y$两边对x求导，其中y是x的函数，得

$$2^{xy}\ln 2\cdot(y+xy')=1+y',$$

将$x=0$代入上式，并注意到$y\Big|_{x=0}=1$，解得$y'(0)=\ln 2-1$，

于是
$$dy\Big|_{x=0}=y'(0)dx=(\ln 2-1)dx.$$

[典型错误] 在答案中遗漏了dx，写成$\ln 2-1$.

例 2.9 设$y=(1+\sin x)^x$，则$dy\Big|_{x=\pi}=$______.

[答案] $-\pi dx$.

[提示] 本题考查幂指函数的微分．为求$dy=y'dx$，需先求出导数y'．对于幂指函数$y=[u(x)]^{v(x)}$的导数，可用以下两种方法求得：$y=e^{v(x)\ln u(x)}$，按复合函数求导；或利用对数求导法，令$\ln y=v(x)\ln u(x)$再求导.

[解] 由$y=(1+\sin x)^x=e^{x\ln(1+\sin x)}$得

$$y'=e^{x\ln(1+\sin x)}\left[\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right]$$

$$=(1+\sin x)^x\left[\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right],$$

于是
$$y'\Big|_{x=\pi}=(1+0)^{\pi}\left[\ln(1+0)+\frac{-\pi}{1+0}\right]=-\pi,$$

故有
$$dy\Big|_{x=\pi}=-\pi dx.$$

本题也可用下面方法解答：在$y=(1+\sin x)^x$两边取对数，$\ln y=x\ln(1+\sin x)$，于是

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x},$$

令 $x=\pi$，并注意到 $y\Big|_{x=\pi}=1$，则由上式解得 $y'\Big|_{x=\pi}=-\pi$，故有 $\mathrm{d}y\Big|_{x=\pi}=-\pi\mathrm{d}x$.

[典型错误] 由 $\mathrm{d}y=x(1+\sin x)^{x-1}\mathrm{d}x$ 得 $\mathrm{d}y\Big|_{x=\pi}=\pi\mathrm{d}x$.

例 2.10 对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为_______.

[答案] $x+y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

[提示] 本题主要考查导数的几何意义以及求导数的方法. 需先用直角坐标与极坐标的关系，将对数螺线化为参数方程的形式，再求出在 $\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 相应点处的切线斜率，进而写出切线方程.

[解] 该曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta=\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta=\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta,\end{cases}$ 点 $\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 的直角坐标为 $(0,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}})$. 曲线在点 $\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Bigg|_{\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{(\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta)'_{\theta}}{(\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta)'_{\theta}}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta+\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta}{\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta-\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1,$$

故所求切线方程为 $y-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}=-(x-0)$，即 $x+y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

[典型错误] 将切线斜率误认为 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=\mathrm{e}^{\theta}$，在 $\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 处切线斜率为 $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

例 2.11 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为_______.

[答案] $y=x-1$.

[提示] 本题考查导数的几何意义，为求切线方程需求出满足题意的切点坐标.

[解] 直线 $x+y=1$ 的斜率为 -1，故所求切线的斜率为 1. 令 $(\ln x)'=\frac{1}{x}=1$，得 $x=1$，代入 $y=\ln x$ 得 $y=0$，故切点为 $(1,0)$. 于是得到所求切线方程为

$$y-0=x-1,\ 即\quad y=x-1.$$

[典型错误] 不知切点如何求得.

例 2.12 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为_______.

[答案] $x-2y+2=0$.

[提示] 本题考查由隐函数所确定的曲线方程的法线方程. 注意曲线在同一点处切线斜率与法线斜率为负倒数的关系.

[解] 在 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 两边对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{2x+y}(2+y')+\sin(xy)(y+xy')=0.$$

把 $x=0$，$y=1$ 代入上式，得 $y'\Big|_{x=0}=-2$. 故所求法线方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-0)$，即 $x-2y+2=0$.

[典型错误] 误将法线方程写为 $y-1=-2(x-0)$. 即 $2x+y-1=0$.

例 2.13 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{t}\sin 2t,\\ y=\mathrm{e}^{t}\cos t\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为_______.

[答案] $2x+y-1=0$.

[提示] 曲线在点 $(0,1)$ 处切线的斜率 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{(0,1)}$，由参数式函数求导法得到.

[解] $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{e}^{t}(\cos t-\sin t)}{\mathrm{e}^{t}(\sin 2t+2\cos 2t)}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin 2t+2\cos 2t}$，在点 $(0,1)$ 处，对应的 $t=0$. 故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{(0,1)}=\frac{1}{2}$.

于是所求法线方程为$y-1=-2(x-0)$，即$2x+y-1=0$.

［典型错误］ 个别考生审题不慎，将法线方程写成了切线方程 $x-2y+2=0$.

例 2.14 曲线$y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线方程为________.

［答案］ $y=2x+1$.

［提示］ 本题考查求曲线斜渐近线的方法.

［解］ 设所求渐近线的方程是 $y=ax+b$，则

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x]=\lim_{x\to\infty}[2x(e^{\frac{1}{x}}-1)-e^{\frac{1}{x}}]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}\right)=2-1=1.$$

故所求渐近线方程为 $y=2x+1$.

［典型错误］ 有的考生在求极限$\lim\limits_{x\to\infty}[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x]$时发生错误，其实可用多种方法求此极限，如可设$t=\dfrac{1}{x}$，用洛必达法则解之．还有的考生没有准确记住斜渐近线的计算公式.

例 2.15 设函数$y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t^3+3t+1,\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$确定，则曲线 $y=y(x)$向上凸的 x 取值范围为________.

［答案］ $(-\infty,1)$(或$(-\infty,1]$).

［提示］ 本题考查函数的二阶导数的一个应用．利用函数二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$的符号确定曲线$y=y(x)$的凹凸区间.

［解］ 由题设知

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}=\frac{t^2-1}{t^2+1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3}.$$

令 $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$，则有 $t<0$，从而 $x=t^3+3t+1<1$，故所求取值范围为$(-\infty,1)$或$(-\infty,1]$.

［典型错误］ 二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$求错，或通过$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$求曲线的上凸区间.

例 2.16 设$f(x)$在 $x=a$ 的某邻域内有定义，则$f(x)$在 $x=a$ 处可导的充分条件是

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在. (B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在. (D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

［答案］ (D).

［提示］ 本题考查导数的定义．可将题设极限“凑”成导数定义$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$的形式；对于错误的结论也可通过举反例排除.

［解］ 在选项(D)中，用 Δx 表示$-h$，则有

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a).$$

选项(A)只能保证右导数$f'_+(a)$存在，故被排除．在(B)、(C)内未出现$f(a)$，即$f(a)$可任意选定，若取$f(x)$

$=\begin{cases}1, & x\neq a,\\ 0, & x=a,\end{cases}$ 则(B)、(C)中的极限都存在，但由于$f(x)$在 $x=a$ 处间断，故不可导，这就排除掉了(B)与(C)．因此只能选(D)．

［典型错误］ 有的考生选择了(B)或(C)．例如选(C)的理由是：

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\left[2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right]\\ &=2f'(a)-f'(a)=f'(a).\end{aligned}$$

事实上，即使(C)中的极限存在也不能保证$\lim\limits_{h\to 0}2\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{2h}$与$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$存在．$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq a,\\ 0, & x=a\end{cases}$就是一个反例．

例 2.17 设 $f(0)=0$，则$f(x)$在点 $x=0$ 处可导的充要条件是

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$存在．　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$存在．

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$存在．　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在．

［答案］ (B)．

［提示］ 若函数$f(x)$在 $x=x_0$ 处可导，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$存在且为$f'(x_0)$，这里 h 既可以是简单的变量，也可以是复杂的中间变量；既可以是连续变量，也可以是离散变量．另外，当 $h\to 0$ 时，$1-\cos h\sim\dfrac{1}{2}h^2$，$1-e^h\sim -h$，$h-\sin h\sim\dfrac{h^3}{6}$．

［解］ 如果$f(x)$在 $x=0$ 处可导，则

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{h^2}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f[0+(1-\cos h)]-f(0)}{1-\cos h}\cdot\frac{1-\cos h}{h^2}\\ &=\frac{1}{2}f'(0),\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)=\lim_{h\to 0}\frac{f[0+(1-e^h)]-f(0)}{1-e^h}\cdot\frac{1-e^h}{h}=-f'(0),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim_{h\to 0}\frac{f[0+(h-\sin h)]-f(0)}{h-\sin h}\cdot\frac{h-\sin h}{h^2}=f'(0)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}f'(0),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\cdot 2-\frac{f(h)-f(0)}{h}\right]=2f'(0)-f'(0)=f'(0).$$

可见(A)、(B)、(C)、(D)选项均为$f(x)$在 $x=0$ 处可导的必要条件．

另一方面，由于

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}f(1-e^h)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\lim_{h\to 0}\frac{1-e^h}{h}\\ &\xlongequal{\text{令 }1-e^h=x}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.\end{aligned}$$

可知条件(B)是$f'(0)$存在的充分条件，即选项(B)正确．

取$f(x)=|x|$可以断定(A)和(C)不是充分条件，例如$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|1-\cos h|}{h^2}=\dfrac{1}{2}$，而$f(x)$在 $x=0$ 处并不可导．取$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$选项(D)的极限为 0，但$f(x)$在 $x=0$ 处不可导．

[典型错误] 有的考生在讨论必要条件时，看到四个极限只有(D)选项的极限为$f'(0)$，就误认为应选(D).

例 2.18 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$其中$g(x)$是有界函数．则$f(x)$在$x=0$处

(A) 极限不存在．　　(B) 极限存在，但不连续．

(C) 连续，但不可导．　　(D) 可导．

[答案] (D).

[提示] 本题考查函数极限、连续与可导的关系．由于可导必连续．连续则极限必存在，因而可从考查可导性入手．

[解] 由于 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2g(x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}xg(x)=0$,所以 $f'_-=0$.

又$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0$．故$f'_+(0)=0$．从而$f'(0)$存在．且$f'(0)=0$．应选(D).

[典型错误] 有的考生认为$g(x)$是抽象函数，具有不确定性，而错误地选择了(C).

例 2.19 设函数$f(x)$连续，且$f'(0)>0$，则存在$\delta>0$，使得

(A) $f(x)$在$(0,\delta)$内单调增加．　　(B) $f(x)$在$(-\delta,0)$内单调减少．

(C) 对任意的$x\in(0,\delta)$，有$f(x)>f(0)$．　　(D) 对任意的$x\in(-\delta,0)$，有$f(x)>f(0)$.

[答案] (C).

[提示] 本题是一道基本概念和性质题．主要考查导数的概念、函数单调性概念以及极限的保号性质．从导数概念着手讨论．

[解] 由于$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，所以存在$\delta>0$，使得当$x\in(-\delta,\delta)$时，有$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$．从而对任意的$x\in(0,\delta)$有$f(x)>f(0)$，即选项(C)正确．

[典型错误] 有的考生选择了(A)．这显然是错用了导数符号与单调性之间的关系．只有当导数在一个区间上不变号时，才能得到函数的单调性结论，若只知道导数在一点的符号．是不能得出函数单调性的结论的．

例 2.20 已知函数$f(x)$具有任意阶导数，且$f'(x)=[f(x)]^2$，则当n为大于2的正整数时，$f(x)$的n阶导数$f^{(n)}(x)$是

(A) $n![f(x)]^{n+1}$．　(B) $n[f(x)]^{n+1}$．　(C) $[f(x)]^{2n}$．　(D) $n![f(x)]^{2n}$

[答案] (A).

[提示] 本题考查高阶导数的求法．逐次求导找规律，并在求导过程中对照各选项，将错误选项排除掉．

[解] 由$f''(x)=2f(x)\cdot f'(x)=2[f(x)]^3$，可知选项(C)与(D)是错误的．

又$f'''(x)=3\cdot2[f(x)]^2\cdot f'(x)=3![f(x)]^4$．可见选项(B)错误．故只有(A)选项是正确的．用数学归纳法也容易证明(A)选项的正确性．

[典型错误] 错选(B)、(C)、(D)的都有，一般是由于逐次求导数不正确而导致．

例 2.21 设函数$y=f(x)$具有二阶导数，且$f'(x)>0$，$f''(x)>0$．Δx为自变量x在x_0处的增量，Δy与dy分别为$f(x)$在点x_0处对应的增量与微分，若$\Delta x>0$．则

(A) $0<dy<\Delta y$．　(B) $0<\Delta y<dy$．　(C) $\Delta y<dy<0$．　(D) $dy<\Delta y<0$.

[答案] (A).

[提示] 本题欲比较函数增量Δy与微分dy的大小．注意到题目中出现二阶导数．故可考虑用泰勒公式．另一种思路是：由$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，可知曲线$y=f(x)$是单调上升且向上凹，因而可画出示意图，根据Δy，dy的几何意义．直接导出正确的选项．

[解] 由泰勒公式

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(\xi)}{2!}(\Delta x)^2,x_0<\xi<x_0+\Delta x,$$

即有 $$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\mathrm{d}y+\frac{f''(\xi)}{2!}(\Delta x)^2,$$

可知 $$\Delta y-\mathrm{d}y=\frac{f''(\xi)}{2!}(\Delta x)^2>0,$$

所以 $\Delta y>\mathrm{d}y$. 又 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x>0$. 故选(A).

或者作出曲线 $y=y(x)$示意图（如图 1）. 根据 Δy, $\mathrm{d}y$ 的几何意义，立即得到

$$0<\mathrm{d}y<\Delta y$$

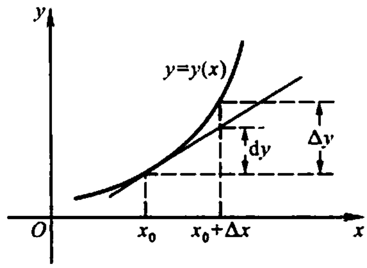

图 1

[典型错误] 有的考生不知如何建立起 Δy, $\mathrm{d}y$, $f'(x)$与$f''(x)$的联系；有的考生虽想到了结合几何图形选项，但忘了 $\mathrm{d}y$ 的几何意义是什么，故不能正确选项.

例 2.22 已知函数 $y=y(x)$在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to0$ 时，α 是比 Δx 高阶的无穷小. $y(0)=\pi$，则$y(1)$等于

(A) 2π.　　(B) π.　　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$.　　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

[答案] (D).

[提示] 本题考查微分的概念及微分与导数的关系.

[解] 根据微分的定义，可知 $\mathrm{d}y=\frac{y}{1+x^2}\Delta x$，从而 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{1+x^2}$，解此微分方程得 $y=Ce^{\arctan x}$，再由 $y(0)=\pi$，确定出 $C=\pi$. 因而 $y=\pi e^{\arctan x}$，$y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

[典型错误] 不会舍去高阶无穷小，从而无从下手.

例 2.23 设函数$f(u)$可导，$y=f(x^2)$当自变量 x 在$x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则$f'(1)$等于

(A) -1.　　(B) 0.1.　　(C) 1.　　(D) 0.5.

[答案] (D).

[提示] 本题考查微分的概念以及微分的计算.

[解] 由 $y=f(x^2)$，得 $\mathrm{d}y=2xf'(x^2)\mathrm{d}x$.

将 $x=-1$，$\mathrm{d}x=\Delta x=-0.1$，$\mathrm{d}y=0.1$ 代入上式，得

$$0.1=2\times(-1)\times f'(1)\times(-0.1)，从而f'(1)=0.5.$$

[典型错误] 有的考生对微分的概念理解模糊，对题设的“函数增量 Δy 的线性主部”不解其意，故选错选项.

例 2.24 若曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点$(1,-1)$相切，其中 a，b 为常数，则

(A) $a=0$，$b=-2$.　　(B) $a=1$，$b=-3$.

(C) $a=-3$，$b=1$.　　(D) $a=-1$，$b=-1$.

[答案] (D).

[提示] 两条曲线在某点相切，即指在该点有公切线. 本题考查导数的几何意义以及显函数、隐函数的求导法.

[解] 在方程 $2y=-1+xy^3$ 的两边对 x 求导，得

$$2y'=y^3+3xy^2y'.$$

由此得 $y'\Big|_{x=1}=1$. 即公切线的斜率为 1.

而曲线 $y=x^2+ax+b$ 在点$(1,-1)$处的切线斜率为 $y'\Big|_{x=1}=(2x+a)\Big|_{x=1}=2+a$. 令 $2+a=1$. 得 $a=$

-1. 再将 $a=-1$，$x=1$，$y=-1$ 代入曲线 $y=x^2+ax+b$，得 $b=-1$.

[典型错误] 错误一般是由于导数计算出错或计算粗心引起的.

例 2.25 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

(A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$.　(B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$.　(C) $-8\ln 2+3$.　(D) $8\ln 2+3$.

[答案] (A).

[提示] 本题考查参数方程确定的函数的求导法和法线方程. 求出 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=3}$ 后，再根据导数的几何意义及曲线在同一点处切线与法线的斜率间关系求出法线方程.

[解] $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t+2$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t}$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}=\frac{1}{2(1+t)^2}$.

又 $x=3$ 对应着 $t=1$，$y=\ln 2$，此时 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\frac{1}{8}$. 因而法线方程为 $y-\ln 2=-8(x-3)$.

令 $y=0$，则得法线与 x 轴交点的横坐标 $x=\frac{1}{8}\ln 2+3$.

[典型错误] 误将法线方程写成切线方程 $y-\ln 2=\frac{1}{8}(x-3)$，因而错误地选(C).

例 2.26 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$、$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$.　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$.　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

[答案] (B).

[提示] 本题考查对拉格朗日中值定理的理解，以及用导数符号判断函数单调性的方法. 由于题目中出现了导数和区间 $[0,1]$ 上函数的增量，因而从拉格朗日中值定理入手.

[解] 由拉格朗日中值定理，$f(1)-f(0)=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi)$，$0<\xi<1$. 又 $f''(x)>0$，因而 $f'(x)$ 单调增加，从而 $f'(1)>f'(\xi)>f'(0)$，故选(B).

[典型错误] 有的考生虽判断出 $f'(x)$ 是单调增加的，但不能用拉格朗日中值定理将 $f(1)-f(0)$ 与导数联系起来，因而错选了其他选项.

例 2.27 设 $f(x)$ 处处可导，则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$.　(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=+\infty$.　(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

[答案] (D).

[提示] 用举反例的方法排除错误结论，或直接证明正确结论.

[解] 设 $f(x)=x^3$，可排除(A). 设 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$，可排除(B). 设 $f(x)=\ln x$，可排除(C). 故选(D).

对于(D)，可直接证明其正确性.

设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，则存在 $x_0>0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>1$. 由拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0),\quad x_0<\xi<x.$$

所以 $f(x)>f(x_0)+(x-x_0)$，从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

[典型错误] 有的考生不了解函数符号与导数符号并没有必然的联系，不能举出恰当的反例排除错项. 还有的考生不会用拉格朗日中值定理建立函数与导数之间的联系. 这些都是导致选错的主要原因.

例 2.28 设 $f(x)$，$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0,$$

则当 $a<x<b$ 时，有

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$. (B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$. (D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查用导数符号判断函数单调性的方法．从已知不等式看，其左端正是函数$\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$的导数的分子部分．而选项(A)与(B)分别是$\varphi(x)>\varphi(b)$与$\varphi(x)>\varphi(a)$的变形，因而考虑辅助函数$\varphi(x)$在$[a,b]$上的单调性．

[解] 令$\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$由可导，且

$$\varphi'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}<0,$$

故$\varphi(x)$在$[a,b]$上单调减少．从而当$a<x<b$时，有$\varphi(x)>\varphi(b)$，即$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}$．亦即$f(x)g(b)>f(b)g(x)$，可见选项(A)正确．

[典型错误] 有的考生从已知不等式出发，试图比较$\frac{f'(x)}{g'(x)}$与$\frac{f(x)}{g(x)}$的大小，结果得不出正确结论而走了弯路．

例 2.29 已知函数$f(x)$对一切x满足$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，若$f'(x_0)=0\ (x_0\neq0)$，则

(A) $f(x_0)$是$f(x)$的极大值.

(B) $f(x_0)$是$f(x)$的极小值.

(C) $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(D) $f(x_0)$不是$f(x)$的极值，$(x_0,f(x_0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点.

[答案] (B).

[提示] 本题考查可导函数取得极值的必要条件和判定极值的充分条件.

[解] 由$f'(x_0)=0$知$x=x_0$是函数$f(x)$的驻点．由

$$x_0f''(x_0)+3x_0[f'(x_0)]^2=1-e^{-x_0}$$

知在驻点$x_0\ (x_0\neq0)$处，$f''(x_0)=\frac{1}{x_0}(1-e^{-x_0})>0$，故由判定极值的第二充分条件知，$f(x_0)$是函数$f(x)$的极小值．

[典型错误] 本题给出的微分方程是一个“陷阱”，一些考生分析此题时，试图从解微分方程入手，结果走了弯路．

例 2.30 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其导函数的图形如图 2所示．则$f(x)$有

(A) 一个极小值点和两个极大值点.

(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点.

[答案] (C).

[提示] 本题是图形题，考查函数取极限的条件．对于处处连续的函数$f(x)$，其极值点可能是导数为零的点(驻点)，也可能是导数不存在的点．应从图形中将这些点找出，再进一步由取极值的充分条件判定．

[解] 根据导数图形可知，一阶导数为零的点共3个．而$x=0$则是导数不存在的点．以上4个点左右邻近两侧符号相异，故都是极值点．当x自左至右经过这些点时，导数符号由正变

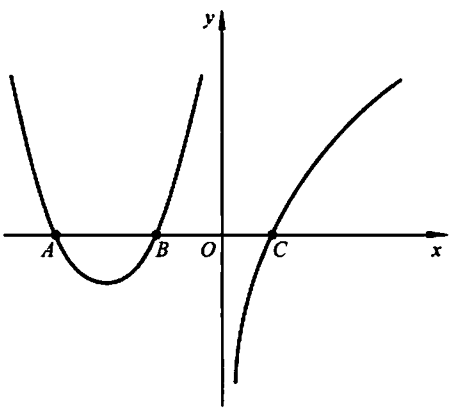

图 2

负．则该点是极大值点：导数符号由负变正，则该点是极小值点．由此可知，A 点对应着极大值点，B 点和 C 点对应着极小值点，而不可导点 O 对应着极大值点，故选(C)．

［典型错误］ 不少考生只注意到极值点可能是驻点的情况，而忽略了极值点还可能是不可导点(图形中的 O 点)的情况．而错误地选择了(B)．

例 2.31 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内具有二阶导数．$f'(x)$ 严格单调减少．且 $f(1)=f'(1)=1$，则

(A) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)<x$．

(B) 在 $(1-\delta,1)$ 和 $(1,1+\delta)$ 内均有 $f(x)>x$．

(C) 在 $(1-\delta,1)$ 内．$f(x)<x$，在 $(1,1+\delta)$ 内．$f(x)>x$．

(D) 在 $(1-\delta,1)$ 内，$f(x)>x$，在 $(1,1+\delta)$ 内．$f(x)<x$．

［答案］ (A)．

［提示］ 本题考查导数应用和建立辅助函数的方法．从选项看．需比较 $f(x)-x$ 与 0 的大小关系，故可构造辅助函数 $F(x)=f(x)-x$．

［解］ 设 $F(x)=f(x)-x$，由题设条件可知

$$F(1)=0,\ F'(1)=0,$$

$$F''(x)=f''(x)<0,\ x\in(1-\delta,1+\delta).$$

故 $F(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，即 $F(1)=0$ 在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内为极大值，从而 $f(x)-x<0$，$x\in(1-\delta,1)\cup(1,1+\delta)$，即(A)正确．

［典型错误］ 本题实质上是一个证明题，对考生的论证能力有一定要求，再加上题目条件较多，故不少考生选错．由条件知．曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线为 $y=x$．且在区间 $(1-\delta,1+\delta)$ 内曲线是向上凸的，所以曲线除切点外，全部位于切线下方，即 $f(x)<x$．

例 2.32 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点的个数为

(A) 0． (B) 1． (C) 2． (D) 3．

［答案］ (C)．

［提示］ 本题考查曲线拐点的概念．本题可直接求函数二阶导数为零的点．再判断在零点左右两侧的二阶导数是否异号，以求出拐点．但由于函数的一阶、二阶导数有明显的几何意义，因而这类题目若能结合曲线的形状，往往判断起来更为方便．

［解］ 本题的曲线对称于直线 $x=2$．所以它或者没有拐点，或者只有两个拐点．因此(B)与(D)被排除掉．又

$$y'=4(x-1)(x-2)(x-3),$$

对导函数 y' 应用罗尔定理，知 y'' 有两个零点，从而知曲线有两个拐点．

［典型错误］ 求出使 $y''=0$ 的点为 $x=2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$．在计算过程中需花费一些时间．并且还要判断在 $2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 邻近两侧 y'' 的符号．多数错误是由于计算不准确引起的．

例 2.33 若 $3a^2-5b<0$．则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$

(A) 无实根． (B) 有唯一实根． (C) 有三个不同实根． (D) 有五个不同实根．

［答案］ (B)．

［提示］ 本题考查方程根的个数．讨论方程 $f(x)=0$ 根的个数，就是讨论函数 $f(x)$ 零点的个数，一般要用到连续函数在闭区间上的介值定理．

［解］ 由于 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$ 是实系数的奇次多项式．$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，因而方程 $f(x)=0$ 至少有一个实根．

又导函数 $f'(x)=5x^4+6ax^2+3b$ 是关于 x^2 的二次多项式．其判别式 $\Delta=36a^2-60b=12(3a^2-5b)<0$，可知 $f'(x)>0$．于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调增加．故方程 $f(x)=0$ 有根时必唯一．因而选(B)．

［典型错误］ 有的考生没有用导数来研究函数的性态，故不知条件 $3a^2-5b$ 有何作用．从而选错．

例 2.34　设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

［提示］　本题考查分段函数导函数的求法以及函数连续性的概念．求导函数时，对于 $x\neq 0$ 处按求导法则和求导公式求，求 $f'(0)$ 时，要用导数定义.

［解］　当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}$，而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x^2}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $f'(0)=\dfrac{\pi}{2}$.
于是

$$f'(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}, & x\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0.\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\arctan\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2x^2}{1+x^4}\right)=\dfrac{\pi}{2}=f'(0)$，故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

［典型错误］　有的考生在求 $f'(0)$ 时，没有用导数定义，而认为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处为常数 0，故"常数的导数为零"，由此得出 $f'(0)=0$．这反映了这些考生没有弄懂"常数的导数为零"是指在一个区间上函数恒等于某一常数的含义.

例 2.35　设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式；

(2) $g(x)$ 是否有间断点，不可导点？若有，指出这些点.

［提示］　这是一道综合题，考查反函数的概念与求法，直接函数连续性与反函数连续性的关系，以及分段函数在分界点处可导性的判断法.

［解］　(1) 不难看出，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域也是 $(-\infty,+\infty)$，且在各分段区间上都是单调增加的连续函数．又由

$$f_-(0)=f_+(0)=f(-1),$$
$$f_-(2)=8=f(2)=f_+(2),$$

可知 $f(x)$ 在各分段点处也是连续的，因而 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续．$f(x)$ 的反函数

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8.\end{cases}$$

(2) 由于 $f(x)$ 单调增加，处处连续，因而它的反函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续，没有间断点.

在 $x=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1-x}}{x+1}$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2-(1-x)}{x+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}}=\frac{1}{4}，即 g'_-(-1)=\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{3}.$$

即　$g'_+(-1)=\dfrac{1}{3}$．由于 $g'_-(-1)\neq g'_+(-1)$，故 $x=-1$ 是不可导点.

在 $x=8$ 处，$\lim\limits_{x\to 8^-}\dfrac{g(x)-g(8)}{x-8}=\lim\limits_{x\to 8^-}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\dfrac{1}{12}$，

即 $f'_-(8)=\frac{1}{12}$.

$$\lim_{x\to 8^+}\frac{g(x)-g(8)}{x-8}=\lim_{x\to 8^+}\frac{\frac{x+16}{12}-2}{x-8}=\frac{1}{12}.\ 即\ f'_+(8)=\frac{1}{12}.$$

由此可知 $f(x)$在 $x=8$ 处可导.

又因为在$[-1,8]$上，$g(x)=\sqrt[3]{x}$，可得 $g'(0)=\infty$，即 $x=0$ 也是不可导点.

[典型错误] 由于 $x=0$ 不是分段函数 $g(x)$的分段点，所以一些考生没有对该点的可导性进行讨论，而遗漏了$x=0$这个不可导点.

例 2.36 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，在区间$[0,2]$上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足$f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数，问 k 为何值时，$f(x)$在 $x=0$ 处可导.

[提示] 本题考查函数的可导性以及函数记号的运算. 为讨论 $f(x)$在 $x=0$ 处的可导性，需知道 $f(x)$在 $x=0$ 附近的表达式. 由题设知，只需求出 $f(x)$在$[-2,0)$上的表达式，再由 $f(x)$在 $x=0$ 处左右导数存在且相等求出 k 值.

[解] 当$-2\leqslant x<0$，即 $0\leqslant x+2<2$ 时，

$$\begin{aligned}f(x)&=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]\\&=kx(x+2)(x+4).\end{aligned}$$

由题设知 $f(0)=0$，

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-4)}{x}=-4,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8k.$$

令 $f'_-(0)=f'_+(0)$，得 $k=-\frac{1}{2}$，即当 $k=-\frac{1}{2}$时，$f(x)$在 $x=0$ 处可导.

[典型错误] 有的考生不能正确写出 $f(x)$在$[-2,0)$上的表达式；还有一些考生对函数在某点可导，必须左右导数存在且相等的知识点还未掌握.

例 2.37 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$在 $x=0$ 处的 n 阶导数$f^{(n)}(0)(n\geqslant 3)$.

[提示] 本题考查两个函数乘积的 n 阶导数. 一个方法是利用莱布尼兹公式. 由于其中一个因子是 x^2，故其三阶以上的导数均为 0. 所以 $f(x)$的 n 阶导数表达式只有 3 项；另一个方法是先写出 $f(x)$的麦克劳林公式，再通过比较系数得解，这要求考生掌握 $\ln(1+x)$的麦克劳林公式.

[解] 由莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+u^{(0)}v^{(n)}$$

及
$$[\ln(1+x)]^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}\quad(k\ 为正整数),$$

得
$$f^{(n)}(x)=x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}},$$

所以
$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}.$$

本题也可以用下面方法求解：

由麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

及
$$\begin{aligned}x^2\ln(1+x)&=x^2\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^{n-2})\right]\\&=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n-2}+o(x^n),\end{aligned}$$

比较 x^n 的系数得
$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n-2}.$$

所以 $$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}.$$

［典型错误］ 不少考生试图通过求 $f(x)$的 1 至 3 阶或 4 阶导数总结出规律，推得一般结果．显然这是不容易做到的．试想怎能从 $f'(0)=0$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=6$，$f^{(4)}(0)=-12$ 轻易推出 $f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$ 呢？而且花费时间也较多，这是本题失分的主要原因．

例 2.38 已知两曲线 $y=f(x)$与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在点(0,0)处的切线相同．写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

［提示］ 本题的考查要点是对由变上限定积分确定的函数求导数，切线方程和利用导数定义求极限．

［解］ 由已知条件得

$$f(0)=0,\ f'(0)=\left.\frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\right|_{x=0}=1.$$

故所求切线方程为 $y=x$.

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2.$$

［典型错误］ 有的考生求极限时用了洛必达法则．由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{1}=f'(0)=1$，从而推出 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=1$．这种做法是错误的．因为题目中并没有给出 $f(x)$在 $x=0$ 处有连续的一阶导数．还有另外一种错误做法．对离散变量正整数 n 用洛必达则：

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'\left(\frac{2}{n}\right)\left(-\frac{2}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}=2f'(0).$$

例 2.39 已知 $f(x)$是周期为 5 的连续函数．它在 $x=1$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$是当 $x\to0$ 时比 x 高阶的无穷小．且 $f(x)$在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程．

［提示］ 本题考查函数的周期性、连续性、极限、导数定义及切线方程等内容．由于 $f(x)$是周期为 5 的周期函数，故曲线在点$(6,f(6))$处和点$(1,f(1))$处具有相同的切线斜率，因此根据题设求出 $f'(1)$和 $f(1)$即可．

［解］ $\lim\limits_{x\to0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim\limits_{x\to0}[8x+\alpha(x)]$

得 $$f(1)-3f(1)=0，故\ f(1)=0.$$

又 $$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[8+\frac{\alpha(x)}{x}\right]=8.$$

设 $\sin x=t$，则上式左端为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to0}\frac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\lim_{t\to0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}=4f'(1),$$

所以 $f'(1)=2$.

由于 $f(6)=f(1)=0$，$f'(6)=f'(1)=2$，故得所求切线方程为

$$y=2(x-6)\quad 即\quad 2x-y-12=0.$$

［典型错误］ 因为题目中的 $f(x)$是抽象函数，且只给出在 $x=1$ 处的可导性，所以只能用导数定义求 $f'(1)$.

而不能用其他工具．这是本题的一个难点．大多数错误也都出在这里．

例 2.40　已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求

(1) 函数的增减区间及极值；

(2) 函数图形的凹凸区间及拐点；

(3) 函数图形的渐近线．

［提示］　本题考查的知识点是用导数全面讨论函数的性态．解这类问题有一般方法可循．通常先求出 y 的定义域．解出 y'、y''．用函数的间断点，使 $y'=0$，$y''=0$ 的点将定义区间分割为若干区间，讨论 y'、y''在这些区间上的符号，从而判断出增减区间、凹凸区间、极值点和拐点．

［解］　函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，

$$y'=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}.\ 令\ y'=0\ 得驻点\ x=0\ 及\ x=3.$$

$$y''=\frac{6x}{(x-1)^4}，令\ y''=0\ 得\ x=0.$$

列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	+	−	0	+
y''	−	0	+	+	+	+
y		拐点			极小值	

由此可知．(1) 函数的单调增加区间为$(-\infty,1)$和$(3,+\infty)$，单调减少区间为$(1,3)$．极小值为 $y\Big|_{x=3}=\dfrac{27}{4}$．

(2) 函数图形在区间$(-\infty,0)$内是向上凸的．在区间$(0,1)$，$(1,+\infty)$内是向上凹的．拐点为$(0,0)$点．

(3) 由$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$，知 $x=1$ 是函数图形的铅直渐近线．

又
$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1,$$
$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right]=2,$$

故　$y=x+2$ 是函数图形的斜渐近线．

［典型错误］　本题难度并不大，一般考生都能下手做，主要错误是因计算二阶导数不正确引起的，还有的考生不会计算斜渐近线．

例 2.41　设函数 $y=y(x)$由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，求 $y=y(x)$的驻点，并判断它是否为极值点．

［提示］　用隐函数求导法求出 y'，y''，并用判断极值的第二充分条件．即讨论 y''在驻点处的符号来判定极值点．

［解］　在方程两边对 x 求导，得

$$6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0. \tag{1}$$

令 $y'=0$，由(1)式得 $y=x$，将此代入原方程有

$$2x^3-x^2-1=0.$$

从而解得唯一驻点 $x=1$．对(1)式两边再求导．得

$$(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)y'^2+2y'-1=0.$$

以 $y(1)=1$，$y'(1)=0$ 代入上式，得 $y''(1)=\frac{1}{2}>0$，可见 $x=1$ 是 $y(x)$ 的极小值点．

［典型错误］ 试图用第一充分条件判定，则得不到结果；有的是 y'' 求错．

例 2.42 如图 3 所示．A、D 分别是曲线 $y=e^x$ 和 $y=e^{-2x}$ 上的点．AB 和 DC 垂直于 x 轴，且 $|AB|:|DC|=2:1$，$|AB|<1$．求点 B 和 C 的横坐标，使梯形 $ABCD$ 的面积最大．

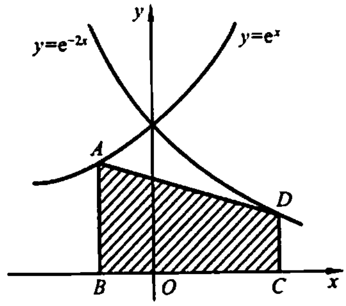

图 3

［提示］ 本题考查导数的应用之一，求最大值．根据题设寻求点 B 和点 C 横坐标之间的关系，建立梯形 $ABCD$ 的函数表达式，进而求出函数的最大值．

［解］ 设点 B 和点 C 的横坐标分别是 ξ 和 η，则 $|AB|=e^{\xi}$，$|DC|=e^{-2\eta}$，于是由 $e^{\xi}:e^{-2\eta}=2:1$ 解得

$$\xi=\ln 2-2\eta.$$

这样 $\quad |BC|=\eta-\xi=3\eta-\ln 2$，$|AB|+|DC|=3e^{-2\eta}$.

故梯形面积

$$S=\frac{1}{2}|BC|(|AB|+|DC|)=\frac{3}{2}(3\eta-\ln 2)e^{-2\eta}\quad(\eta>0).$$

而 $S'=\frac{3}{2}(3-6\eta+2\ln 2)e^{-2\eta}$．令其为 0，解得唯一驻点 $\eta=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2$，在驻点左、右两侧 S' 由正变负，故驻点为极大值点．也是最大值点．即当 C 和 B 的横坐标分别为

$$\eta=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ln 2,\ \xi=\frac{1}{3}\ln 2-1$$

时，梯形面积最大．

［典型错误］ 不会利用已知条件找出点 B 与点 C 坐标之间的关系．

例 2.43 设曲线 $y=ax^2\ (a>0,x\geqslant 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A．过坐标原点 O 和 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形，问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大？最大体积是多少？

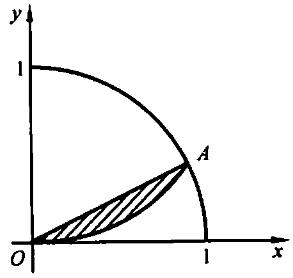

图 4

［提示］ 这是一道综合题，此旋转体的体积依赖于两抛物线交点位置，而交点位置由参数 a 确定．所以首先求两抛物线交点坐标——参数 a 的函数，再写出直线 OA 的方程以及旋转体体积——也是参数 a 的函数，最后求最大值．

［解］ 如图 4，当 $x\geqslant 0$ 时，由 $\begin{cases}y=ax^2,\\ y=1-x^2\end{cases}$ 解得 $x=\frac{1}{\sqrt{1+a}}$，$y=\frac{a}{1+a}$，故直线方程为

$$y=\frac{ax}{\sqrt{1+a}}.$$

旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{a^2}{3(1+a)}x^3-\frac{a^2}{5}x^5\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{5/2}}.$$

$$\frac{dV}{da}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{2a(1+a)^{5/2}-a^2\cdot\frac{5}{2}(1+a)^{3/2}}{(1+a)^5}=\frac{\pi(4a-a^2)}{15(1+a)^{7/2}}\ (a>0).$$

令 $\frac{dV}{da}=0$，并由 $a>0$ 解得唯一驻点 $a=4$．

由题意知，此旋转体在 $a=4$ 时取最大值，其最大体积为 $V\Big|_{a=4}=\dfrac{2\pi}{15}\cdot\dfrac{16}{5^{5/2}}=\dfrac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$.

例 2.44　讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 交点的个数.

［提示］　首先将讨论两曲线交点的个数转化为讨论方程实根的个数．然后作出辅助函数，求出唯一极值，分别就 k 的不同取值而确定根的个数.

［解］　问题等价于讨论方程 $\ln^4 x-4\ln x+4x-k=0$ 有几个不同的实根.

设 $\varphi(x)=\ln^4 x-4\ln x+4x-k$，

则有
$$\varphi'(x)=\frac{4(\ln^3 x-1+x)}{x}.$$
不难看出，$x=1$ 是 $\varphi(x)$的驻点.

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，即 $\varphi(x)$单调减少；当 $x>1$ 时 $\varphi'(x)>0$，即 $\varphi(x)$单调增加，故 $\varphi(1)=4-k$为函数$\varphi(x)$的最小值．由此可知

当 $k<4$，即 $4-k>0$ 时，$\varphi(x)=0$ 无实根，即两条曲线无交点.

当 $k=4$，即 $4-k=0$ 时，$\varphi(x)=0$ 有唯一实根，即两条曲线只有一个交点.

当 $k>4$，即 $4-k<0$ 时，由于
$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^+}[\ln x(\ln^3 x-4)+4x-k]=+\infty;$$
$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}[\ln x(\ln^3 x-4)+4x-k]=+\infty,$$
故 $\varphi(x)=0$ 有两个实根，分别位于点$(0,1)$与区间$(1,+\infty)$内，即两条曲线有两个交点.

［典型错误］　能完整正确解出此题的考生不多，其主要问题出在讨论 $k>4$ 时，没有求 $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=+\infty$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$，便肯定有两个实根.

例 2.45　设 $\rho=\rho(x)$是抛物线 $y=\sqrt{x}$上任一点 $M(x,y)(x\geqslant1)$处的曲率半径，$s=s(x)$是该抛物线上介于点$A(1,1)$与 M 之间的弧长．计算 $3\rho\dfrac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值．(在直角坐标系下曲率公式为 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$)

［提示］　本题考查曲线的曲率、曲率半径的概念及二者之间关系．曲率半径 $\rho(x)$与弧长 $s(x)$都是 x 的函数，所以求$\dfrac{d\rho}{ds}$与$\dfrac{d^2\rho}{ds^2}$，即计算由参数方程所确定的函数的导数.

［解］　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$y''=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$.

所以抛物线在点 $M(x,y)$处的曲率半径
$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{K}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{3/2}.$$
抛物线上$\overset{\frown}{AM}$的弧长
$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx.$$
由参数方程求导公式，得
$$\frac{d\rho}{ds}=\frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(4x+1)^{1/2}\cdot4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=6\sqrt{x},$$
$$\frac{d^2\rho}{ds^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dx}}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}},$$
从而
$$3\rho\frac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2=\frac{3}{2}(4x+1)^{3/2}\cdot\frac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9.$$

[典型错误] 不少考生没有弄清题意，不知道求什么．虽然本题给出了曲率公式，目的是减少考生背公式的数量．但仍有一些考生不知道曲率半径为曲率的倒数．因而无从着手解题．

例 2.46 试确定常数 A、B，C 的值，使得$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小．

[提示] 在题设等式中．左边是指数函数 e^x 与一个多项式的乘积，右边是一个一次多项式与一个比 x^3 高阶无穷小之和，这就提示我们把 e^x 用带有皮亚诺型余项的麦克劳林公式展开．

[解法 1] 将 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$代入题设等式，有

$$\left[1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right](1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

即

$$1+(1+B)x+\left(\frac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}B+C\right)x^3+o(x^3)$$
$$=1+Ax+o(x^3).$$

比较 x 各次幂的系数．有

$$1+B=A,\ \frac{1}{2}+B+C=0,\ \frac{1}{6}+\frac{1}{2}B+C=0.$$

解之得 $A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{2}{3}$．$C=\frac{1}{6}$．

[解法 2] 由题设知$e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax=o(x^3)$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax}{x^3}=0. \tag{1}$$

应用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2+B+2Cx)-A}{3x^2}=0. \tag{2}$$

于是

$$\lim_{x\to0}[e^x(1+Bx+Cx^2+B+2Cx)-A]=0,$$

得

$$1+B-A=0.$$

对(2)式再应用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}e^x\cdot\frac{1+Bx+Cx^2+B+2Cx+B+2Cx+2C}{6x}=0,$$

从而

$$\lim_{x\to0}\frac{1+2B+2C+(B+4C)x+Cx^2}{6x}=0, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to0}[1+2B+2C+(B+4C)x+Cx^2]=0,$$

得

$$1+2B+2C=0.$$

对(3)式再用一次洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{B+4C+2Cx}{6}=0,$$

故

$$B+4C=0.$$

解方程组

$$\begin{cases}1+B-A=0,\\1+2B+2C=0,\\B+4C=0.\end{cases}$$

得 $A=\frac{1}{3}$．$B=-\frac{2}{3}$，$C=\frac{1}{6}$．

[典型错误] 在第一种解法中．有的考生把 e^x 的展开式写错，有的考生不知道把 e^x 展到第几项合适。第二种解法由于算式较冗长，稍不注意就可能算错．

例 2.47 利用导数证明：当 $x>1$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$．

［提示］ 由于 $x>1$，故 $\ln x>0$，本题实际上欲证 $(1+x)\ln(1+x)>x\ln x$. 证明这类不等式常用的一个方法是，①构造恰当的辅助函数；②利用导数证明此函数是单调的；③计算辅助函数在区间端点的函数值，或计算自变量趋于端点时函数的极限.

［证明］ 设 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$，则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，在 $(1,+\infty)$ 内可导，且

$$f'(x)=\ln(1+x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>0,$$

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，因此当 $x>1$ 时，有

$$f(x)>f(1)=2\ln 2>0,$$

即

$$(1+x)\ln(1+x)-x\ln x>0,$$

所以当 $x>1$ 时，

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}.$$

例 2.48 设 $0<a<b$，证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

［提示］ 本题考查不等式的证明，常用的方法除讨论辅助函数的单调性外，有时用拉格朗日中值定理也可奏效. 本题中 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$ 可启发我们从拉格朗日中值定理建立等式入手，然后对等式进行“放大”或“缩小”.

［证明］ 利用函数的单调性证明右边的不等式.

设

$$\varphi(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}}\quad(x>a>0),$$

因为

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{ax}-x-a}{2x\sqrt{ax}}=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0,$$

故当 $x>a$ 时，$\varphi(x)$ 单调减少，又 $\varphi(a)=0$，所以当 $x>a$ 时，$\varphi(x)<\varphi(a)=0$，即

$$\ln x-\ln a<\frac{x-a}{\sqrt{ax}}.$$

特别地，当 $x=b>a$ 时，便有

$$\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}},$$

即

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

下面利用拉格朗日中值定理证明左边不等式.

设 $f(x)=\ln x\ (x>a>0)$，由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi}.$$

由于 $0<a<\xi<b$，故

$$\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}.$$

又由于 $a^2+b^2>2ab$，所以 $\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$，从而有

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}.$$

对于左边的不等式，也可构造辅助函数

$$g(x)=(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)\quad(x>a>0),$$

并用证明右边不等式的类似方法证明(略).

[典型错误] 用拉格朗日中值定理证明右边不等式将发生困难.

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi},\ a<\xi<b,\ 但很难推出\frac{1}{\xi}>\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

有的考生在此陷入困境.

例 2.49 设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

[提示] 本题考查用函数的单调性以及拉格朗日中值定理证明不等式. 关键是构造适当的函数. 由于此不等式可变形为 $\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a$，故可令 $\varphi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$；也可将原不等式中的 b 换成 x. 作辅助函数 $\varphi(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(x-a)$；不等式还可变形为 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}>\frac{4}{e^2}$，故可以对 $\varphi(x)=\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理. 当然也可以在 $[a,b]$ 上对 $f(x)=\ln^2 x$，$\varphi(x)=x$ 应用柯西中值定理.

[证法1] 设 $\varphi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$，则

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2},\quad \varphi''(x)=2\frac{(1-\ln x)}{x^2}.$$

所以当 $x>e$ 时，$\varphi''(x)<0$，故 $\varphi'(x)$ 单调减少，从而当 $e<x<e^2$ 时，有

$$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$

即当 $e<x<e^2$ 时，$\varphi(x)$ 单调增加，因此当 $e<a<b<e^2$ 时

$$\varphi(b)>\varphi(a).$$

即

$$\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a,$$

故

$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

[证法2] 设 $\varphi(x)=(\ln^2 x-\ln^2 a)-\frac{4}{e^2}(x-a)$.

以下证明同证法 1(略).

[证法3] 对函数 $\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),\quad a<\xi<b.$$

设 $\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$，则 $\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$.

当 $t>e$ 时，$\varphi'(t)<0$，所以 $\varphi(t)$ 单调减少，从而 $\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$，即

$$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2},$$

故

$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

[证法4] 令 $f(x)=\ln^2 x$，$g(x)=x$，在 $[a,b]$ 上对 $f(x)$，$g(x)$ 应用柯西中值定理，得

$$\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{2\ln\xi}{\xi},\quad a<\xi<b.$$

以下同证法 3(略).

[典型错误] ① 在证法 3 中，把

$$\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)=\frac{2\ln\xi}{\xi}.$$

中确定的 ξ 当成变量，直接求导数得

$$[f'(\xi)]'=f''(\xi)=\frac{2(1-\ln\xi)}{\xi^2}.$$

② 对于 $\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$ 在 $[e,e^2]$ 上单调减少不加证明.

例 2.50 设 p、q 是大于 1 的常数，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，证明：对任意的 $x>0$，有 $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x$.

[提示] 有些不等式可以通过求函数的最大值、最小值加以证明，特别是当辅助函数不具有单调性，不等式符号为“$\geqslant$”或“$\leqslant$”时.

[证] 记 $f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导，且

$$f'(x)=x^{p-1}-1,\ f''(x)=(p-1)x^{p-2}.$$

令 $f'(x)=0$ 解得唯一驻点 $x=1$，因为 $f''(1)=p-1>0$. 所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，也是最小值点，从而有

$$f(x)\geqslant f(1)=0,$$

即

$$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x.$$

例 2.51 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微. 对于 $[0,1]$ 上的每一个 x，函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内，且 $f'(x)\neq 1$，证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使 $f(x)=x$.

[提示] 本题相当于证明函数 $f(x)-x$ 在 $(0,1)$ 内有且只有一个零点. 零点的存在性可用连续函数在闭区间上的零点定理证明. 唯一性需用反证法，借助于罗尔定理证明.

[证明] 设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 由于 $0<f(x)<1$，所以 $F(0)=f(0)-0>0$，$F(1)=f(1)-1<0$，故由零点定理知，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 η，使

$$F(\eta)=f(\eta)-\eta=0,\ 即\ f(\eta)=\eta.$$

假设存在两个 η_1，$\eta_2\in(0,1)$，$\eta_1\neq\eta_2$，使 $f(\eta_1)=\eta_1$，$f(\eta_2)=\eta_2$，即 $F(\eta_1)=F(\eta_2)=0$. 根据罗尔定理，存在 ξ（ξ 介于 η_1 与 η_2 之间），使

$$F'(\xi)=0,\ 即\ f'(\xi)-1=0.$$

这与 $f'(x)\neq 1$ 矛盾.

综上可知，在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使 $f(x)=x$.

[典型错误] 有的考生在证明唯一性时，总试图证明出 $F(x)$ 具有单调性，即证明 $F'(x)=f'(x)-1$ 在区间 $(0,1)$ 内不变号. 由于题设条件所限，这是无法证明的. 本题告诉我们，当按照某种思路解题进行不下去时，应逆向思考，试着用反证法看是否可行.

例 2.52 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证：

(1) 在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$；

(2) 在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

[提示] 利用罗尔定理用反证法证明(1). 对于(2)的证明，首先将等式 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ 改写为 $f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$，这等价于 $[f(x)g'(x)-f'(x)g(x)]'_{x=\xi}=0$，由此启发我们去构造辅助函数，用罗尔定理证之.

[证明] (1) 用反证法.

假设存在 $c\in(a,b)$，使 $g(c)=0$，对 $g(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上分别应用罗尔定理知，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$. 再对 $g'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $g''(\xi_3)=0$，这与条件 $g''(x)\neq 0$ 矛盾. 故在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.

(2) 令 $\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，则 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，由罗尔定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0.$$

因 $g(\xi)\neq 0$，$g''(\xi)\neq 0$，故得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$　$\xi\in(a,b)$.

[典型错误] 在(2)的证明中，不知从证明 $f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0$ 入手，或者虽知利用罗尔定理，但构造不出辅助函数．"在某种条件下，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$" 是常见题型．常用的方法是借助闭区间上连续函数的零点定理或罗尔定理．使用罗尔定理的思路是构造辅助函数 $\varphi(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$，再找出两个点 x_1、$x_2\in[a,b]$，使 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$，则由罗尔定理必有 $f(\xi)=\varphi'(\xi)=0$．例如本题中的辅助函数，可用下法求得：

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\int[f(x)g''(x)-g(x)f''(x)]\mathrm{d}x\\&=\int f(x)\mathrm{d}g'(x)-\int g(x)\mathrm{d}f'(x)\\&=f(x)g'(x)-\int g'(x)f'(x)\mathrm{d}x-g(x)f'(x)+\int f'(x)g'(x)\mathrm{d}x\\&=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)+C\quad(\text{任意常数 }C\text{ 可删去}).\end{aligned}$$

例 2.53 设不恒为常数的函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$．

[提示] 除函数 $f(x)$"不恒为常数" 这一特殊条件外，本题其余条件都与罗尔定理相同，显然由罗尔定理得不出题中的结论，因而要从特殊条件入手，按题意存在 $c\in(a,b)$使 $f(c)\neq f(a)=f(b)$，画函数 $f(x)$ 的草图，并结合导数的几何意义，应用拉格朗日中值定理．即得出本题结论．

[证明] 因 $f(a)=f(b)$，且 $f(x)$不恒为常数，故存在点 $c\in(a,b)$，使 $f(c)\neq f(a)=f(b)$．

不妨设 $f(c)>f(a)$，于是在$[a,c]$上，因 $f(x)$满足拉格朗日中值定理的条件，故至少存在一点 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0.$$

至于 $f(c)<f(a)$情形，类似可证：至少存在一点 $\xi\in(c,b)\subset(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}>0$.

综上得证欲证之结论．

[典型错误] 有的考生由 $f(x)$不恒为常数，得出 $f'(x)$不恒为零．又根据罗尔定理知，至少存在一点 η，使$f'(\eta)=0$,然后就论证不下去了．证不出的原因是没有充分注意"不恒为常数"这一条件．即至少存在一点 $c\in(a,b)$，使 $f(c)\neq f(a)=f(b)$．考生应注意．需要建立函数值与导数值联系时．应考虑用拉格朗日中值定理．

例 2.54 设在$[0,+\infty)$上函数 $f(x)$有连续导数，且 $f'(x)\geqslant k>0$，$f(0)<0$，证明 $f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个零点．

[提示] 显示 $f(x)$单调增加，且 $f(0)<0$，只需证明存在点 $b>0$，使 $f(b)>0$，即可由闭区间上连续函数的零点定理得证．而 $f(b)$、$f(0)$、$f'(x)$的联系可用拉格朗日中值定理建立．

[证明] 由拉格朗日中值定理，对于 $x>0$，有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)\geqslant kx,$$

即有 $f(x)\geqslant f(0)+kx$．令 $f(x)>0$，则 $x>-\dfrac{f(0)}{k}$．由于 $f(0)<0$．$k>0$ 为常数，故任取一满足此不等式的 b，则有 $f(b)>0$．根据连续函数的零点定理可知存在 $x_0\in(0,b)\subset(0,+\infty)$，使 $f(x_0)=0$．

又因 $f'(x)\geqslant k>0$，可知 $f(x)$在$(0,+\infty)$内单调增加．从而 $f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个零点．

[典型错误] 不能用拉格朗日中值定理证明满足 $f(b)>0$ 的 b 存在．

例 2.55 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且 $f'(x)>0$．若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，证明：

(1) 在(a,b)内 $f(x)>0$；

(2) 在(a,b)内存在点 ξ，使

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)};$$

(3) 在(a,b)内存在与(2)中 ξ 相异的点 η，使

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

[提示] 本题考查的重点是微分中值定理，还涉及函数连续、单调及变上限定积分的内容.(1)，(2)是为(3)铺设的台阶. 证明此类题目需构造辅助函数. 将(3)的结论变形为

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}.$$

从中可以得到启发：用柯西中值定理与拉格朗日中值定理先后确定 ξ 与 η.

[证明] (1) 因为 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，故 $\lim\limits_{x\to a^+}f(2x-a)=0$. 由 $f(x)$在$[a,b]$上连续，从而 $f(a)=0$. 又$f'(x)>0$,知 $f(x)$在(a,b)内单调增加，故

$$f(x)>f(a)=0,\ x\in(a,b).$$

(2) 设 $F(x)=x^2$, $g(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\quad(a\leqslant x\leqslant b)$，则 $g'(x)=f(x)>0$. 故 $F(x)$，$g(x)$满足柯西中值定理的条件，于是在(a,b)内存在点 ξ，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t}=\left.\frac{(x^2)'}{\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'}\right|_{x=\xi},$$

即
$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

(3) 因 $f(\xi)=f(\xi)-0=f(\xi)-f(a)$，在$[a,\xi]$上应用拉格朗日中值定理，知在$(a,\xi)$内存在一点 η，使 $f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$，从而由(2)的结论得

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}.$$

即有
$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[典型错误] 由于中值定理是高等数学部分考查的一个重点，考生对构造辅助函数训练较多，再加上(1)、(2)的铺垫. 所以解题情况比较理想，需要注意的是在证明过程中的逻辑性与严密性.

例 2.56 设函数 $f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在开区间$(-1,1)$内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$.

[提示] 因为要证的结论中有 $f'''(\xi)$，故需用到泰勒公式. 又题设中含有 $f'(0)=0$，提示我们把 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展开为 2 阶麦克劳林公式.

[证明] 由麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3.$$

其中 η 介于 0 与 x 之间，$x\in[-1,1]$.

分别令 $x=-1$ 和 $x=1$，并结合已知条件，得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),\quad -1<\eta_1<0,$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),\quad 0<\eta_2<1.$$

两式相减，可得

$$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6.$$

由 $f'''(x)$的连续性，知 $f'''(x)$在闭区间$[\eta_1,\eta_2]$上有最大值和最小值，设它们分别是 M 和 m，则有

$$m\leqslant\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\leqslant M.$$

再由连续函数的介值定理知．至少存在一点 $\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$，使

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3.$$

［典型错误］ 有的考生把泰勒公式只展开到 3 项，试图再通过一次中值定理达到目的，这显然是不可能的．有的考生将 $x=-1$ 和 $x=1$ 代入泰勒公式后，把 η_1 和 η_2 不加区别都写成 ξ，似乎很快得到证明．但这是一个原则错误，因为 η_1 和 η_2 位于不同的区间，是绝不会相等的．还有的考生构造辅助函数 $F(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^3$，试图连续使用罗尔定理达到目的．但他们忽略了题目中并没给出 $f(x)$的二阶导数的情况，所以也做不下去．

例 2.57 设 $f(x)$在区间$[-a,a]$ $(a>0)$上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，

(1) 写出 $f(x)$带有拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(2) 证明在$[-a,a]$上至少存在一点 η，使

$$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\,dx.$$

［提示］ 第一问为第二问设一个台阶．将(2)中的结论改写为 $f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)\,dx$，只需证明该等式右端介于 $f''(x)$在$[-a,a]$上的最大值与最小值之间即可．

(1)［解］ 对任意的 $x\in[-a,a]$，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间．

(2)［证法 1］ $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{a}f'(0)\,x\,dx+\int_{-a}^{a}\frac{f''(\xi)}{2!}x^2dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2f''(\xi)dx.$

因为 $f''(x)$在$[-a,a]$上连续，故对任意的 $x\in[-a,a]$，有 $m\leqslant f''(x)\leqslant M$．这里 M、m 分别为$f''(x)$在$[-a,a]$上的最大值与最小值，所以有

$$m\int_0^a x^2dx\leqslant\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2f''(\xi)dx\leqslant M\int_0^a x^2dx.$$

即

$$m\leqslant\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx\leqslant M.$$

因而由 $f''(x)$的连续性知，至少存在一点 $\eta\in[-a,a]$，使

$$f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx,$$

即 $$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\,dx.$$

(3)［证法 2］ 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F(0)=0$，$F'(0)=f(0)$，$F''(0)=f'(0)$．

$$\begin{aligned}F(x)&=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2!}x^2+\frac{F'''(\xi)}{6}x^3\\&=f(0)x+\frac{f'(0)}{2}x^2+\frac{f''(\xi)}{6}x^3\\&=\frac{f'(0)}{2}x^2+\frac{f''(\xi)}{6}x^3,\ (\xi\text{ 介于 0 与 }x\text{ 之间})\end{aligned}$$

在上式中分别令 $x=a$，$x=-a$ 得

$$F(a)=\frac{f'(0)}{2}a^2+\frac{f'(\xi_1)}{6}a^3,\ 0<\xi_1<a,$$

$$F(-a)=\frac{f'(0)}{2}a^2-\frac{f''(\xi_2)}{6}a^3,\ -a<\xi_2<0,$$

以上两式相减得

$$F(a)-F(-a)=\frac{a^3}{6}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)].$$

由介值定理知，存在 $\eta\in[\xi_2,\xi_1]\subset[-a,a]$，使得 $f''(\eta)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$. 故

$$F(a)-F(-a)=\frac{a^3}{3}f''(\eta),\ 即\ 3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=a^3f''(\eta).$$

[典型错误] 有的考生对“带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式”不理解. 即对拉格朗日余项指的是什么形式不清楚，还有的考生把余项 $\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2$ 中的 ξ 看作常数. 于是便得到 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f''(\xi)\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x=\frac{a^3}{3}f''(\xi)$. 从而 ξ 便是 η. 事实上. 这里的 ξ 与 x 有关，即可写成 $\xi=\xi(x)$. 且并不知道它是否连续，所以既不能把 $f''(\xi)$ 看作常数. 也不可把 $f''(\xi)$ 看作连续函数而应用第二积分中值定理.

例 2.58 设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq0$. 试证：

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x]$ 成立；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

[提示] 本题考查三点：①拉格朗日中值定理：②会用 $f''(x)\neq0$ 证明 $f'(x)$ 单调. 或用 $f''(x)\neq0$ 证明 $f'(x)$ 至多有一个零点：③会根据导数定义凑出某极限式. 或会用一阶泰勒展开式与拉格朗日中值定理对照求极限. (1)的证明要点是 $\theta(x)$ 的唯一性. 利用 $f''(x)\neq0$，证明 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单调即可. (2)的证明需运用泰勒公式.

[证法1] (1) 任给非零 $x\in(-1,1)$. 由拉格朗日中值定理得 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x]$ $[0<\theta(x)<1]$.

因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且 $f''(x)\neq0$. 所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号. 不妨设 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单调增加，故 $\theta(x)$ 唯一.

(2) 由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\ \xi 在 0 与 x 之间.$$

所以 $xf'[\theta(x)x]=f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，从而

$$\theta(x)\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0)$，$\lim\limits_{x\to0}f''(\xi)=\lim\limits_{\xi\to0}f''(\xi)=f''(0)$，故 $\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

[证法2] (1) 同证法 1.

(2) 对于非零 $x\in(-1,1)$. 由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x]\quad[0<\theta(x)<1].$$

所以 $\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$.

由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0)$,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

[证法3] (1) 同证法 1.

(2) 由 $f(x)=f(0)+f'[\theta(x)x]x$. 将 $f'[\theta(x)x]$再展开，有

$$f'[\theta(x)x]=f'(0)+f''(0)\theta(x)x+o[\theta(x)x].$$

代入上式，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\theta(x)x^2+o[\theta(x)x]x.$$

所以

$$\theta(x)=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x-o[\theta(x)x]x}{f''(0)x^2}.$$

令 $x\to0$ 取极限，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\frac{1}{2}f''(0),$$

$$\lim_{x\to0}\frac{o[\theta(x)x]x}{x^2}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

[证法4] (1) 同证法 1.

(2) 因 $f''(x)\neq0$. 故 $f'(x)$存在单值连续可导的反函数，记为 $\varphi(x)$. 则有

$$\theta(x)x=\varphi\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right].$$

所以

$$\lim_{x\to0}\varphi\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]=0.$$

$$\lim_{x\to0}\theta(x)=\lim_{x\to0}\frac{\varphi\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]}{x}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\varphi'\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]\cdot\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x^2}$$

$$=\varphi'[f'(0)]\lim_{x\to0}\frac{xf''(x)}{2x}=\frac{1}{2}\varphi'[f'(0)]f''(0).$$

但因 $\varphi[f'(x)]\equiv x$，两边对 x 求导. 有 $\varphi'[f'(x)]\cdot f''(x)=1$. 以 $x=0$ 代入. 于是有$\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

[典型错误] ①也许受了某些辅导书的影响，由题设 $f(x)$的二阶导数存在(连续). 就写出

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2.$$

这样一来，与欲证的 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x]$联系不起来，以下一片空白. 这也说明. 这些考生对拉格朗日中值定理的各种变形写法一无所知. ②有的人只证“存在”未证“唯一”，有的只证“唯一”未证存在. 可见审题十分马虎. ③有的考生不知道“唯一”是对谁说的. 例如采用如下反证法：设存在 $\theta_1(x_1)$与$\theta_2(x_2)$，使

$$f(x_1)=f(0)+x_1f[\theta_1(x_1)x_1],$$

$$f(x_2)=f(0)+x_2f[\theta_2(x_2)x_2].$$

做不下去了. 应该是对固定的 x，只对应一个 $\theta(x)$，而不是对两个不同的 x_1 与 x_2. 对应同一个 θ. ③在证(2)时，很多考生采用如下证法：由(1)，有

$$\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{x}.$$

两边令 $x\to0$ 取极限，左边按洛必达法则有$\frac{1}{2}f''(0)$，右边

$$\lim_{x\to0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}f''[\theta(x)x]\theta(x)$$

$$=f''(0)\lim_{x\to 0}\theta(x),$$

从而推知$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$. 错在何处呢？上式用洛必达法则分子对 x 求导时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'[\theta(x)x]=f''[\theta(x)x][\theta(x)x]'_x,$$

$\theta(x)$对 x 可不可求导？考生没有想到这个关键问题. 所以这种做法是不对的.

三、一元函数积分学

·考试内容与要求·

考试内容

原函数和不定积分的概念　不定积分的基本性质　基本积分公式　定积分的概念和基本性质　定积分中值定理　积分上限的函数及其导数　牛顿－莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式　不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法　有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分　反常(广义)积分　定积分的应用

考试要求

1. 理解原函数的概念，理解不定积分和定积分的概念.

2. 掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理. 掌握换元积分法与分部积分法.

3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分.

4. 理解积分上限的函数，会求它的导数，掌握牛顿－莱布尼茨公式.

5. 了解反常积分的概念. 会计算反常积分.

6. 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心等)及函数的平均值.

·考试内容解析·

(一) 不定积分

1. 基本概念(原函数和不定积分的概念)

(1) 原函数　设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义，若存在函数 $F(x)$，使得在区间 I 上处处有

$$F'(x)=f(x)，或 \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数.

若 $F(x)$是 $f(x)$的原函数，则 $F(x)+C$ 也是$f(x)$的原函数(其中 C 为任意常数)，且 $f(x)$的任意两个原函数只差一个常数.

(2) 不定积分　在区间 I 上，函数 $f(x)$的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$在区间 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x .$$

设 $F(x)$是 $f(x)$在 I 上的一个原函数，那么 $F(x)+C$ 就是$f(x)$的不定积分，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C.$$

因此 $f(x)$ 的不定积分就是 $f(x)$ 的原函数的全体.

注意：在求不定积分时，求出一个原函数 $F(x)$后，一定要加上一个任意常数 C.

2. 基本性质

1° $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$，或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$；

2° $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$；