因为

$$E(\hat{\theta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 2nx\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}x = \theta + \frac{1}{2n} \neq 0,$$

所以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量不具有无偏性.

[典型错误] (1) 分布函数概念模糊, 例如将分布函数 $F(x)$ 写成

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\theta}^{x} 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}\mathrm{d}\theta,$$

或甚至写成

$$F(x) = \int_0^x 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}\mathrm{d}\theta,$$

均未注明 $x>\theta$, 未写出当 $x\leqslant\theta$ 时的 $F(x)$.

有的干脆写成 $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.[应是 $F(+\infty) = 1$]

(2) 积分 $\int_{\theta}^{x} 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}\mathrm{d}\theta$ 计算错.

(3) 将 $P\{X_i > x\}$ 写成 $F(x)$. [应是 $P\{X_i > x\} = 1 - P\{X_i \leqslant x\} = 1 - F(x)$].

(4) 数学期望 $E(X)$ 的公式写成 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1\left[\text{应是 } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x\right]$. 这些都说明基础不扎实.

例 7.12 设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x \geqslant \theta, \\ 0, & x < \theta. \end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数. 又设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 X 的一组样本观测值. 求参数 θ 的最大似然估计值.

[提示] 根据最大似然估计的定义来求.

[解] 似然函数为

$$L(\theta) = L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$$

$$= \begin{cases} 2^n \mathrm{e}^{-2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i \geqslant \theta\ (i = 1,2,\cdots,n). \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $x_i\geqslant\theta\,(i=1,2,\cdots,n)$ 时, $L(\theta)>0$, 取对数, 得

$$\ln L(\theta) = n\ln 2 - 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta).$$

因为 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 2n > 0$, 所以 $L(\theta)$ 单调增加.

由于 θ 必须满足 $\theta\leqslant x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$, 因此当 θ 取 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的最小值时, $L(\theta)$ 取最大值. 所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

[典型错误] 由于 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = 2n > 0$, $L(\theta)$ 单调增加, 有些考生就不知道应如何取估计值了.

八、假设检验

• 考试内容与要求 •

考试内容

显著性检验　假设检验的两类错误　单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验

考试要求

1. 理解显著性检验的基本思想, 掌握假设检验的基本步骤, 了解假设检验可能产生的两类错误.

2. 掌握单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验.

• 考试内容解析 •

(一) 假设检验的基本概念

1. 假设检验

关于总体分布的未知参数的假设，称为统计假设. 所提出的假设称为零假设或原假设，记为 H_0；对立于零假设的假设称为对立假设或备择假设，记为 H_1.

假设检验就是根据样本，按照某种检验法则，确定在原假设 H_0 和对立假设 H_1 之中接受其一.

2. 两类错误

在假设 H_0 实际上为真时，我们却错误地拒绝了 H_0. 称为第一类错误；当 H_0 实际上不真时，我们却错误地接受了 H_0. 称为第二类错误.

3. 显著性检验

在确定检验法则时，应尽可能地使犯两类错误的概率都小些. 但是，一般说来，当样本容量取定后，如果要减少犯某一类错误的概率，则犯另一类错误的概率往往要增大. 要使犯两类错误的概率都减少，只好加大样本容量. 在给定样本容量的情况下，我们总是控制犯第一类错误的概率，使它不大于给定的 α ($0<\alpha<1$). 这种检验问题称为显著性检验问题. 给定的数 α 称为显著性水平. α 的选取依具体情况而定，通常取 0.1，0.05，0.01 等值.

在对假设 H_0 进行检验时，常使用某个统计量 T，称为检验统计量. 当检验统计量在某个区域 W 上取值时，我们就拒绝假设 H_0. 称区域 W 为拒绝域.

4. 假设检验的一般步骤

(1) 根据实际问题的要求，提出原假设 H_0 和对立假设 H_1；

(2) 给出显著性水平 α 及样本容量 n；

(3) 确定检验统计量 T 及拒绝域形式；

(4) 按犯第一类错误的概率等于 α 求出拒绝域 W；

(5) 根据样本值计算检验统计量 T 的观测值 t，当 $t\in W$ 时，拒绝原假设 H_0；否则，接受原假设 H_0.

5. 双边检验与单边检验

设总体 X 的分布中含有某一参数 θ，形如

$$H_0:\theta=\theta_0;\ H_1:\theta\neq\theta_0$$

的假设检验称为双边检验；形如

$$H_0:\theta=\theta_0\,(\text{或 }\theta\leqslant\theta_0);\ H_1:\theta>\theta_0$$

的假设检验称为右边检验；形如

$$H_0:\theta=\theta_0\,(\text{或 }\theta\geqslant\theta_0);\ H_1:\theta<\theta_0$$

的假设检验称为左边检验. 右边检验和左边检验统称为单边检验.

(二) 正态总体均值和方差的假设检验

设显著性水平为 α，关于单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的均值 μ 和方差 σ^2 的假设检验，以及关于两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的均值差 $\mu_1-\mu_2$ 和方差相等 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 的假设检验，列表如下：

	原假设 H_0	检验统计量	H_0 为真时检验统计量的分布	对立假设 H_1	拒 绝 域
1	$\mu=\mu_0$ (σ^2 已知)	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0,1)$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$u\geqslant u_\alpha$ $u\leqslant -u_\alpha$ $\lvert u\rvert\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$

	原假设 H_0	检验统计量	H_0 为真时检验统计量的分布	对立假设 H_1	拒 绝 域
2	$\mu=\mu_0$ (σ^2 未知)	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\neq\mu_0$	$t\geqslant t_\alpha(n-1)$ $t\leqslant -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
3	$\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ 已知)	$\chi^2=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	$\chi^2(n)$	$\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geqslant\chi_\alpha^2(n)$ $\chi^2\leqslant\chi_{1-\alpha}^2(n)$ $\chi^2\leqslant\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 或 $\chi^2\geqslant\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$
4	$\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ 未知)	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$ $\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2\geqslant\chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2\leqslant\chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2\leqslant\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $\chi^2\geqslant\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$
5	$\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2,σ_2^2 已知)	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0,1)$	$\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$ $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$u\geqslant u_\alpha$ $u\leqslant -u_\alpha$ $\lvert u\rvert\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$
6	$\mu_1-\mu_2=\delta$ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知)	$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$	$t(n_1+n_2-2)$	$\mu_1-\mu_2>\delta$ $\mu_1-\mu_2<\delta$ $\mu_1-\mu_2\neq\delta$	$t\geqslant t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\leqslant -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\lvert t\rvert\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$
7	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ (μ_1,μ_2 已知)	$F=\dfrac{n_2\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{n_1\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}$	$F(n_1,n_2)$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F\geqslant F_\alpha(n_1,n_2)$ $F\leqslant F_{1-\alpha}(n_1,n_2)$ $F\leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$ 或 $F\geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$
8	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ (μ_1,μ_2 未知)	$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F(n_1-1,n_2-1)$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\sigma_1^2<\sigma_2^2$ $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$F\geqslant F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F\leqslant F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F\leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 或 $F\geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$

表中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$，$S_w=\sqrt{S_w^2}$.

·例题详解·

例 8.1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中 μ 和 σ^2 未知. 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则假设 $H_0:\mu=0$ 的 t 检验使用统计量________.

［答案］ $\frac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$.

［提示］ 本题考查正态总体样本假设检验统计量. 根据一般表达式即可得到.

［解］ 由于 μ 未知，H_0 为 $\mu=0$，因此 t 检验使用的统计量为

$$T=\frac{\overline{X}}{S/\sqrt{n}}.$$

其中 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\frac{Q^2}{n-1}}$，从而得

$$T=\frac{\overline{X}}{\sqrt{\frac{Q^2}{n-1}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}}}=\frac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}.$$

例 8.2 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$是来自正态总体 $N(\mu,2^2)$的样本，样本均值为 $\overline{X}$. 则在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设$H_0:\mu=5;H_1:\mu\neq5$ 的拒绝域 $W=$________.

［答案］ $\{|\overline{x}-5|\geqslant0.98\}$.

［提示］ 本题考查正态总体样本假设检验拒绝域的计算.

［解］ 由于 $n=16$，$\sigma=2$，则检验假设 H_0 的检验统计量为

$$U=\frac{\overline{X}-5}{2/\sqrt{16}}=2\overline{X}-10\sim N(0,1).$$

对于显著性水平 $\alpha=0.05$，有

$$P\{|U|\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\}=P\{|2\overline{X}-10|\geqslant1.96\}$$
$$=P\{|\overline{X}-5|\geqslant0.98\}=\alpha=0.05,$$

因此检验假设

$$H_0:\mu=5;H_1:\mu\neq5$$

的拒绝域为

$$W=\{|\overline{x}-5|\geqslant0.98\}.$$

例 8.3 在正常情况下，维尼纶纤度服从正态分布，方差不大于 0.048^2. 某日抽取 5 根纤维，测得纤度如下：

1.32，1.55，1.36，1.40，1.44.

在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下检验该日生产的维尼纶纤度的方差是否正常.

［提示］ 这是一道关于服从正态总体样本方差的双边检验问题。检验统计量取$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$.

［解］ 在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下检验假设

$$H_0:\sigma^2\leqslant0.048^2;\ H_1:\sigma^2>0.048^2.$$

由于 μ 为未知，因此检验统计量应取为

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1).$$

这里 $\sigma_0^2=0.048^2$. $n=5$. 检验 H_0 的拒绝域为

$$W=\{\chi^2\geqslant\chi_\alpha^2(n-1)\},$$

其中 $\chi^2_\alpha(n-1)=\chi^2_{0.01}(5-11)=3.277$.

因为 $S^2=0.007\ 78$，所以检验统计量 χ^2 的观测值为

$$\chi^2=\frac{(5-1)\times 0.007\ 78}{0.048^2}\approx 13.5.$$

由于 $\chi^2=13.5>13.277=\chi^2_{0.01}(5-1)$，所以拒绝原假设 H_0，接受对立假设 H_1. 即认为该日生产的维尼纶纤度的方差显著大于 0.048^2，因而不正常.

例 8.4 设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

附表：t 分布表

$$P\{t(n)\leqslant t_p(n)\}=p$$

$t_p(n)$ \ p / n	0.95	0.975
35	1.689 6	2.030 1
36	1.688 3	2.028 1

［提示］ 这是一个检验正态总体均值的双边检验问题，根据抽样分布性质 $\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$. 因此，当原假设为真时($\mu=70$)，拒绝域为：

$$|t|=\frac{|\overline{x}-70|}{s}\sqrt{n}\geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

将 $\overline{x}$，s，n 代入计算出 $|t|$ 值，查表得出 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，比较 $|t|$ 与 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 之大小，得出接受或拒绝原假设的结论.

［解］ 设该次考试的考生成绩为 X，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 把从 X 中抽取的容量为 n 的样本均值记为 $\overline{X}$，样本标准差记为 S. 本题是在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设

$$H_0:\mu=70;\ H_1:\mu\neq 70.$$

拒绝域为

$$|t|=\frac{|\overline{x}-70|}{s}\sqrt{n}\geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

由 $n=36$，$\overline{x}=66.5$，$s=15$，$t_{0.975}(36-1)=2.030\ 1$，算得

$$|t|=\frac{|66.5-70|\sqrt{36}}{15}=1.4<2.030\ 1.$$

所以接受假设 $H_0:\mu=70$，即在显著性水平 0.05 下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

郑重声明