$$= f''(0)\lim_{x\to 0}\theta(x),$$

从而推知$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$．错在何处呢？上式用洛必达法则分子对 x 求导时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'[\theta(x)x]=f''[\theta(x)x][\theta(x)x]'_x,$$

$\theta(x)$对 x 可不可求导？考生没有想到这个关键问题．所以这种做法是不对的．

三、一元函数积分学

·考试内容与要求·

考试内容

原函数和不定积分的概念　不定积分的基本性质　基本积分公式　定积分的概念和基本性质　定积分中值定理　积分上限的函数及其导数　牛顿－莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式　不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法　有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分　反常(广义)积分　定积分的应用

考试要求

1．理解原函数的概念，理解不定积分和定积分的概念．

2．掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分和定积分的性质及定积分中值定理．掌握换元积分法与分部积分法．

3．会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分．

4．理解积分上限的函数，会求它的导数，掌握牛顿－莱布尼茨公式．

5．了解反常积分的概念．会计算反常积分．

6．掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力、质心等)及函数的平均值．

·考试内容解析·

(一) 不定积分

1．基本概念(原函数和不定积分的概念)

(1) 原函数　设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义．若存在函数 $F(x)$．使得在区间 I 上处处有

$$F'(x)=f(x)，或 \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数．

若 $F(x)$是 $f(x)$的原函数，则 $F(x)+C$ 也是$f(x)$的原函数(其中 C 为任意常数)，且 $f(x)$的任意两个原函数只差一个常数．

(2) 不定积分　在区间 I 上，函数 $f(x)$的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$在区间 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x .$$

设 $F(x)$是 $f(x)$在 I 上的一个原函数，那么 $F(x)+C$ 就是$f(x)$的不定积分，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C.$$

因此 $f(x)$ 的不定积分就是 $f(x)$ 的原函数的全体．

注意：在求不定积分时，求出一个原函数 $F(x)$后．一定要加上一个任意常数 C．

2．基本性质

1° $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$．或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$；

2° $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，或 $\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$；

3° $\int [k_1 f_1(x) \pm k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1\int f_1(x)\mathrm{d}x \pm k_2\int f_2(x)\mathrm{d}x$.

3．基本积分公式

1° $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C\ (\mu \neq -1)$；

2° $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$；

3° $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$，　　$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$；

4° $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$；

5° $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$；

6° $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$；

7° $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

8° $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；

9° $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$；

10° $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；

11° $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

12° $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$，　　$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$；

13° $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$，　　$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$；

14° $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$.

4．基本积分法

(1) 第一类换元法(凑微分法)

设 $f(u)$具有原函数 $F(u)$，$u=\varphi(x)$可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) = \int f(u)\mathrm{d}u$$
$$= F(u) + C = F[\varphi(x)] + C.$$

(2) 第二类换元法(一般换元法)

设函数 $x=\varphi(t)$具有连续导数，且 $\varphi'(t)\neq 0$．又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$具有原函数 $\Phi(t)$，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \Phi(t) + C = \Phi[\varphi^{-1}(x)] + C.$$

一般地，当被积函数含根式$\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$　$(a>0)$时，可分别作代换：$x=a\sin t$，$x=a\tan t$，$x=a\sec t$；当被积函数分母的最高次数高于分子的最高次数时，可作倒置换 $x=\dfrac{1}{t}$；当被积函数是由 a^x 所构成的代数式时，可作指数代换：$t=a^x$，或 $t=\mathrm{e}^x$．

(3) 分部积分法

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$具有连续导数，则有分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

分部积分法的关键是恰当地选择 u 和 $\mathrm{d}v$，选取的原则是：(1)v 要容易求得；(2)$\int v\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\mathrm{d}v$ 容易积分．一般地形如

$$\int x^n e^{kx} dx, \qquad \int x^n \sin ax dx, \qquad \int x^n \cos ax dx$$

的积分，其中 n 为正整数，k，a 为常数，选取 $u(x) = x^n$，$dv = e^{kx}dx$，$\sin ax dx$，$\cos ax dx$. 形如

$$\int x^n \ln x dx, \qquad \int x^n \arcsin x dx, \qquad \int x^n \arctan x dx$$

的积分，选取 $u(x) = \ln x$，$\arcsin x$，$\arctan x$，$dv = x^n dx$. 形如

$$\int e^{kx}\sin(ax+b)dx, \qquad \int e^{kx}\cos(ax+b)dx,$$

的积分，其中 k. a. b 为常数，$u(x)$. $dv(x)$可任意选取.

5. 几种特殊类型函数的积分

(1) 有理函数的积分

由于有理函数可以分解成多项式及部分分式(用待定系数法)之和. 因此它的积分总可以化为多项式和如下的四种类型积分：

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C \quad (n \neq 1);$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}$$

$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C,$$

其中 $p^2-4q<0$；

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2\right]^n}$$

$$= \frac{-M}{2(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n},$$

其中 $p^2-4q<0$，$u = x+\frac{p}{2}$. $a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$，积分 $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}$ 可用递推公式：

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{u}{2(n-1)a^2(u^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}.$$

上述方法是有理函数积分的一般方法，但未必是最简单的方法. 因此遇到有理函数的积分，应该分析被积函数的特点，选择恰当的方法，例如凑微分法等.

(2) 三角函数有理式的积分

由 $\sin x$，$\cos x$ 以及常数经过有限次的四则运算所构成的函数称为三角函数有理式，记为 $R(\sin x,\cos x)$，积分 $\int R(\sin x,\cos x)dx$ 称为三角函数有理式的积分.

由三角学知：$\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$，$\cos x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$. 若作万能变换 $u = \tan\frac{x}{2}$，则

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2},$$

于是将三角函数有理式积分化为 u 的有理函数的积分．但是这样化出的有理函数的积分往往比较繁．因此这种代换不一定是最简捷的代换．碰到此类题目时，应仔细分析被积函数特点或者利用三角学方面的知识，尽量使被积函数化简，或者利用凑微分法．

(3) 简单无理函数的积分

无理函数积分，一般是通过变量代换，去掉根号，化为有理函数的积分．形如

$$\int R(x,\ \sqrt[n]{ax+b})\mathrm{d}x$$

的积分，可作变换 $u=\sqrt[n]{ax+b}$，形如

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)\mathrm{d}x$$

的积分，可作变换 $u=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}}$．

(二) 定积分

1．定积分的概念

(1) 定积分定义

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意插入 $n-1$ 个分点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

把区间$[a,b]$分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$

各小区间的长度依次为

$$\Delta x_1=x_1-x_0,\ \Delta x_2=x_2-x_1,\ \cdots,\ \Delta x_n=x_n-x_{n-1}.$$

在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任意取一点 $\xi_i\ (x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$．作函数值 $f(\xi_i)$与小区间长度 Δx_i 乘积$f(\xi_i)\Delta x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，并作出和

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$．如果不论对$[a,b]$怎样分法．也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点 ξ_i 怎样取法．只要当 $\lambda\to0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，这时我们称函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积，而把极限值称为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分(简称积分)．记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $f(x)$叫做被积函数．$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积表达式，x 叫做积分变量．a 叫做积分下限．b 叫做积分上限，$[a,b]$叫做积分区间．

(2) 定积分几何意义　设 $f(x)\geqslant0$．定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示曲线 $y=f(x)$，两条直线 $x=a$，$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积；若 $f(x)<0$．由曲线 $y=f(x)$．两条直线 $x=a$、$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$．一般地，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 则是各小区间上曲边梯形面积的代数和．

(3) 可积的充分条件

设 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上可积．

设 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$在$[a,b]$上可积．

设 $f(x)$在区间$[a,b]$上单调有界，则 $f(x)$在$[a,b]$上可积．

2．基本性质

1° 定积分只与被积函数和积分区间有关，与积分变量无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \cdots;$$

2° $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$；

3° $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$；

4° $\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$；

5° $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$；

6° **定积分比较定理** 设 $f(x)\leqslant g(x)$，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；

推论Ⅰ 若 $f(x)\geqslant 0$，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

推论Ⅱ $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.

7° **估值定理** 设 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$，其中 m，M 是常数；则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a);$$

8° **积分中值定理** 若 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

3．微积分基本公式

定理1 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则变上限积分函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在$[a,b]$上具有导数，并且有

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x).$$

定理2 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数.

定理3 牛顿－莱布尼茨公式

设函数 $F(x)$是连续函数 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

4．定积分的计算

(1) 牛顿－莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

(2) 定积分的换元法

设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，函数 $x=\varphi(t)$满足

1° $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；

2° $\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)上具有连续导数；

3° 当 $t\in[\alpha,\beta]$(或$[\beta,\alpha]$)时，$x\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(3) 分部积分法

设函数 $u(x)$，$v(x)$在区间$[a,b]$上具有连续导数 $u'(x)$、$v'(x)$，则有

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

5. 几个常用公式

(1) 设 $f(x)$在$[-l,l]$上连续，则

$$\int_{-l}^l f(x)\mathrm{d}x = \int_0^l [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{当 } f(-x)=-f(x)\text{，即 } f(x)\text{为奇函数时，} \\ 2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } f(-x)=f(x)\text{，即 } f(x)\text{为偶函数时.} \end{cases}$$

(2) 设 $f(x)$是以 T 为周期的连续函数，a 为任意实数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{2m-1}{2m}\cdot\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2m, \\ \dfrac{2m}{2m+1}\cdot\dfrac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}, & n=2m+1, \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2m, \\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1. \end{cases}$$

(4) 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

(5) 设 $f(x)$连续，则

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

6. 定积分的应用

(1) 平面图形的面积

1° 由直线 $x=a$，$x=b$，曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$[$f(x)\leqslant g(x)$]所围图形(见图 5)的面积为

$$S = \int_a^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x.$$

2° 由曲线 $r=r_1(\theta)$，$r=r_2(\theta)$[$r_1(\theta)<r_2(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$]所围平面图形(见图 6)的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta.$$

(2) 平行截面面积已知的立体体积

垂直于 x 轴的平面截立体 Ω 所得的截面面积是 x 的连续函数 $S(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$(见图 7)，则 Ω 的体积为

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

特别地，由连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积(见图 8)为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 旋转体侧面积

由连续曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体侧面积为

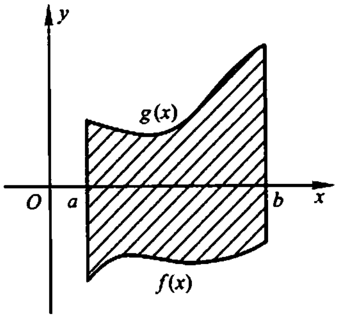

图 5

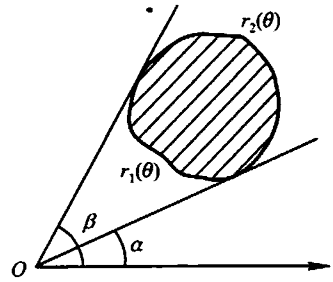

图 6

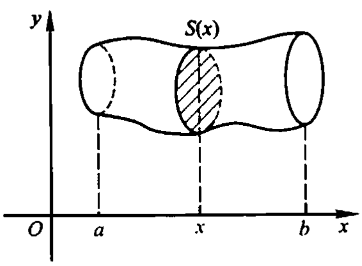

图 7

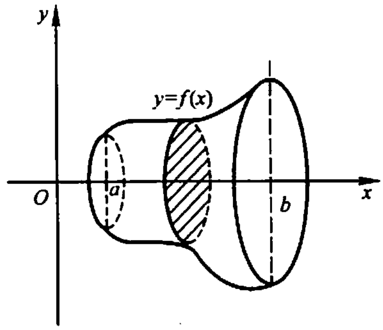

图 8

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

(4) 平面曲线弧长

1° 设曲线弧由直角坐标方程 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数，则曲线弧长为

$$S=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

2° 设曲线弧由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出，其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则曲线弧长为

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

3° 设曲线弧由极坐标方程 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出，其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，则曲线弧长为

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

(5) 变力做功

1° 质点在平行于 x 轴的力 $F(x)$ 作用下，沿 x 轴从 a 移动到 b，则力 $F(x)$ 所做的功是

$$W=\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

2° 如图 9，一容器，其顶部所在平面与 Ox 轴(铅直向下)相交于原点，液体表面与 Ox 轴相截于 $x=a$，底面与 Ox 轴相截于 $x=b$，垂直于 Ox 轴的平面截容器所得的截面面积为 x 的连续函数 $S(x)$，则将容器中的液体全部抽出所做的功为

$$W=\int_a^b \rho g x S(x)\mathrm{d}x,$$

其中 ρ 为液体密度，g 为重力加速度.

(6) 液体静压力

设一薄板垂直放在密度为 ρ 的液体里(见图 10)，液体对薄板的静压力为

$$P=\int_a^b \rho g x f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 ρ 为液体密度，g 为重力加速度.

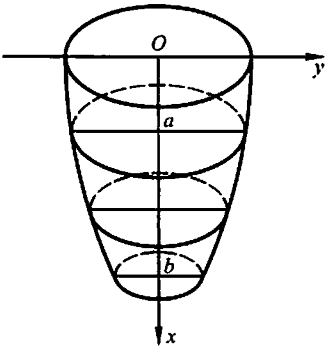

图 9

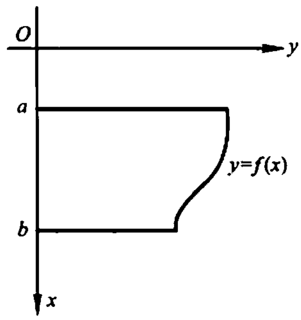

图 10

(7) 函数的平均值

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值为

$$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

此外，还有计算引力等应用.

(三) 反常积分

1. 无穷区间上的反常积分

(1) 定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $b>a$，如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 就没有意义，这时称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 定义 2　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，取 $a<b$，如果极限

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,b]$ 上的反常积分，记作 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(3) 定义 3　设函数 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续，如果反常积分

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称上述两反常积分之和为函数 $f(x)$在无穷区间$(-\infty,+\infty)$内的反常积分，记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a \to -\infty}\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b \to +\infty}\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则就称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

2. 无界函数的反常积分

定义 1　设函数 $f(x)$在$[a,b)$上连续，$\lim\limits_{x \to b^-} f(x)=\infty$，取 $\varepsilon>0$，如果极限

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$在$[a,b)$上的反常积分，记作 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x,$$

这时也称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 2　设函数 $f(x)$在$(a,b]$上连续，$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)=\infty$，取 $\varepsilon>0$，如果极限

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$在$(a,b]$上的反常积分，记作 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

这时也称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，就称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 3　设函数 $f(x)$在$[a,b]$上除点 c　$(a<c<b)$外连续，$\lim\limits_{x \to c} f(x)=\infty$，如果两个反常积分

$$\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛，则称上述两个反常积分之和为函数 $f(x)$在$[a,b]$上的反常积分，记作 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+}\int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这时也称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则，则称反常积分 $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

主要结果① $\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p>1, \\ +\infty, & p\leqslant 1; \end{cases}$

② $\int_0^b \frac{dx}{(b-x)^k}=\begin{cases}\frac{b^{1-k}}{1-k}, & 0<k<1,\\ +\infty, & k\geqslant 1.\end{cases}$

·例题详解·

例 3.1 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$__________.

[答案] $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

[提示] 本题主要考查复合函数求导法、求简单函数的原函数以及求函数表达式等基本运算．可令 $e^x=t$，求出$f'(t)$的表达式再积分，亦可利用复合函数的求导法则求出$[f(e^x)]'_x$的表达式，从而得到 $f(e^x)$的表达式，再令 $e^x=t$ 代换．

[解法 1] 令 $e^x=t$，由 $f'(e^x)=xe^{-x}$得$f'(t)=\frac{\ln t}{t}$，从而

$$f(t)=\frac{1}{2}(\ln t)^2+C,$$

故 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$，根据 $f(1)=0$ 知 $C=0$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

[解法 2] 由于 $f'(e^x)=xe^{-x}$，所以

$$(f(e^x))'_x=e^xf'(e^x)=x,$$

从而 $f(e^x)=\frac{1}{2}x^2+C$.

令 $e^x=t$，便得 $f(t)=\frac{1}{2}(\ln t)^2+C$，故 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$，根据 $f(1)=0$ 知 $C=0$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

[典型错误] 概念不清，误以为 $f'(x)=[f(e^x)]'_x$，因而得到错误的结果．

例 3.2 $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx=$________.

[答案] $-\cot x\cdot\ln\sin x-\cot x-x+C$.

[提示] 本题考查的知识点是不定积分的分部积分法．关键是选好 u 和 dv.

[解] 令 $u=\ln\sin x$，$\frac{dx}{\sin^2 x}=dv$．则 $du=\frac{\cos x}{\sin x}dx=\cot x$，$v=-\cot x$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx&=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\cot^2 x\,dx\\&=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int(\csc^2 x-1)\,dx\\&=-\cot x\cdot\ln\sin x-\cot x-x+C.\end{aligned}$$

[典型错误] 本题虽不难，但只有 20%左右的考生答对此题．分析原因，一是部分考生记不住微分公式 $d\cot x=-\frac{dx}{\sin^2 x}$，二是部分考生先换元．令 $u=\sin x$，得到积分$\int\frac{\ln u}{u^2}\cdot\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$，更不容易求解．少数考生漏掉常数 C.

例 3.3 $\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}dx=$________.

[答案] $\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C$.

[提示] 本题是典型的有理函数的不定积分，首先凑微分，然后将分母配方．

[解] $$\begin{aligned}\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}dx&=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+8\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+2^2}\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C.\end{aligned}$$

[典型错误] 考试结果表明，约有三分之一的考生没有答对，有的考生在凑微分时系数出错，有的考生积分公式记错，误以为 $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \arctan\frac{u}{a} + C$，漏掉 $\frac{1}{a}$，还有少数考生漏掉积分常数 C.

例 3.4 $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx =$ ________.

[答案] $\frac{4}{15}$.

[提示] 本题考查的知识点是定积分的换元积分法．因 $x = -[(1-x)-1]$，因而可用凑微分法，亦可令 $\sqrt{1-x}=u$.

[解法 1] $$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx = -\int_0^1 (1-x-1)\sqrt{1-x}\,dx = -\int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}}dx + \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{15}.$$

[解法 2] 令 $\sqrt{1-x}=t$，则原式 $= \int_0^1 (2t^2-2t^4)dt = \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{15}$.

[典型错误] 计算出现错误导致答案不对.

例 3.5 设 $f(x)$是连续函数，且 $f(x) = x + 2\int_0^1 f(t)dt$，则 $f(x) =$ ________.

[答案] $x-1$.

[提示] 本题是定积分的基本概念题，令 $\int_0^1 f(t)\,dt = I$，然后将等式两边在[0,1]上积分得到 I 的代数方程，解出 I.

解 令 $\int_0^1 f(t)\,dt = I$，由题设，$f(x) = x+2I$，故 $I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x+2I)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2Ix\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 2I$，于是 $I = -\frac{1}{2}$，$f(x) = x + 2I = x - 1$.

[典型错误] 部分考生没有想到 $\int_0^1 f(x)\,dx$ 是一个常数，因而无从下手.

例 3.6 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,dx =$ ________.

[答案] $\frac{\pi}{8}$.

[提示] 本题考查的知识点是定积分的性质和定积分的计算．由于是对称区间上的定积分，一般利用奇函数、偶函数在对称区间上积分性质简化计算.

[解] $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^4 x)\,dx$$
$$= 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

[典型错误] 有的考生没有利用奇函数、偶函数在对称区间上的积分性质，而对 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos^2 x\,dx$ 用分部积分，计算量大而导致错误；有的考生在计算 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^4 x)\,dx$ 时利用倍角公式，计算上出现错误.

例 3.7 设 $f(x)$是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)\,dt = x$，则 $f(7) =$ ________.

[答案] $\frac{1}{12}$.

[提示] 本题考查变上限定积分函数的导数．等式两边对 x 求导，再令 $x^3-1=7$ 即可.

[解] $$\left(\int_0^{x^3-1} f(t)\,dt\right)' = (x)',$$

$$f(x^3-1)\cdot 3x^2=1,\ f(x^3-1)=\frac{1}{3x^2},$$

令 $x^3-1=7$，得 $x=2$，故 $f(7)=\frac{1}{3\cdot 2^2}=\frac{1}{12}$.

［典型错误］ 忽略了积分上限是 x 的函数，没有运用复合函数导数公式，从而得到了错误的结果.

例 3.8 曲线 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)\mathrm{d}t$ 在点(0,0)处的切线方程是________.

［答案］ $y=2x$.

［提示］ 本题考查的知识点为变上限定积分函数的导数和曲线的切线方程.

［解］ 因 $y'=(x-1)(x-2)$，$y'\big|_{x=0}=2$，故所求切线方程是 $y=2x$.

［典型错误］ 由于本题中积分可以积出来，因此部分考生先积分再求导数，这样增大计算量，容易出现计算上的错误.

例 3.9 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是______.

［答案］ $\frac{3}{2}$.

［提示］ 本题考查用定积分求平面图形的面积，一般步骤是先画出草图，求出曲线的交点，选择积分变量，再积分．本题既可把 x 作为积分变量，也可把 y 作为积分变量.

［解］ 由 $\begin{cases} y=\ln x, \\ y=(e+1)-x \end{cases}$ 得交点$(e,1)$，则

$$S=\int_1^e \ln x\mathrm{d}x+\int_e^{e+1}[(e+1)-x]\mathrm{d}x=\frac{3}{2},$$

或者

$$S=\int_0^1\{[(e+1)-y]-e^y\}\mathrm{d}y=\frac{3}{2}.$$

［典型错误］ 若交点求错，积分上下限没有写对，积分过程中计算出错，都不能得到正确的答案.

例 3.10 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=$________.

［答案］ $\frac{\pi}{2}$.

［提示］ 本题考查的知识点是反常积分，它既是无穷区间上的反常积分，又是无界函数的反常积分．选取适当的变量代换将它化成定积分或收敛的无界函数的反常积分.

［解法 1］ 若令 $x=\sec t$，则 $\mathrm{d}x=\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t$，于是

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t}{\sec t\cdot\tan t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

［解法 2］ 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\arcsin t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

［典型错误］ 部分考生虽然给出了正确的答案，但未必考虑到 $x=1$ 是被积函数的无穷间断点.

例 3.11 设 $f(x)$连续，则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$________.

［答案］ $xf(x^2)$.

［提示］ 本题考查的知识点是变上限定积分对上限的导数．对工科考生而言，欲求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b\varphi(x,t)\mathrm{d}t$，唯一的办法是作变换，使含于 $\varphi(x,t)$中的 x "转移" 到 φ 之外，故应作变换 $u=x^2-t^2$.

［解］ 令 $u=x^2-t^2$，$\mathrm{d}u=-2t\mathrm{d}t$；当 $t=0$ 时，$u=x^2$，当 $t=x$ 时，$u=0$，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u=xf(x^2).$$

[典型错误] 对于被积函数 $tf(x^2-t^2)$中的 x 视而不见，就对上限 x 求导，从而得到错误的答案 $xf(0)$.

例 3.12 若 $f(x)$的导函数是 $\sin x$，则 $f(x)$有一个原函数为

(A) $1+\sin x$. (B) $1-\sin x$. (C) $1+\cos x$. (D) $1-\cos x$.

[答案] (B).

[提示] 本题是基本概念题，考查导函数及原函数的概念. 将 $\sin x$ 两次积分即可.

[解] 记 $F'(x)=f(x)$，则 $F''(x)=f'(x)=\sin x$，故 $F'(x)=f(x)=-\cos x+C_1$，$F(x)=-\sin x+C_1x+C_2$，取 $C_1=0$. $C_2=1$ 得 $F(x)=-\sin x+1$. 故选(B).

[典型错误] 有的考生选(D)，原因是误以为求 $f(x)$，考生应认真审题再下手做.

例 3.13 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$等于

(A) $\int_1^2\ln^2 x\mathrm{d}x$. (B) $2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x$. (C) $2\int_1^2\ln(1+x)\mathrm{d}x$. (D) $\int_1^2\ln^2(1+x)\mathrm{d}x$.

[答案] (B).

[提示] 本题考查的知识点是定积分的定义. 利用定积分求极限也是求极限的方法之一，根据对数性质将极限写成和式极限，即可得到正确选项.

[解]
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}\\&=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]\\&=2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

[典型错误] 由于看到极限中有 $\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$，而错误选择(C)，其实只要考虑一下积分区间都是[1,2]，n 等分后，分点的坐标是 $x=1+\frac{i}{n}$，这个错误是可以避免的.

例 3.14 设 $f(x)$是连续函数，$F(x)$是 $f(x)$的原函数. 则

(A) 当 $f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$是偶函数时，$F(x)$是奇函数.

(C) 当 $f(x)$是周期函数时，$F(x)$是周期函数.

(D) 当 $f(x)$是单调增函数时，$F(x)$必是单调增函数.

[答案] (A).

[提示] 本题考查原函数的概念、用变上限定积分函数表示原函数以及积分换元法等知识点，要求考生熟知函数的奇偶性、周期性、单调性等性质. 并会举反例排除错误选项.

[解] 由题意，不妨设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ (其中 C 是常数). 若 $f(-t)=-f(t)$，则$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t+C\xlongequal{t=-u}-\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u+C=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F(x)$. 即 $F(x)$是偶函数. 故(A)是正确的. 另外亦可以举反例排除其他选项. 取偶函数 $f(x)=3x^2$，则 $F(x)=x^3+C$. 当 $C\neq0$ 时 $F(x)$不是奇函数. 取周期函数 $f(x)=\cos x+1$，则 $F(x)=\sin x+x+C$ 不是周期函数. 取单调增函数 $f(x)=2x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则 $F(x)=x^2+C$ 在$(-\infty,+\infty)$内不是单调增函数. 所以(B)、(C)、(D)都不对. 故选(A).

[典型错误] 由于不会用变上限定积分函数表示原函数，不习惯用举反例排除法，有一部分考生仅凭周期函数的导数是周期函数而选择(C)，其实只要在学习微积分或复习微积分时稍加留意，选择(A)是很容易想到的.

例 3.15 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4x\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)\mathrm{d}x$. $P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^4x)\mathrm{d}x$，则有

(A) $N<P<M$. (B) $M<P<N$. (C) $N<M<P$. (D) $P<M<N$.

[答案] (D).

[提示] 本题要求考生熟练掌握定积分性质以及奇函数、偶函数在关于原点为对称的区间上积分性质，不计算定积分得到 $M=0$，$N>0$．$P<0$.

[解] 因为 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x=0$,

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x>0,$$

$$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x<0,$$

故 $P<M<N$.

[典型错误] 企图通过直接计算出各定积分值来比较大小很费时间.

例 3.16 设 $f(x)$为已知连续函数．$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$．其中 $t>0$，$s>0$．则 I 的值

(A) 依赖于 s 和 t.　　(B) 依赖于 s，t，x.

(C) 依赖于 t 和 x，不依赖于 s.　　(D) 依赖于 s，不依赖于 t.

[答案] (D).

[提示] 本题考查定积分的概念和换元法．一般地此类问题通过换元后．使被积函数成为一元函数．即能得到正确的答案.

[解] 令 $tx=u$,则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}u$,于是 $I=t\int_0^s f(u)\frac{1}{t}\mathrm{d}u=\int_0^s f(u)\mathrm{d}u$.故选(D).

[典型错误] 选择(A)，原因是不作变换，自认为对 x 积分．上下限代入后还含有 s 和 t.

例 3.17 设在区间$[a,b]$上，$f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$．令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$．$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则

(A) $S_1<S_2<S_3$.　　(B) $S_2<S_1<S_3$.　　(C) $S_3<S_1<S_2$.　　(D) $S_2<S_3<S_1$.

[答案] (B).

[提示] 本题要求考生利用导数研究函数的性态，掌握定积分的几何意义．本题有多种解法．最简单的方法是画草图．也可以用特定的函数为例来判断．还可以从理论分析证明.

[解法 1] 如图 11 所示．S_1 是曲边梯形面积，S_2 是长方形 $ABCD$ 面积．S_3 是梯形 $ABCE$ 面积，故选(B).

[解法 2] 根据题意．可以某些函数如 $y=x^{-n}(x\in[1,2])$为例进行具体的比较.为方便计算，选 $n=2$，即 $f(x)=\frac{1}{x^2}$，$S_1=\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，$S_2=\frac{1}{4}$，$S_3=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{4}\right](2-1)=\frac{5}{8}$，比较$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{5}{8}$，由此例可考虑选(B).

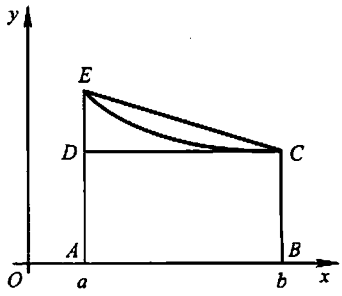

图 11

[解法 3] 证明也容易．首先证明 $S_2<S_1$．作辅助函数 $F(x)=f(b)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$．则 $F(a)=0$，$F'(x)=f(b)-f(x)$，因 $f(x)$为单调减少函数，故当$x\in[a,b]$时 $F'(x)<0$,从而 $F(x)$在$[a,b]$上也单调减少，于是 $F(b)<F(a)=0$，即$f(b)(b-a)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

再证 $S_1<S_3$．弦 CE 的方程是$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$．由于 $f''(x)>0$．曲线下凸，故必有

$$f(x)<f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\quad x\in(a,b).$$

两边积分，得

$$\int_a^b f(x)\,dx < \frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a),$$

即 $S_1 < S_3$. 故选(B).

[典型错误] 若对函数的性态特别是凹凸区间掌握得不好，会得到错误的结论.

例 3.18 双纽线$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所围成区域的面积可用定积分表示为

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$. (B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$. (C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}d\theta$. (D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2 d\theta$.

[答案] (A).

[提示] 本题考查的知识点是极坐标系下平面图形面积的求法. 将双纽线方程转化为极坐标方程. 考虑到曲线围成区域的对称性即可得到正确的选项.

[解] 双纽线极坐标方程是 $r^2 = \cos 2\theta$, 考虑到曲线围成的区域具有对称性. 所以面积 $S = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2(\theta)\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$, 故选(A).

[典型错误] 有些考生选择(B). 究其原因或许是对极坐标下平面图形面积公式掌握不牢固，漏掉$\frac{1}{2}$，或许认为积积分限是$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，故在$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$上积分应该乘系数 2.

例 3.19 设 $f(x)$、$g(x)$在区间$[a,b]$上连续，且 $g(x) < f(x) < m$（m 为常数），则由曲线 $y = f(x)$，$y = g(x)$，$x = a$，$x = b$ 所围成的平面图形绕$y = m$ 旋转而成的旋转体体积为

(A) $\int_a^b \pi[2m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]dx$.

(B) $\int_a^b \pi[2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]dx$.

(C) $\int_a^b \pi[m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]dx$.

(D) $\int_a^b \pi[m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]dx$.

[答案] (B).

[提示] 本题考查利用定积分求旋转体的体积，关键是求旋转体的截面面积.

[解] 因为任取 $x\in[a,b]$，则过点 x 且垂直于x 轴的平面截旋转体的截面面积为

$$A(x) = \pi\{[m - g(x)]^2 - [m - f(x)]^2\},$$

所以体积为

$$V = \pi\int_a^b\{[m - g(x)]^2 - [m - f(x)]^2\}dx = \pi\int_a^b[2m - g(x) - f(x)][f(x) - g(x)]\,dx.$$

故选(B).

[典型错误] 由于在教学中一般是求平面图形绕坐标轴旋转而成的旋转体体积，有些考生只知死记公式，并没有掌握方法实质. 因而稍加变化无所适从，只能猜，选择了错误的选项.

例 3.20 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$，则 $F(x)$

(A) 为正常数. (B) 为负常数. (C) 恒为零. (D) 不为常数.

[答案] (A).

[提示] 本题涉及的知识点有周期函数积分性质，变上限定积分函数的导数，定积分的计算等. 首先应用周期函数积分性质或变上限定积分函数的导数确定 $F(x)$是常数，再由定积分计算判定 $F(x)$是正常数.

[解法 1] 由于函数 $e^{\sin t}\sin t$ 是以 2π 为周期的函数，且 $F(x)$为 $e^{\sin t}\sin t$ 在一个周期长的区间$[x, x+2\pi]$上积分，故 $F(x)$为常数，而

$$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$$
$$=-\int_0^{2\pi} e^{\sin t}d\cos t$$
$$=0+\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,e^{\sin t}dt>0,$$

所以选(A).

[解法 2] 因为

$$F'(x)=e^{\sin(x+2\pi)}\sin(x+2\pi)-e^{\sin x}\sin x=0,$$

故 $F(x)$为常数. 且

$$F(x)=F(0)=\int_0^{2\pi} e^{\sin x}\sin x\,dx$$
$$=\int_0^{\pi} e^{\sin x}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} e^{\sin x}\sin x\,dx$$
$$\overset{u=x-\pi}{=\!=\!=}\int_0^{\pi} e^{\sin x}\sin x\,dx+\int_0^{\pi} e^{-\sin u}(-\sin u)du$$
$$=\int_0^{\pi}\sin x\,(e^{\sin x}-e^{-\sin x})dx$$
$$=\int_0^{\pi}\sin x\,e^{-\sin x}(e^{2\sin x}-1)dx>0,$$

所以选(A).

[典型错误] 由于对周期函数积分性质不甚了解，又没有考虑到求 $F'(x)$. 仅看到上、下限都有 x，认为 $F(x)$是 x 的函数而选择(D). 还有考生看到被积函数中含 $\sin x$、积分区间是一个周期长，从而选择(C).

例 3.21 求 $\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

[提示] 本题考查三角函数有理式的不定积分的方法与技巧. 由于三角函数的公式非常丰富，本题解法很多，可用半角公式加上凑微分；考虑到被积函数是关于 $\sin x$ 的奇函数，可作代换 $\cos x=u$.

[解法 1]
$$\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin x(1+\cos x)}=\frac{1}{4}\int\frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\tan\frac{x}{2}+C.$$

[解法 2]
$$\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{8}\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\sin x}$$
$$=\frac{1}{8}\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln|\csc x-\cot x|+C.$$

[解法 3]
$$\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin x(1+\cos x)}=-\frac{1}{2}\int\frac{d\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}$$
$$\overset{\cos x=u}{=\!=\!=}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{(1-u)(1+u)^2}=\frac{-1}{8}\int\left[\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}+\frac{2}{(1+u)^2}\right]du$$
$$=\frac{1}{8}\ln\frac{1-u}{1+u}+\frac{1}{4(1+u)}+C=\frac{1}{8}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{4(1+\cos x)}+C.$$

[解法 4] 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$x=2\arctan t$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$，于是

$$\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t}+t\right)dt=\frac{1}{4}\ln t+\frac{1}{8}t^2+C$$

$$= \frac{1}{4}\ln \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + C.$$

[典型错误] 部分考生最后结果漏掉积分常数 C. 不少考生出现计算错误，特别是在解法 4 中.

例 3.22 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

[提示] 本题考查的知识点是函数的概念和不定积分的计算法. 首先令 $\ln x = t$. 求出 $f(x)$的表达式. 在求不定积分时. 充分利用凑微分和函数拆项等运算可减少计算工作量.

[解法 1] 设 $\ln x = t$，则 $x = \mathrm{e}^t$，$f(t) = \frac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$. 故

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = -\int \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + \int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + \int\left(1 - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C \\ &= x - (1+\mathrm{e}^{-x})\ln(1+\mathrm{e}^x) + C.\end{aligned}$$

[解法 2] 在 $\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ 中令 $1+\mathrm{e}^x = t$，则 $x = \ln(t-1)$. $\mathrm{d}x = \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t$，故

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int\frac{\ln t}{(t-1)^2}\mathrm{d}t \\ &= -\int \ln t\,\mathrm{d}\frac{1}{t-1} = -\frac{\ln t}{t-1} + \int\frac{1}{t(t-1)}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\ln t}{t-1} + \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{\ln t}{t-1} + \ln(t-1) - \ln t + C \\ &= x - (1+\mathrm{e}^{-x})\ln(1+\mathrm{e}^x) + C.\end{aligned}$$

[典型错误] (1)部分考生最后结果中忘记加上积分常数 C. (2)在分部积分凑微分时相差负号从而得到错误的答案.

例 3.23 计算 $\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

[提示] 本题是一道不定积分的常见题. 注意到分母中含 $1+x^2$ 及分子中含 $\arctan x$，故可先换元(设 $x = \tan t$)，然后用分部积分法. 若能看出 $\mathrm{e}^{\arctan x}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}$亦可直接用分部积分法. 但无论哪种解法，在用分部积分后都得到所求不定积分的方程，最后通过解方程而得到所求的不定积分，这种方法在计算不定积分时是常用的.

[解法 1] 设 $x = \tan t$. 则

$$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{e}^t\cdot\tan t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t.$$

又

$$\begin{aligned}\int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t &= -\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}\cos t = -\left(\mathrm{e}^t\cos t - \int\mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\mathrm{e}^t\cos t + \mathrm{e}^t\sin t - \int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

故

$$\int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t - \cos t) + C.$$

因此

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arctan x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C \\ &= \frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.\end{aligned}$$

[解法 2]

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x &= \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x} \\ &= \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}e^{\arctan x}$$
$$= \frac{x e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} \mathrm{d}x,$$

移项整理得

$$\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} \mathrm{d}x = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$$

[典型错误] (1)在最后结果中丢掉积分常数 C 是不定积分计算题中经常出现的错误，表面上是粗心大意．但实质上是对不定积分的概念理解不深．(2)在利用换元法后，少数考生不知如何求 $\int e^t \sin t \mathrm{d}t$．(3)得到结果 $\frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) + C$，没有代回到原变量 x．

例 3.24　计算 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2 \mathrm{d}x$．

[提示]　本题考查的知识点是不定积分的分部积分法，较简单的方法是利用三角公式 $(\tan x+1)^2 = \sec^2 x + 2\tan x$ 将积分拆分成两个积分，对其中一个使用分部积分后正好将另一个积分消去．另一种方法是使用二次分部积分，但较繁．

[解法 1]
$$\begin{aligned}\int e^{2x}(\tan x+1)^2 \mathrm{d}x &= \int e^{2x}\sec^2 x \mathrm{d}x + 2\int e^{2x}\tan x \mathrm{d}x \\ &= e^{2x}\tan x - 2\int e^{2x}\tan x \mathrm{d}x + 2\int e^{2x}\tan x \mathrm{d}x \\ &= e^{2x}\tan x + C.\end{aligned}$$

[解法 2]
$$\begin{aligned}\int e^{2x}(\tan x+1)^2 \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (\tan x+1)^2 \mathrm{d}e^{2x} \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(\tan x+1)^2 - \int e^{2x}(\tan x+1)\sec^2 x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(\tan x+1)^2 - \int e^{2x}\tan x\sec^2 x \mathrm{d}x - \int e^{2x}\sec^2 x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(\tan x+1)^2 - \frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}\tan^2 x - \int e^{2x}\sec^2 x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(\tan x+1)^2 - \frac{1}{2}e^{2x}\tan^2 x + \int e^{2x}\tan^2 x \mathrm{d}x - \int e^{2x}\sec^2 x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(\tan x+1)^2 - \frac{1}{2}e^{2x}\tan^2 x - \int e^{2x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}(2\tan x+1) - \frac{1}{2}e^{2x} + C \\ &= e^{2x}\tan x + C.\end{aligned}$$

[典型错误]　大部分考生都采用解法 2，但在求 $(\tan x+1)^2$ 的导数时有的漏了因子 $\sec^2 x$．有的对 $\int e^{2x}(\tan x+1)\sec^2 x \mathrm{d}x$ 进行计算时没有拆项，仍凭经验 $\int e^{2x}(\tan x+1)\sec^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\tan x+1)\sec^2 x \mathrm{d}e^{2x}$ 而做不下去．本题反映出部分考生对三角函数公式不很熟悉．

例 3.25　设 xOy 面上有正方形 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 及直线 $l: x+y=t\ (t \geqslant 0)$（图 12）．若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积．试求 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t\ (x \geqslant 0)$．

[提示]　本题是以几何形式考查考生对分段函数及其积分掌握的情况．首先用分段函数表示 $S(t)$，然后计算 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t$．注意它也是分段函数．

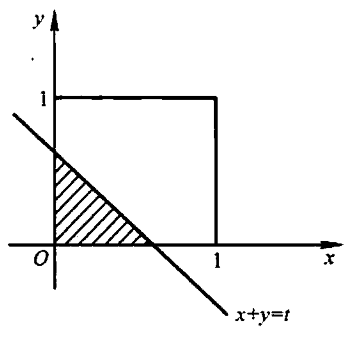

图 12

[解]　由题设知

$$S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{2}t^2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2.\end{cases}$$

所以　当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{6}x^3$；

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t+\int_1^x S(t)\mathrm{d}t=-\frac{x^3}{6}+x^2-x+\frac{1}{3}$；

当 $x>2$ 时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 S(t)\mathrm{d}t+\int_2^x S(t)\mathrm{d}t=x-1$.

因此

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{6}x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{6}x^3+x^2-x+\dfrac{1}{3}, & 1<x\leqslant 2,\\ x-1, & x>2.\end{cases}$$

[典型错误]　(1)当 $1<t\leqslant 2$ 时，$S(t)$表达式错误；(2)当 $1<x\leqslant 2$ 时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t$ 误以为是 $\int_1^x\left(-\frac{1}{2}t^2+2t-1\right)\mathrm{d}t$，当$x>2$时，$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t$ 误以为是$\int_2^x\mathrm{d}t$.

例 3.26　计算$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x$.

[提示]　本题考查的知识点是定积分计算，可以用分部积分法，也可以用变量代换化简被积函数.

[解法 1]

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x&=\int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}\Big|_0^{\ln 2}+\int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln|\mathrm{e}^x+\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}|\Big|_0^{\ln 2}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

[解法 2]　令 $\mathrm{e}^{-x}=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\dfrac{-\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t\\&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t\\&=\ln\left|\csc t-\cot t\right|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

[解法 3]　令$\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}=t$，$-2x=\ln(1-t^2)$，$\mathrm{d}x=\dfrac{t}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-1+\frac{1}{1-t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).$$

［典型错误］ 本题解法较多，考生主要是计算出错，如解法 1 中 $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ 公式记不住，采用代换 $e^x = \sec t$，容易出错．解法 2 中 $\csc x$ 积分公式记错．

例 3.27　求函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值．

［提示］ 本题是一道综合题，既考查变上限定积分函数的导数，反常积分的计算，又考查了导数应用．由于 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内连续的偶函数，求最大值、最小值时，只需求出驻点处的函数值，然后与 $f(0)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 比较．

［解］ 因 $f(x)$ 是偶函数，故只需讨论 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值与最小值．

令 $f'(x) = 2x(2-x^2)e^{-x^2} = 0$，$x=\sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的唯一驻点，所对应的函数值为

$$f(\sqrt{2}) = \int_0^2 (2-t)e^{-t}dt = -(2-t)e^{-t}\Big|_0^2 - \int_0^2 e^{-t}dt$$
$$= 1 + e^{-2}.$$

因为 $\int_0^{+\infty} (2-t)e^{-t}dt = -(2-t)e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 2-1=1$，以及 $f(0)=0$，故 $x=0$ 是最小值点，$f(x)$ 的最小值为 0；而 $f(\sqrt{2}) = 1+e^{-2}$ 为其最大值．

［典型错误］ (1)既没有考虑到 $f(x)$ 是偶函数，在对 $f(x)$ 求导时又忽视了上限是 x^2，从而错误地得到 $f'(x) = (2-x^2)e^{-x^2}$，得到驻点 $x=\pm\sqrt{2}$，只求出最大值，而没有求出最小值．(2)虽然求出最大值和最小值，但是没有计算 $\int_0^{+\infty} (2-t)e^{-t}dt$．步骤不完整，最小值的理由不充分．

例 3.28　计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$．

［提示］ 由于 $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} = \infty$，故本题考查的是无界函数的反常积分．又因为被积函数中有绝对值，因此必须将原积分拆成两积分之和．

［解］ $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$．

其中
$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} \xlongequal{x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec t} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec t\,dt$$

$$= \ln|\sec t + \tan t|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln(2+\sqrt{3}).$$

故
$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).$$

［典型错误］ 有部分考生不是将积分拆成两积分之和，而是分 $x>1$，$x<1$ 两种情况分别做积分，反映了他们没有理解定积分和反常积分的概念．

例 3.29　求 $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin x}\,dx$．

［提示］ 本题考查的知识点是定积分计算．注意到积分区间是$[0,\pi]$，而$\sqrt{1-\sin x}=\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|$，故应将原积分拆成两积分之和．

［解］ $$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=4(\sqrt{2}-1).$$

［典型错误］ 没有考虑到$\sqrt{1-\sin x}=\left|\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|$，误认为$\sqrt{1-\sin x}=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$，于是原式$=\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx=0$．其实只要稍微想一下，$y=\sin x$图形在$[0,\pi]$上关于$x=\frac{\pi}{2}$对称．从而$f(\sin x)=\sqrt{1-\sin x}$的图形在$[0,\pi]$上也关于$x=\frac{\pi}{2}$对称，由定积分几何意义知$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin x}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)dx\neq 0$.

例 3.30 如图，曲线 C 的方程为$y=f(x)$，点$(3,2)$是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点$(0,0)$与$(3,2)$处的切线．其交点为$(2,4)$．设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数．计算定积分$\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\,dx$.

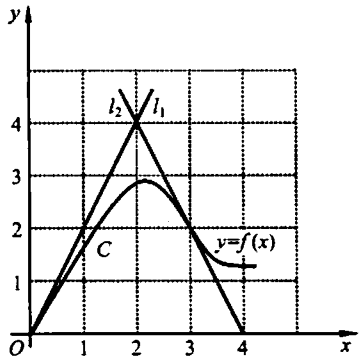

图 13

［提示］ 本题是一道微积分综合计算题．涉及到的知识点有定积分分部积分法及导数应用．用分部积分法计算定积分，所需的数据从图中获取．

［解］ $$\int_0^3(x^2+x)f'''(x)dx=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3(2x+1)f''(x)dx$$
$$=-\int_0^3(2x+1)f''(x)dx$$
$$=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3f'(x)dx$$
$$=-[7\times(-2)-2]+2\int_0^3f'(x)dx=16+2f(x)\Big|_0^3$$
$$=16+4=20.$$

［典型错误］ (1) 由于题型新颖，考生对这种从图中获取相关数据似乎不太适应，有些数据求错，例如$f''(3)=0$.

(2) 有些考生认为$f(x)=ax^3+bx^2+c$，然后从图中有关数据求出a,b,c，再计算积分，显然不合题意，未得出．

例 3.31 设函数$f(x)$连续，且$f(0)\neq 0$，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

［提示］ 本题是一道综合题，考查的知识点有变上限定积分对上限的导数，定积分的换元法，积分中值定理，洛必达法则等．为了应用洛必达法则，必须将分子、分母分别进行拆项和换元处理．在应用一次洛必达法则之后应用积分中值定理再求极限．

[解] 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}\xlongequal{设 x-t=u}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}$

$$\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}\xlongequal[(\xi 在 0 和 x 之间)]{积分中值定理}\lim_{\substack{x\to0\\(\xi\to0)}}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}$$

$$=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

[典型错误] (1)分母的被积函数 $f(x-t)$中含 x，应该作变换使 x 转移到f之外，但部分考生对此法并不知晓．而是对分母求导得到$\left[x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\right]'=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t+xf(0)$；(2)在用洛必达法则后，不是应用积分中值定理，而是继续使用洛必达法则，虽然得到正确答案，但是存在概念错误，因为题目没有给出 $f(x)$可导的条件．所以只要审题仔细一点，这个错误是完全可以避免的．

例 3.32 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且 $f(x)=x,x\in[0,\pi)$，计算 $\int_\pi^{3\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$．

[提示] 本题考查函数的概念和定积分计算．由条件知以 π 为位移量作线性变换，利用所给关系式将所求积分逐步转移到$[0,\pi]$上；或者利用关系式写出 $f(x)$在$[\pi,3\pi]$中的解析式子，然后分区间积分．

[解法 1]

$$\begin{aligned}\int_\pi^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x&=\int_\pi^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]\mathrm{d}x=\int_\pi^{3\pi}f(x-\pi)\mathrm{d}x\\&\xlongequal{令 t=x-\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}f(t)\mathrm{d}t+\int_\pi^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^\pi t\mathrm{d}t+\int_\pi^{2\pi}[f(t-\pi)+\sin t]\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi^2}{2}-2+\int_\pi^{2\pi}f(t-\pi)\mathrm{d}t\\&\xlongequal{令 u=t-\pi}\frac{\pi^2}{2}-2+\int_0^\pi f(u)\mathrm{d}u=\pi^2-2.\end{aligned}$$

[解法 2] 因为当 $x\in[0,\pi)$时，$f(x)=x$，当 $x\in[\pi,2\pi)$时，$x-\pi\in[0,\pi)$，所以

$f(x)=f(x-\pi)+\sin x=x-\pi+\sin x$；当 $x\in[2\pi,3\pi)$时 $x-\pi\in[\pi,2\pi)$．所以

$f(x)=f(x-\pi)+\sin x=x-\pi-\pi+\sin(x-\pi)+\sin x=x-2\pi$．故当 $x\in[\pi,3\pi]$时

$$f(x)=\begin{cases}x-\pi+\sin x, & \pi\leqslant x<2\pi,\\ x-2\pi, & 2\pi\leqslant x<3\pi.\end{cases}$$

$$\int_\pi^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_\pi^{2\pi}(x-\pi+\sin x)\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}(x-2\pi)\mathrm{d}x=\pi^2-2.$$

[典型错误] 由于对函数概念还不十分清晰，遇到这类题型心里发怵，无从下手，错误地从 $f(x)=x$，得$f(x)=f(x-\pi)+\sin x=x-\pi+\sin x$．然后做积分$\int_\pi^{3\pi}(x-\pi+\sin x)\mathrm{d}x$．

例 3.33 已知曲线 L 的方程为$\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2\end{cases}$ $(t\geqslant0)$，

(Ⅰ) 讨论 L 的凹凸性；

(Ⅱ) 过点$(-1,0)$引 L 的切线，求切点(x_0,y_0)，并写出切线的方程；

(Ⅲ) 求此切线与L(对应于 $x\leqslant x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积．

[提示] 本题是一道微积分综合应用题，涉及的知识点有导数的应用(平面曲线的凹凸性、切线方程)和定积分应用(平面图形的面积)．(Ⅰ)实质上是参数方程求二阶导数．(Ⅱ)和(Ⅲ)既可以用参数方程去做，也可以用直角坐标方程求解，但用参数方程较易．通过(Ⅰ)和(Ⅱ)的讨论可对平面图形有一个大致了解，从而比

较容易地写出面积的计算式子。

[解法 1] （Ⅰ）由于

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{t}-1,\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{t^3},$$

当 $t>0$ 时，$\frac{d^2y}{dx^2}<0$，故 L 上凸.

（Ⅱ）因为当 $t=0$ 时，L 在对应点处的切线方程为 $x=1$，不合题意，故设切点 (x_0,y_0) 对应的参数为 $t_0>0$，则 L 在 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-(4t_0-t_0^2)=\left(\frac{2}{t_0}-1\right)(x-t_0^2-1).$$

令 $x=-1$，$y=0$，得

$$t_0^2+t_0-2=0,$$

解得 $t_0=1$，或 $t_0=-2$（舍去）.

由 $t_0=1$ 知，切点为 $(2,3)$，且切线方程为 $y=x+1$.

（Ⅲ）由 $t=0$，$t=4$ 知 L 与 x 轴交点分别为 $(1,0)$ 和 $(17,0)$. 所求平面图形的面积为

$$S=\int_{-1}^{2}(x+1)dx-\int_{1}^{2}ydx=\frac{9}{2}-\int_{0}^{1}(4t-t^2)d(t^2+1)$$

$$=\frac{9}{2}-2\int_{0}^{1}(4t^2-t^3)\,dt=\frac{7}{3}.$$

[解法 2] （Ⅰ）同解法 1.

（Ⅱ）L 的直角坐标方程为

$$y=4\sqrt{x-1}-(x-1).$$

因为当 $x_0=1$ 时，L 在对应点处的切线方程为 $x=1$，不合题意，故可设 L 在点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=\left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(x-x_0),\ (x_0>1).$$

将 $x=-1$，$y=0$ 代入上式，得

$$-y_0=\left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1\right)(-1-x_0),$$

$$-4\sqrt{x_0-1}+(x_0-1)=\frac{-2+\sqrt{x_0-1}}{\sqrt{x_0-1}}(x_0+1),$$

整理得 $(x_0-1)+\sqrt{x_0-1}-2=0$，即 $(\sqrt{x_0-1}+2)(\sqrt{x_0-1}-1)=0$，

解得 $x_0=2$，并得 $y_0=3$，即切点为 $(2,3)$. 因此切线方程为

$$y=x+1.$$

（Ⅲ）令 $y=0$，得 L 与 x 轴的交点分别为 $(1,0)$，$(17,0)$. 所求平面图形面积为

$$S=\int_{-1}^{2}(x+1)dx-\int_{1}^{2}[4\sqrt{x-1}-(x-1)]dx$$

$$=\frac{9}{2}-\left[\frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_1^2$$

$$=\frac{9}{2}-\frac{13}{6}=\frac{7}{3}.$$

[典型错误] (1) 少数考生基础较差，参数方程的二阶导数不会求.

(2)（Ⅰ）和（Ⅱ）是Ⅲ的铺垫，通过（Ⅰ）和（Ⅱ）的计算对平面图形有一个大致的了解从而求出面积，但是有不少考生并没有认真思考，而写出了诸如 $S=\int_{-1}^{2}[(x-1)-y]dx$，$S=\int_{1}^{2}[(x-1)-y]dx$ 等错误的表达式；

(3) 一些考生计算能力差，计算经常出错；

因此，考生一定要把基础打好，在基本概念、基本理论和基本方法上多下工夫！

例 3.34 设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$二阶可导，且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$，过曲线 $y=y(x)$上任一点 $P(x,y)$作该曲线的切线及 x 轴的垂线．将上述两直线与 x 轴所围成的三角形面积记为 S_1，区间$[0,x]$上以 $y=y(x)$为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线$y=y(x)$的方程．

［提示］ 本题综合考查了曲线的切线、平面图形的面积．变上限定积分的导数及二阶可降阶的微分方程等知识点．首先写出曲线在 $P(x,y)$处的切线方程，求出 S_1 和 S_2 表达式，再将问题转化为求微分方程的定解问题．

［解］ 曲线 $y=y(x)$在点 $P(x,y)$处切线方程为

$$Y-y=y'(x)(X-x),$$

它与 x 轴交点为$\left(x-\dfrac{y}{y'},\ 0\right)$．由于 $y'(x)>0$，$y(0)=1$，从而 $y(x)>0$，于是

$$S_1=\frac{1}{2}y\left|x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\frac{y^2}{2y'},$$

又 $S_2=\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$，由条件 $2S_1-S_2=1$ 知

$$2\cdot\frac{y^2}{2y'}-\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t=1. \tag{$*$}$$

两边对 x 求导

$$\frac{2yy'^2-y^2y''}{y'^2}-y=0,$$

化简

$$yy''=(y')^2.$$

令 $p=y'$，则方程化为 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^2$，即$\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$．解得 $p=C_1y$，即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y$，于是 $y=\mathrm{e}^{C_1x+C_2}$．注意到 $y(0)=1$，并由$(*)$式得 $y'(0)=1$，由此可得 $C_1=1$，$C_2=0$，故所求曲线的方程是

$$y=\mathrm{e}^x.$$

［典型错误］ (1)在得出方程$\dfrac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=1$后不知如何往下做，或者知道两端对 x 求导，但是求导过程出错；(2)解得 $y=\mathrm{e}^{C_1x+C_2}$后不知如何确定 $y'(0)=1$，因而无法定任意常数 C_1．

例 3.35 设平面图形 A 由$x^2+y^2\leqslant 2x$ 与$y\geqslant x$ 所确定，求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积．

［提示］ 本题考查的知识点是定积分应用——旋转体体积和元素法．虽然本题中的旋转体不是由平面图形绕坐标轴旋转而成，而是绕直线 $x=2$ 旋转而成，但解题思路明确．都是采用元素法，关键的是求出截面面积．

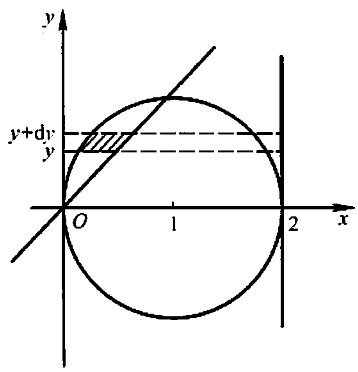

图 14

［解］ 图形 A 如图 14 所示．取 y 为积分变量，变化区间为$[0,1]$，A 的两条边界曲线方程为$x=1-\sqrt{1-y^2}$及 $x=y$．

在$[0,1]$上任取一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$，对应于该小区间的薄片的体积元素为

$$\mathrm{d}V=\{\pi[2-(1-\sqrt{1-y^2})]^2-\pi[2-y]^2\}\mathrm{d}y=2\pi[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2]\mathrm{d}y.$$

于是所求旋转体体积为

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 2\pi[\sqrt{1-y^2}-(1-y)^2]\mathrm{d}y\\&=2\pi\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y+\frac{(1-y)^3}{3}\right]\Bigg|_0^1\end{aligned}$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2}{3}\pi.$$

[典型错误] (1)不少考生只会死记硬背公式，而不去掌握建立微元的实质，题目稍加变化，无所适从；(2)误以为 $dV=[\pi(2-(1-\sqrt{1-y^2})-\pi(2-y)]^2$；(3)$\int\sqrt{1-y^2}dy$ 求错，其实从定积分几何意义立即可得 $\int_0^1\sqrt{1-y^2}dy=\frac{\pi}{4}$．反映了一些考生对知识尚不能做到融会贯通．

例 3.36 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积．

[提示] 本题考查的是导数的应用——曲线的切线和定积分几何应用——旋转体表面积．按题意设切点及切线方程，然后求出之．再按旋转曲面公式求出旋转体表面积．

[解] 设切点为$(x_0,\sqrt{x_0-1})$，则过原点的切线方程为 $y=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x$，再以点$(x_0,\sqrt{x_0-1})$代入，解得 $x_0=2$，$y_0=\sqrt{x_0-1}=1$，则上述切线方程为 $y=\frac{1}{2}x$．

由曲线 $y=\sqrt{x-1}(1\leqslant x\leqslant 2)$绕 x 轴旋转一周所得到的旋转面的面积为

$$S_1=\int_1^2 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}dx$$
$$=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

由直线 $y=\frac{1}{2}x\ (0\leqslant x\leqslant 2)$绕 x 轴旋转一周所得到的旋转面的面积是

$$S_2=\int_0^2 2\pi\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}dx=\sqrt{5}\pi.$$

因此，所求旋转体的表面积为

$$S=S_1+S_2=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1).$$

[典型错误] (1)部分考生不是求表面积，而是求旋转体体积，说明他们审题不够仔细，一看到旋转体，第一反应是体积；(2)不少考生只求出了 S_1，而忽略了 S_2．

例 3.37 为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口(见图 15)，已知井深 30 m，抓斗自重 400 N，缆绳每米重 50 N，抓斗抓起的污泥重 2 000 N，提升速度为 3 m/s，在提升过程中，污泥以 20 N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需做多少焦耳的功？

(说明：(1)1 N×1 m＝1 J，m，N，s，J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳．(2)抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计．)

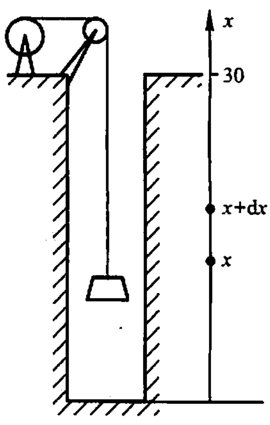

图 15

[提示] 本题考查考生将实际情景中功的计算转化为定积分的能力．由题意，抓斗将污泥从井底提升至井口克服重力做功，其中重力包括抓斗自身、悬提抓斗的缆绳和抓斗中的污泥三个方面．而缆绳上升的过程中自身重量及抓斗中污泥的重量随绳长的变化而变化，需要用定积分计算．

[解] 作 x 轴如图所示．将抓起污泥的抓斗提升至井口需做功

$$W=W_1+W_2+W_3,$$

其中 W_1 是克服抓斗自重所做的功，W_2 是克服缆绳重力所做的功，W_3 为提出污泥所做的功．由题意知

$$W_1=400\times 30\ (\text{J})=12\ 000\ (\text{J}).$$

将抓斗由 x 处提升到 $x+dx$ 处，克服缆绳重力所做的功为

$$dW_2=50\ (30-x)dx,$$

从而
$$W_2 = \int_0^{30} 50\,(30 - x)\,\mathrm{d}x = 22\,500\ (\mathrm{J}).$$
在时间间隔$[t, t + \mathrm{d}t]$内提升污泥需做功为
$$\mathrm{d}W_3 = 3\,(2\,000 - 20t)\mathrm{d}t,$$
将污泥从井底提升至井口共需时间$\frac{30}{3} = 10$，所以
$$W_3 = \int_0^{10} 3(2\,000 - 20t)\,\mathrm{d}t = 57\,000\ (\mathrm{J}).$$
因此，共需做功
$$W = (12\,000 + 22\,500 + 57\,000)\ \mathrm{J} = 91\,500\ (\mathrm{J}).$$

［典型错误］ (1)有些考生用初等数学方法标出了 W_1 和 W_2，但如何用定积分计算 W_3 则不会．既反映出他们学习不扎实．也反映出培养学生应用所学的知识解决实际问题的能力应该加强；(2)不少考生企图将 $\mathrm{d}W_1$、$\mathrm{d}W_2$ 及 $\mathrm{d}W_3$ 写在一个式子里，做积分时统一到一个变量(x 或 t)，由于没有注意到关系转换($x = 3t$)而出现错误．

例 3.38 某闸门的形状与大小如图 16 所示．其中直线 l 为对称轴．闸门上部为矩形 $ABCD$．下部由二次抛物线与线段 AB 所围成．当水面与闸门的上端相平时．欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5:4，闸门矩形部分的高应为多少 m (米)?

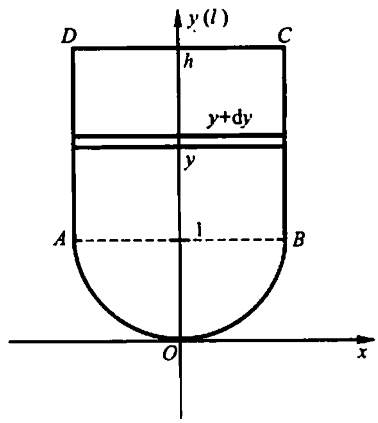

图 16

［提示］ 本题考查定积分在物理上的应用——水的静压力．首先应建立适当的坐标系．采用元素法求出闸门上下两部分压力元素，分别积分得到两部分承受的水压力，再由题设求出矩形部分的高．

［解法 1］ 如图 16 建立坐标系．则抛物线方程为
$$y = x^2.$$
闸门矩形部分承受的水压力为
$$P_1 = 2\int_1^{h+1} \rho g(h + 1 - y)\mathrm{d}y = 2\rho g\left[(h + 1)y - \frac{y^2}{2}\right]_1^{h+1} = \rho g h^2,$$
其中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度．

闸门下部承受的水压力
$$P_2 = 2\int_0^1 \rho g(h + 1 - y)\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = 2\rho g\left[\frac{2}{3}(h + 1)y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$
$$= 4\rho g\left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15}\right).$$
由题意知$\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{4}$，即$\frac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15}\right)} = \frac{5}{4}$，解之得 $h = 2$，$h = -\frac{1}{3}$(舍去)，故 $h = 2$，即闸门矩形部分的高应为 2 m.

［解法 2］ 如图 17 建立坐标系，则抛物线方程为
$$x = h + 1 - y^2.$$
闸门矩形部分承受的水压力为
$$P_1 = 2\int_0^h \rho g x\,\mathrm{d}x = \rho g h^2.$$
闸门下部承受的水压力为
$$P_2 = 2\int_h^{h+1} \rho g x\sqrt{h + 1 - x}\,\mathrm{d}x,$$
设$\sqrt{h + 1 - x} = t$，得

$$P_2 = 4\rho g\int_0^1 (h+1-t^2)\, t^2 \mathrm{d}t$$
$$= 4\rho g\left[(h+1)\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1$$
$$= 4\rho g\left(\frac{1}{3}h+\frac{2}{15}\right).$$

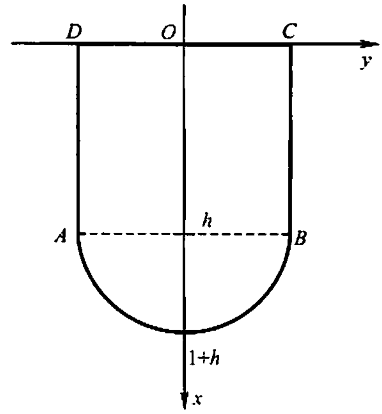

图 17

以下同解法 1.

[典型错误] (1)不说明如何建立坐标系而出现抛物线方程；(2)应用能力差，不会用元素法导出水的静压力公式. 应用能力是考查的重点内容之一，必须在学习中注意培养；(3)部分考生计算能力差，经常出现计算错误.

例 3.39 设函数 $f(x)$在闭区间[0,1]上连续，在开区间(0,1)内大于零，并满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ (a 为常数)，又曲线 $y=f(x)$与 $x=1$，$y=0$ 所围的图形 S 的面积为2，求函数 $y=f(x)$，并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

[提示] 本题综合考查了定积分在求几何图形面积、旋转体体积中的应用，以及求微分方程通解等有关知识点. 首先求微分方程的通解，再利用定积分计算面积公式及题设条件求出含参数 a 的 $f(x)$，写出旋转体体积表达式，求最小值.

[解] 由题设知，当 $x\neq 0$ 时，$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}$，即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\frac{3a}{2}$，据此并由 $f(x)$在点 $x=0$ 处的连续性，得

$$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+Cx,\ x\in[0,1].$$

又由已知条件得

$$2=\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+Cx\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}ax^3+\frac{C}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}C,$$

即
$$C=4-a.$$

因此
$$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x.$$

旋转体的体积为

$$V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x\right)^2\mathrm{d}x$$
$$=\left(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3}\right)\pi.$$

由
$$V'(a)=\left(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3}\right)\pi=0 \quad 得$$
$$a=-5,$$

又因
$$V''(a)=\frac{1}{15}>0,$$

故 $a=-5$ 时，旋转体体积最小.

[典型错误] 由于计算过程中不细心，部分考生未能得到最后的正确答案.

例 3.40 设 $f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ ($n=1,2,\cdots$)，证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

[提示] 本题考查的知识点有定积分性质及数列极限存在准则. 根据题设分别用定积分性质证明$\{a_n\}$单调减少有下界.

[证明] 由题设可得

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)\qquad(k=1,2,\cdots),$$

因此
$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]+f(n)\geqslant 0,$$

即数列$\{a_n\}$有下界. 又
$$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

即数列$\{a_n\}$单调下降，故由单调有界数列必有极限的准则知数列$\{a_n\}$的极限存在.

[典型错误] 本题考查结果很不理想，三分之二的考生得了零分. 相当一部分考生不知从何处入手而放弃，还有考生形式上证明了 $a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x<0$. 但无法证明 $a_n\geqslant 0$. 关键是没有想到 $\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x$.

例 3.41 设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且在(a,b)内有 $f'(x)>0$. 证明：在(a,b)内存在唯一的 ξ，使曲线 $y=f(x)$与两直线 $y=f(\xi)$，$x=a$ 所围平面图形面积S_1 是曲线 $y=f(x)$与两直线 $y=f(\xi)$，$x=b$所围平面图形面积S_2 的 3 倍.

[提示] 本题考查的知识点有闭区间上连续函数的性质，变上限定积分函数的导数以及定积分在几何上的应用——平面图形的面积. 首先写出 S_1 和 S_2 的表达式，作辅助函数 $F(t)=S_1(t)-3S_2(t)$，利用闭区间上连续函数的性质证明存在性，再利用 $F'(t)$的符号确定单调性进而证明唯一性.

[证明] 存在性　在$[a,b]$上任取一点 t. 令
$$F(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]\mathrm{d}x-3\int_t^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}x$$
$$=\left[f(t)(t-a)-\int_a^t f(x)\mathrm{d}x\right]-3\left[\int_t^b f(x)\mathrm{d}x-f(t)(b-t)\right],$$

则 $F(t)$在$[a,b]$上连续，又 $f'(x)>0$，故 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加. 在$[a,b]$内取定点 c，则有
$$F(a)=-3\int_a^b[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x$$
$$=-3\int_a^c[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x-3\int_c^b[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x$$
$$\leqslant-3\int_c^b[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x$$
$$=-3[f(\xi_1)-f(a)](b-c)<0,\ c\leqslant\xi_1\leqslant b.$$
$$F(b)=\int_a^c[f(b)-f(x)]\mathrm{d}x+\int_c^b[f(b)-f(x)]\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\int_a^c[f(b)-f(x)]\mathrm{d}x$$
$$=[f(b)-f(\xi_2)](c-a)>0,\ a\leqslant\xi_2\leqslant c.$$

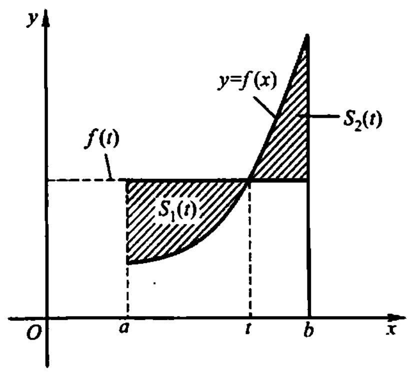

图 18

由介值定理知，在(a,b)内存在 ξ，使 $F(\xi)=0$. 即 $S_1=3S_2$.

唯一性　因 $F'(t)=f'(t)[(t-a)+3(b-t)]>0$，故 $F(t)$ 在(a,b)内单调增加. 因此(a,b)内只有一个 ξ，使$S_1=3S_2$.

[典型错误] (1)不能正确地用变上限定积分表示 S_1 和 S_2，对上限变量 t 和积分变量x，$f(t)$和 $f(x)$分不清楚；(2)不会构造适当的辅助函数.

例 3.42 设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$，

(1) 当 n 为正整数，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，证明 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$；

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

[提示] 本题考查的知识点有周期函数积分性质和极限的夹逼准则. 题中(1)是(2)的“台阶”, 注意到 $|\cos t|$ 的周期是 π, 故它在长度为 π 的区间上积分为相同的常数, 再利用积分性质即可证明(1). 应用夹逼准则就得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$ 的值.

[证明] (1) 因为 $|\cos t|\geqslant 0$, 且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$, 所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x\leqslant S(x)\leqslant\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x.$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数, 它在每个周期上积分相等, 所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=n\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=n\left[\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]=2n,$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=2(n+1).$$

因此当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时有 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$.

(2) 由(1)知, 当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时有 $\dfrac{2n}{(n+1)\pi}<\dfrac{S(x)}{x}<\dfrac{2(n+1)}{n\pi}$, 令 $x\to+\infty$, $n\to+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{(n+1)\pi}=\dfrac{2}{\pi}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)}{n\pi}=\dfrac{2}{\pi}$. 由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.

[典型错误] (1) 对于周期函数在每个周期上的积分值相等的结论不甚了解, 因而不会求 $\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x$;

(2) 虽然证明了(1), 但不会构造不等式 $\dfrac{2n}{(n+1)\pi}<\dfrac{S(x)}{x}<\dfrac{2(n+1)}{n\pi}$.

例 3.43 设函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内连续, 且 $\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0$, $\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$, 试证: 在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1 与 ξ_2, 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

[提示] 本题是一道微积分的综合题, 它涉及的知识点除了微分中值定理和定积分性质外, 还涉及变上限积分函数、定积分分部积分法. 由 $\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 知, 存在 ξ_1, 使 $f(\xi_1)=0$, 故本题难点在于找出另外一点 ξ_2, 使 $f(\xi_2)=0$. 一种方法是考虑变上限积分函数 $F(x)=\int_0^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$. $F(0)=F(\pi)=0$, 由题设找到另一点 $\xi\in(0,\pi)$, 使 $F(\xi)=0$, 再二次应用罗尔中值定理. 另一种方法是用反证法, 设在 $(0,\pi)$ 内 $f(x)=0$ 仅有一实根 ξ, 由题设找矛盾.

[证法 1] 令 $F(x)=\int_0^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, 则有 $F(0)=0$, $F(\pi)=0$.

又因为

$$0=\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}F(x)=F(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}F(x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}F(x)\sin x\,\mathrm{d}x,$$

所以存在 $\xi\in(0,\pi)$, 使 $F(\xi)\sin\xi=0$. 因若不然, 则在 $(0,\pi)$ 内或 $F(x)\sin x$ 恒为正, 或 $F(x)\sin x$ 恒为负, 均与 $\int_0^{\pi}F(x)\sin x\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾. 但当 $\xi\in(0,\pi)$ 时 $\sin\xi\neq 0$, 故 $F(\xi)=0$.

由上证得 $F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0 \quad (0<\xi<\pi)$.

再对 $F(x)$在区间$[0,\xi]$，$[\xi,\pi]$上分别用罗尔定理，知至少存在 $\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$，使 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$$

[证法 2] 由$\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0$知，存在 $\xi_1\in(0,\pi)$，使 $f(\xi_1)=0$，因若不然，则在$(0,\pi)$内或$f(x)$恒为正，或 $f(x)$恒为负，均与$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾.

若在$(0,\pi)$内 $f(x)=0$仅有一个实根$x=\xi_1$，则由$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$推知，$f(x)$在$(0,\xi_1)$内与$(\xi_1,\pi)$内异号，不妨设在$(0,\xi_1)$内 $f(x)>0$，在(ξ_1,π)内 $f(x)<0$，于是再由$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$与$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$及 $\cos x$ 在$[0,\pi]$上的单调性知：

$$\begin{aligned}0&=\int_0^{\pi}f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\xi_1}f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x+\int_{\xi_1}^{\pi}f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x>0,\end{aligned}$$

得出矛盾，从而推知，在$(0,\pi)$内除 ξ_1 外，$f(x)=0$至少还有另一实根 ξ_2，故知存在 ξ_1，$\xi_2\in(0,\pi)$，$\xi_1\neq\xi_2$，使$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

[典型错误] (1)本题的实质是若函数 $f(x)$在某区间上积分为 0，且在该区间上它与另外一个单调函数的乘积积分为 0，则在该区间内函数存在两个不同的零点 ξ_1 和 ξ_2. 有些考生没有抓住本质，反映出他们掌握知识不牢固、灵活运用能力差；(2)有些考生不习惯用变上限定积分表示一个确定的原函数，只设 $F(x)$是 $f(x)$的原函数，马上推知 $F(0)=F(\pi)=0$，$F(x)$只是 $f(x)$的原函数，$F(x)$还是不确定的，因此 $F(0)$、$F(\pi)$无从谈起；(3)有些考生想用分部积分来处理，但是做成

$$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=f(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xf'(x)\mathrm{d}x.$$

但题中未设 $f'(x)$存在.

例 3.44 设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$.

(Ⅰ) 证明 $f(x)$是以 π 为周期的周期函数；

(Ⅱ) 求 $f(x)$的值域.

[提示] 本题考查的知识点有函数的性质、变上限定积分函数的导数及定积分换元积分法等. 根据周期函数的定义证明(Ⅰ). 要求 $f(x)$的值域，需求 $f(x)$最大值和最小值，由于 $f(x)$是周期函数，故只需求 $f(x)$在$[0,\pi]$上的最大值与最小值.

[解] (Ⅰ) 由题设知 $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,\mathrm{d}t$.

令 $t=u+\pi$，则有

$$f(x+\pi)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\,\mathrm{d}u=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,\mathrm{d}u=f(x),$$

故 $f(x)$是以 π 为周期的周期函数.

(Ⅱ) 由于$|\sin x|$在$(-\infty,+\infty)$内连续，又由(Ⅰ)知 $f(x)$是以 π 为周期的周期函数，故只需在一个周期$[0,\pi]$上讨论其值域——$f(x)$为最大值与最小值. 因为

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$. 计算得

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin x\mathrm{d}x=2-\sqrt{2};$$

又 $f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\mathrm{d}x=1, f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=1$.

因而 $f(x)$的最小值为 $2-\sqrt{2}$，最大值为$\sqrt{2}$，故 $f(x)$的值域是$[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

[典型错误] (1)少数考生不知道根据定义去证明 $f(x)$是以 π 为周期的函数；(2)一些考生没想到求 $f(x)$的值域就是求 $f(x)$的最大值和最小值；(3)误认为$|\sin x|$的原函数是$|\cos x|$；(4)为了去掉绝对值只讨论 $0\leqslant t\leqslant\pi$，$\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$ 两种情况，全然不顾 $t\in\left(x+\pi, x+\frac{3}{2}\pi\right)$.

例 3.45 设 $y=f(x)$是区间$[0,1]$上的任一非负连续函数.(1)试证存在 $x_0\in(0,1)$，使得在区间$[0,x_0]$上以$f(x_0)$为高的矩形面积，等于在区间$[x_0,1]$上以 $y=f(x)$为曲边的曲边梯形面积.(2)又设 $f(x)$在区间$(0,1)$内可导，且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明(1)中的 x_0 是唯一的.

[提示] 本题考查的知识点有变上限定积分函数、微分中值定理及函数单调性等.(1)实际上要求证明存在 $x_0\in(0,1)$，使$x_0f(x_0)-\int_{x_0}^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，于是要构造函数 $\varphi(x)$，在$[0,1]$上满足罗尔中值定理，且 $\varphi'(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.(2)欲证 x_0 唯一，只要证明 $\varphi'(x)$为单调函数，即证 $\varphi''(x)$不变号.

[证法 1] 取 $\varphi(x)=-x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$，它在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$\varphi(0)=\varphi(1)=0$. 由罗尔定理知，存在 $x_0\in(0,1)$，使 $\varphi'(x_0)=0$. 经计算，

$$\varphi'(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t,$$

故知存在 $x_0\in(0,1)$使 $x_0f(x_0)-\int_{x_0}^1 f(t)\mathrm{d}t=0$.(1)证毕. 又 $\varphi''(x)=xf'(x)+f(x)+f(x)>0$，即 $\varphi'(x)$在$(0,1)$内严格单调增加，故(1)中的 x_0 是唯一的.

[证法 2] (1) 设在区间$(a,1)\left(a\geqslant\frac{1}{2}\right)$内取 x_1. 若在区间$[x_1,1]$上 $f(x)\equiv 0$，则$(x_1,1)$内任一点都可作为 x_0，否则可设 $f(x_2)>0$ 为连续函数 $f(x)$在区间$[x_1,1]$上的最大值，$x_2\in[x_1,1]$.

在区间$[0,x_2]$上，作辅助函数 $\varphi(x)=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t-xf(x)$，则 $\varphi(x)$连续，且 $\varphi(0)>0$，又

$$\varphi(x_2)=\int_{x_2}^1 f(t)\mathrm{d}t-x_2f(x_2)\leqslant(1-2x_2)f(x_2)<0,$$

因而由闭区间上连续函数的介值定理，存在一点 $x_0\in(0,x_2)\subset(0,1)$，使 $\varphi(x_0)=0$，即

$$\int_{x_0}^1 f(t)\mathrm{d}t=x_0f(x_0).$$

(2) 证法同证法 1.

[典型错误] (1)不少考生作辅助函数 $\varphi(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$，从 $\varphi(0)=-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\leqslant 0$，$\varphi(1)=f(1)\geqslant 0$，断言存在 $x_0\in(0,1)$，使$\varphi(x_0)=0$，这是不完整的，因为这只能断言存在 $x_0\in[0,1]$，使$\varphi(x_0)=0$，为了限$x_0\in(0,1)$，必须说明 x_0 不取两端点，这一步是很困难的；(2)有的考生作了辅助函数$\varphi(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$，就认为 $\varphi(0)=-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t<0$，$\varphi(1)=f(1)>0$，显然根据不足，因为本题的条件是 $f(x)$在$[0,1]$上非负，可见这些考生不是审题不严就是使用定理不当.

四、向量代数与空间解析几何(数学二不要求)

·考试内容与要求·

考试内容

向量的概念　向量的线性运算　向量的数量积和向量积　向量的混合积　两向量垂直平行的条件　两向量的夹角　向量的坐标表达式及其运算　单位向量　方向数与方向余弦　曲面方程和空间曲线方程的概念　平面方程、直线方程　平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件　点到平面和点到直线的距离　球面　母线平行于坐标轴的柱面　旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程　常用的二次曲面方程及其图形　空间曲线的参数方程和一般方程　空间曲线在坐标面上的投影曲线方程

考试要求

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积)，了解两个向量垂直、平行的条件.

3. 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

4. 掌握平面方程和直线方程及其求法.

5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.

6. 会求点到直线以及点到平面的距离.

7. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念.

8. 了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

9. 了解空间曲线的参数方程和一般方程. 了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求其方程.

·考试内容解析·

(一) 向量代数

1. 概念

定义　既有大小，又有方向的量称为向量，记为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. 起点为 A，终点为 B 的向量记为 $\overrightarrow{AB}$. 与起点无关的向量称为自由向量. 向量的长度又称为向量的模，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$. 长度为 1 的向量称为单位向量. 长度为零的向量称为零向量. 与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等，方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的长度相等，方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 若将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 起点重合后，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 落在同一直线上，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或共线，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

2. 向量的线性运算

(1) 向量的加法与减法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法服从平行四边形法则，或三角形法则. 即若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}.$$

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$定义为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

向量加法满足交换律、结合律等运算规律.

(2) 向量的数乘

设 λ 为实数，$\boldsymbol{a}$ 为向量. 则将下面的向量称为 λ 与$\boldsymbol{a}$ 的数乘，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$:

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为$|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

向量的数乘满足结合律及分配律等运算规律.

3. 向量的坐标

(1) 定义