四、向量代数与空间解析几何(数学二不要求)

·考试内容与要求·

考试内容

向量的概念　向量的线性运算　向量的数量积和向量积　向量的混合积　两向量垂直平行的条件　两向量的夹角　向量的坐标表达式及其运算　单位向量　方向数与方向余弦　曲面方程和空间曲线方程的概念　平面方程、直线方程　平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件　点到平面和点到直线的距离　球面　母线平行于坐标轴的柱面　旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程　常用的二次曲面方程及其图形　空间曲线的参数方程和一般方程　空间曲线在坐标面上的投影曲线方程

考试要求

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积)，了解两个向量垂直、平行的条件.

3. 理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

4. 掌握平面方程和直线方程及其求法.

5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题.

6. 会求点到直线以及点到平面的距离.

7. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念.

8. 了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

9. 了解空间曲线的参数方程和一般方程. 了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求其方程.

·考试内容解析·

(一) 向量代数

1. 概念

定义　既有大小，又有方向的量称为向量，记为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$. 起点为 A，终点为 B 的向量记为$\overrightarrow{AB}$. 与起点无关的向量称为自由向量. 向量的长度又称为向量的模，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为$|\boldsymbol{a}|$. 长度为 1 的向量称为单位向量. 长度为零的向量称为零向量. 与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等，方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的长度相等，方向相同，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 若将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 起点重合后，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 落在同一直线上，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或共线，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

2. 向量的线性运算

(1) 向量的加法与减法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法服从平行四边形法则，或三角形法则. 即若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}.$$

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$定义为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

向量加法满足交换律、结合律等运算规律.

(2) 向量的数乘

设 λ 为实数，$\boldsymbol{a}$ 为向量. 则将下面的向量称为 λ 与$\boldsymbol{a}$ 的数乘，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$：

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的模为$|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

向量的数乘满足结合律及分配律等运算规律.

3. 向量的坐标

(1) 定义

① 过点 A 作平面 π 垂直于数轴 u，π 与 u 的交点 A' 称为 A 在 u 轴上的投影.

② 设 A，B 在 u 轴上的投影分别为 A'，B'. 则将 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影. 记为 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$.

③ 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所夹的不超过 π 的角，称为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角. 记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. $0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$.

④ $\boldsymbol{a}$ 与 x，y、z 轴的夹角 α、β，γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角.

(2) 投影定理

① 设 $\overrightarrow{AB}$ 与 u 轴的夹角为 φ，则

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

② $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$.

(3) 向量的坐标

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$. 则 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式为

$$\boldsymbol{a}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}=\{a_x,a_y,a_z\},$$

其中 $a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}$，$a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}$，$a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}$.

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$. 则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}.$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}.$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|},$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

4. 向量的数量积、向量积与混合积

(1) 数量积(内积)

① 定义　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

② 运算律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

③ 坐标表达式　设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$. 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

(2) 向量积(外积)

① 定义　设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个向量，将下面的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积. 记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 服从右手系.

② 几何意义　模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

③ 运算律　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

④ 坐标表达式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\right\}.$$

(3) 混合积

① 定义　设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为三个向量，称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积. 记为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

② 几何意义　$|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体体积.

③ 性质　$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$(转换对称性)，$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]$.

④ 坐标表达式

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

5. 向量的关系

(1) 平行

$a /\!/ b$ 的几个充要条件：

① 存在不同时为零的 λ、μ，使 $\lambda a + \mu b = 0$，

② $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$，

③ $a \times b = 0$.

(2) 垂直　$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$.

(3) 三个向量的共面

a，b，c 共面的两个充要条件是：

① 存在不全为零的 λ_1、λ_2、λ_3，使 $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$，

② $[a, b, c] = 0$.

（二）空间平面与直线

1. 平面方程

(1) 点法式方程

过点$P_0(x_0, y_0, z_0)$，法向量为$n = \{A, B, C\}$的平面的点法式方程为$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

(2) 一般方程　$Ax + By + Cz + D = 0$.

(3) 截距方程　$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

(4) 点到平面的距离

空间一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$到平面π：$Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2. 直线方程

(1) 参数方程

过点$P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向向量为 $s = \{m, n, p\}$ 的直线的参数方程为$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$

(2) 标准方程　$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

(3) 一般方程　$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$

(4) 点到直线的距离　点 P 到过点P_0，且以 s 为方向向量的直线的距离为 $d = \frac{|\overrightarrow{PP_0} \times s|}{|s|}$.

3. 直线、平面间的关系

(1) 平面与平面的夹角

设平面 π_1，π_2 的法向量分别为 n_1，n_2，n_1 与 n_2 所夹的不超过$\frac{\pi}{2}$的角 θ 称为 π_1 与 π_2 的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$\pi_1 /\!/ \pi_2 \Leftrightarrow n_1 /\!/ n_2$，$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2$.

(2) 直线与直线的夹角

设直线 L_1，L_2 的方向向量分别为 s_1，s_2，s_1 与 s_2 所夹的不超过 $\frac{\pi}{2}$ 的角 θ 称为 L_1 与 L_2 的夹角，$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow s_1 /\!/ s_2$，$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow s_1 \perp s_2$.

(3) 直线与平面的夹角

设直线 L 在平面π 上的投影直线为$\tilde{L}$，则 L 与$\tilde{L}$的夹角 θ 称为直线L 与平面π 的夹角.

设 L 的方向向量为 s，π 的法向量为 n，则 $\sin\theta=\dfrac{|s\cdot n|}{|s||n|}$.

$L/\!/\pi\Leftrightarrow s\perp n$，$L\perp\pi\Leftrightarrow s/\!/n$.

(4) 平面束方程

设 π_i：$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$，$i=1,2$.

过 L：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$的平面束方程为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (\text{不含 } \pi_2)$$

或

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0 \quad (\text{不含 } \pi_1).$$

(三) 空间曲面与曲线

1. 空间曲面的方程

(1) 一般方程　$F(x,y,z)=0$.

(2) 参数方程　$\begin{cases}x=x(u,v),\\y=y(u,v),\\z=z(u,v).\end{cases}$

2. 空间曲线的方程

(1) 参数方程　$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t).\end{cases}$

(2) 一般方程　$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0.\end{cases}$

3. 常见曲面与曲线

(1) 母线平行于 z 轴的柱面　$F(x,y)=0$.

方程中缺哪个变量，方程就代表母线平行于那个轴的柱面.

(2) 旋转面

母线为C：$\begin{cases}f(y,z)=0,\\x=0,\end{cases}$绕 z 轴旋转所得曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

(3) 二次曲面

① 椭球面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

② 双曲面

单叶双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

双叶双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$.

③ 抛物面

椭圆抛物面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z$.

双曲抛物面　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z$.

(4) 螺旋线 $\begin{cases}x=R\cos\omega t,\\y=R\sin\omega t,\\z=vt.\end{cases}$

4. 空间曲线在坐标面上的投影曲线

C：$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}\xRightarrow{\text{消去}z}$ 关于 xy 平面的投影柱面$F(x,y)=0$，C 在 xy 平面上的投影曲线

$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$

·例题详解·

例 4.1 已知向量 p、q 和 r 两两互相垂直，且 $|p|=1$，$|q|=2$，$|r|=3$，则 $S=p+q+r$ 的模为________.

[答案] $\sqrt{14}$.

[提示] 本题主要考查了向量模的概念和两个向量相互垂直的充分必要条件.

[解] 根据向量模的定义及向量垂直的充要条件，得

$$\begin{aligned}|S|^2 &= S\cdot S=(p+q+r)\cdot(p+q+r)\\ &=p\cdot p+q\cdot q+r\cdot r\\ &=|p|^2+|q|^2+|r|^2=14,\end{aligned}$$

所以 $S=p+q+r$ 的模为 $\sqrt{14}$.

例 4.2 设 $a=(1,2,3)$，$b=(1,1,0)$，若非负实数 β 使得向量 $a+\beta b$ 与 $a-\beta b$ 垂直，则 β 的值为________.

[答案] $\sqrt{7}$.

[提示] 本题主要考查了向量模的计算公式和两个向量相互垂直的充分必要条件.

[解] 因为向量 $a+\beta b$ 与 $a-\beta b$ 垂直，所以

$$(a+\beta b)\cdot(a-\beta b)=0,$$

故 $|a|^2-\beta^2|b|^2=0$.

由于 $|a|^2=14$，$|b|^2=2$，于是 $\beta^2=7$，又 β 非负，所以 $\beta=\sqrt{7}$.

例 4.3 已知 a、b、c 都是单位向量，且满足 $a+b+c=0$，则 $a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=$__________.

[答案] $-\frac{3}{2}$.

[提示] 本题主要考查了向量的点积运算及向量模的概念.

[解] 因为 $a+b+c=0$，所以 $(a+b+c)\cdot(a+b+c)=0$，即

$$a\cdot a+b\cdot b+c\cdot c+2(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)=0,$$

$$|a|^2+|b|^2+|c|+2(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)=0,$$

$$3+2(a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a)=0,$$

于是

$$a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a=-\frac{3}{2}.$$

例 4.4 过点 $P(1,2,-1)$ 且与直线 L：$\begin{cases}x=-t+2,\\ y=3t-4\\ z=t-1\end{cases}$，垂直的平面方程是____________.

[答案] $x-3y-z+4=0$.

[提示] 本题主要考查了直线的参数方程和平面的点法式方程.

[解] 由于所求平面与直线 L 垂直，且 L 的方向向量为 $\tau=(-1,3,1)$，故所求平面的法向量为 $(-1,3,1)$，又知平面过点 $P(1,2,-1)$，所以平面的点法式方程为

$$(-1)(x-1)+3(y-2)+1\cdot(z+1)=0,$$

即

$$x-3y-z+4=0.$$

例 4.5 设 a，b 均为非零向量，且满足 $(a+3b)\perp(7a-5b)$，$(a-4b)\perp(7a-2b)$，则 a 与 b 的夹角等于

(A) 0.　　(B) $\frac{\pi}{2}$.　　(C) $\frac{\pi}{3}$.　　(D) $\frac{2\pi}{3}$.

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查了向量点积的定义、向量夹角与点积的关系及两向量相互垂直的充分必要条件.

[解] 根据两向量垂直的充要条件，由 $(a+3b)\perp(7a-5b)$，$(a-4b)\perp(7a-2b)$，得

$$\begin{cases}(a+3b)\cdot(7a-5b)=0,\\(a-4b)\cdot(7a-2b)=0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}7|a|^2+16a\cdot b-15|b|^2=0,\\7|a|^2-30a\cdot b+8|b|^2=0.\end{cases}$$

所以
$$a\cdot b=\frac{|b|^2}{2},\ a\cdot b=\frac{|a|^2}{2},\text{ 故 }|a|=|b|.$$

于是
$$\cos(\widehat{a\,b})=\frac{a\cdot b}{|a|\,|b|}=\frac{\frac{|a|^2}{2}}{|a|\,|a|}=\frac{1}{2}.$$

所以$(\widehat{a\,b})=\frac{\pi}{3}$.

因此选项(C)正确.

例 4.6 已知$|a|=2$，$|b|=\sqrt{2}$，且$a\cdot b=2$，则$|a\times b|$等于

(A) 2. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) 1.

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查了向量点积的定义和向量叉积模的计算公式.

[解] 因为$a\cdot b=|a|\,|b|\cos(\widehat{a\,b})=2\sqrt{2}\cos(\widehat{a\,b})=2$，所以$\cos(\widehat{a\,b})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

于是
$$|a\times b|=|a|\,|b|\sin(\widehat{a\,b})=2\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2.$$

因此选项(A)正确.

例 4.7 两直线$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$与$L_2:\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3\end{cases}$的夹角为

(A) $\frac{\pi}{2}$. (B) $\frac{\pi}{3}$. (C) $\frac{\pi}{4}$. (D) $\frac{\pi}{6}$.

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查了直线的标准方程、一般方程及两直线夹角的概念与求法.

[解] 直线L_1的方向向量是$s_1=(1,-2,1)$，直线L_2的方向向量是$s_2=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=(-1,-1,2)$，

记直线L_1与L_2的夹角为φ. 则

$$\cos\varphi=\frac{s_1\cdot s_2}{|s_1|\,|s_2|}=\frac{1}{2}.$$

于是
$$\varphi=\frac{\pi}{3}.$$

因此选项(B)正确.

例 4.8 曲面$x^2+4y^2+z^2=4$与平面$x+z=a$的交线在yOz平面上的投影方程是

(A) $\begin{cases}(a-z)^2+4y^2+z^2=4\\x=0\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x^2+4y^2+(a-x)^2=4\\z=0\end{cases}$.

(C) $\begin{cases}x^2+4y^2+(a-x)^2=4\\x=0\end{cases}$. (D) $(a-z)^2+4y^2+z^2=4$.

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查了空间曲线在坐标面上投影曲线的方程.

[解] 根据题意. 曲面$x^2+4y^2+z^2=4$与平面$x+z=a$的交线在yOz平面上的投影应在yOz平面上，故$x=0$. 因而选项(B)和(D)不对. 又曲面与平面的交线在yOz平面上的投影柱面方程应不含变量x，故选项(C)也不对.

从而选项(A)正确.

注：本题也可根据投影曲线方程的求法直接说明选项(A)正确.

例 4.9　设$a=(1,1,4)$，$b=(1,-2,2)$，求 b 在 a 方向上的投影向量.

[提示]　本题主要考查了向量的投影向量的概念.

[解]　b 在 a 方向上的投影为

$$\mathrm{Pr}j_a b=b\cdot\left(\frac{a}{|a|}\right)=\frac{1\times1+1\times(-2)+4\times2}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}=\frac{7}{\sqrt{18}},$$

与 a 同方向的单位同量为

$$a^0=\frac{a}{|a|}=\frac{\{1,1,4\}}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{4}{\sqrt{18}}\right),$$

所以 b 在 a 方向上的投影向量为

$$(\mathrm{Pr}j_a b)a^0=\frac{7}{\sqrt{18}}\left(\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{4}{\sqrt{18}}\right)=\left(\frac{7}{18},\frac{7}{18},\frac{28}{9}\right).$$

例 4.10　已知单位向量$\overrightarrow{OA}$的三个方向角相等，点 B 与点$M(1,-3,2)$关于点$N(-1,2,1)$对称，求$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

[提示]　本题主要考查了方向角的概念、关于点对称的概念和对称点的求法、向量叉积的概念与计算.

[解]　设$\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$．因为

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\text{，且 }\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma,$$

所以 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，故

$$\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(1,\ 1,\ 1).$$

设$B=(x,y,z)$，根据题意，点$N(-1,2,1)$为线段 BM 的中点，所以

$$-1=\frac{1+x}{2},\ 2=\frac{-3+y}{2},\ 1=\frac{2+z}{2},$$

解得 $x=-3$，$y=7$，$z=0$．故$\overrightarrow{OB}=(-3,7,0)$．综上，得

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\pm\begin{vmatrix}i & j & k\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -3 & 7 & 0\end{vmatrix}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(-7,-3,10).$$

例 4.11　已知$(a\times b)\cdot c=2$，求$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)$.

[提示]　本题主要考查了向量的运算及其运算律.

[解]　$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=[(a+b)\times(b+c)]\cdot c+[(a+b)\times(b+c)]\cdot a$

$=[(a\times b)+(a\times c)+(b\times b)+(b\times c)]\cdot c+[(a\times b)+(a\times c)+(b\times b)+(b\times c)]\cdot a$

$=(a\times b)\cdot c+(b\times c)\cdot a=2(a\times b)\cdot c=4.$

例 4.12　求过直线 L_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$，且平行于直线 L_2：$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$的平面 π 的方程.

[提示]　本题主要考查了直线与平面的相互关系、向量的叉积及平面的点法式方程.

[解]　根据题意，平面 π 过直线 L_1，所以 π 过直线 L_1 上的点$(1,2,3)$.

又因为平面 π 过直线 L_1 且平行于直线 L_2，所以平面 π 的法向量为

$$n=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1,-3,1),$$

因此平面 π 的点法式方程为 $$1\cdot(x-1)-3\cdot(y-2)+1\cdot(z-3)=0,$$
即 $$x-3y+z+2=0.$$

例 4.13 设平面 π 过原点，且与直线 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t,\\ z=2+t\end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，求 π 的方程.

[提示] 本题主要考查了直线的参数方程与标准方程、向量的叉积及平面的点法式方程.

[解] 直线 $\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t,\\ z=2+t\end{cases}$ 的方向向量为 $s_1=(0,1,1)$，直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 的方向向量为 $s_2=(1,2,1)$. 根据题意，平面 π 与这两条直线都平行，从而 π 的法向量为

$$n=s_1\times s_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1,1,-1),$$

又因为平面 π 又经过原点，故其方程为 $x-y+z=0$.

例 4.14 求平面 $x+2y-2z+6=0$ 和平面 $4x-y+8z-8=0$ 的交角的平分面方程.

[提示] 本题主要考查了两平面的交角的平分面概念及点到平面的距离.

[解法 1] 设 $M(x,y,z)$ 为所求平面上的任一点，根据题意，M 到两已知平面的距离相等，所以

$$\frac{|x+2y-2z+6|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|4x-y+8z-8|}{\sqrt{4^2+(-1)^2+8^2}},$$

即 $$3|x+2y-2z+6|=|4x-y+8z-8|,$$

因此 $$3x+6y-6z+18=\pm(4x-y+8z-8),$$

故所求平面的方程是 $x-7y+14z-26=0$，或 $7x+5y+2z+10=0$.

[解法 2] 设所求的平面方程为

$$x+2y-2z+6+\lambda(4x-y+8z)=0,$$

此平面的法向量为 $n=(1+4\lambda,2-\lambda,-2+8\lambda)$.

记平面 $x+2y-2z+6=0$ 和平面 $4x-y+8z-8=0$ 的法向量分别为 n_1，n_2，则

$$n_1=(1,2,-2),\quad n_2=(4,-1,8).$$

根据题意，n 与 n_2 所夹锐角和 n 与 n_1 所夹锐角相等，所以

$$\frac{|n\cdot n_1|}{|n|\,|n_1|}=\frac{|n\cdot n_2|}{|n|\,|n_2|},$$

即 $$\frac{1}{3}|1+4\lambda+2(2-\lambda)-2(8\lambda-2)|=\frac{1}{9}|4(1+4\lambda)-(2-\lambda)+8(8\lambda-2)|,$$

解得 $\lambda_1=\dfrac{1}{3}$，$\lambda_2=-\dfrac{1}{3}$. 故所求平面方程为

$$7x+5y+2z+10=0,\text{ 或 } x-7y+14z-26=0.$$

例 4.15 一平面通过点 $(1,2,3)$，它在 x 轴、y 轴上的截距相等，问当平面的截距为何值时，它与三个坐标面所围成的空间体的体积最小？并写出此平面的方程.

[提示] 本题主要考查了平面在坐标轴上的截距概念、平面的截距式方程即一元函数的最小值问题.

[解] 设此平面的截距式方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，根据题意，$a=b$，故平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{c}=1$.

因为点 $(1,2,3)$ 在此平面上，所以

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\frac{3}{c}=1,$$

解得 $$c=\frac{3a}{a-3}.$$

设此平面与三个坐标面所围成的空间体的体积为 V，则

$$V=\frac{1}{6}a\cdot a\cdot\frac{3a}{a-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{a-3},$$

由 $V_a'=\frac{1}{2}\frac{2a^3-9a^2}{(a-3)^2}=0$，得 $a=0$（舍去），或 $a=\frac{9}{2}$.

所以当 $a=b=\frac{9}{2}$，$c=9$ 时，此平面与三个坐标面所围成的空间体的体积最小.

此平面的方程为
$$\frac{2x}{9}+\frac{2y}{9}+\frac{z}{9}=1.$$

例 4.16 求直线 L_1：$\begin{cases}x+2y+5=0,\\2y-z-4=0\end{cases}$ 与 L_2：$\begin{cases}y=0,\\x+2z+4=0\end{cases}$ 的公垂线方程.

[提示] 本题主要考查了公垂线的概念及其方程的求法.

[解] L_1 的方向向量为 $s_1=(1,2,0)\times(0,2,-1)=(-2,1,2)$，$L_2$ 的方向向量为 $s_2=(0,1,0)\times(1,0,2)=(2,0,-1)$，所以公垂线的方向向量为

$$s_2=(0,1,0)\times(1,0,2)=(2,0,-1),$$

所以公垂线的方向向量为

$$s=s_1\times s_2=(-2,1,2)\times(2,0,-1)=(-1,2,-2).$$

设过 L_1 且与 s 平行的平面为 π_1，则 π_1 的方程为

$$x+2y+5+\lambda(2y-z-4)=0,$$

π_1 的法向量为 $n_1=(1,2+2\lambda,-\lambda)$. 根据 $s\perp n_1$，得 $\lambda=-\frac{1}{2}$. 所以 π_1 的方程为

$$2x+2y+z+14=0.$$

设过 L_2 且与 s 平行的平面为 π_2，类似可得 π_2 的方程为

$$2x+5y+4z+8=0.$$

因此所求公垂线的方程为

$$\begin{cases}2x+2y+z+14=0,\\2x+5y+4z+8=0.\end{cases}$$

例 4.17 求证：若向量 a，b，c 不共面，则向量 $a\times b$，$b\times c$，$c\times a$ 也不共面.

[提示] 本题主要考查了向量混合积的概念、向量共面的概念及其充分必要条件.

[证明] 反证法. 假设向量 $a\times b$、$b\times c$，$c\times a$ 共面，则存在三个不全为零的常数 λ_1、λ_2，λ_3，使得

$$\lambda_1(a\times b)+\lambda_2(b\times c)+\lambda_3(c\times a)=0. \qquad (*)$$

分别将 a，b，c 与 $(*)$ 式作点积，得

$$\begin{cases}\lambda_1(a,b,c)=0,\\\lambda_2(a,b,c)=0,\\\lambda_3(a,b,c)=0,\end{cases}$$

所以 $(a,b,c)=0$，这与 a，b、c 不共面矛盾. 得证.

例 4.18 设 a、b，c 为三个不共线的平面向量，证明它们首尾相接恰好构成一个三角形的充要条件是

$$a\times b=b\times c=c\times a.$$

[提示] 本题主要考查了向量加法的三角形法则、向量运算的概念及其运算律.

[证明] 向量 a，b，c 首尾相接恰好构成一个三角形的充要条件是 $a+b+c=0$. 因此只要证明

$$a+b+c=0\Leftrightarrow a\times b=b\times c=c\times a$$

便可.

必要性证明：因为

$$a+b+c=0, \qquad (*)$$

等式 $(*)$ 两边与 c 作叉积，得

$$c\times a=-c\times b=b\times c,$$

等式(*)两边与 b 作叉积，得

$$b\times c=-b\times a=a\times b,$$

所以

$$a\times b=b\times c=c\times a.$$

充分性证明：因为

$$a\times b=b\times c=c\times a.$$

根据 $a\times b=b\times c$，得

$$(a+c)\times b=0,$$

故 $(a+b+c)\times b=0$，所以 b 与 $a+b+c$ 平行.

类似地，根据 $a\times b=c\times a$，得到 a 与 $a+b+c$ 平行. 根据 $b\times c=c\times a$，得到 c 与 $a+b+c$ 平行.

又因为 a，b，c 为三个不共线的平面向量，所以

$$a+b+c=0.$$

五、多元函数微分学

• 考试内容与要求 •

数学(一)

考试内容

多元函数的概念　二元函数的几何意义　二元函数的极限和连续的概念　有界闭区域上多元连续函数的性质　多元函数偏导数和全微分　全微分存在的必要条件和充分条件　多元复合函数、隐函数的求导法　二阶偏导数　方向导数和梯度　空间曲线的切线和法平面　曲面的切平面和法线　二元函数的二阶泰勒公式　多元函数极值和条件极值　拉格朗日乘数法　多元函数的最大值、最小值及其简单应用

考试要求

1. 理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念以及有界闭区域上连续函数的性质.
3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念，会求全微分. 了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性.
4. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.
5. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.
6. 会用隐函数的求导法则.
7. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程.
8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.
9. 理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题.

数学(二)

考试内容

多元函数的概念　二元函数的几何意义　二元函数的极限与连续的概念　有界闭区域上二元连续函数的性质　多元函数偏导数和全微分　多元复合函数、隐函数的求导法　二阶偏导数　多元函数的极值和条件极值、最大值和最小值

考试要求

1. 了解多元函数的概念，了解二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续的直观意义，了解有界闭区域上二元连续函数的性质.
3. 了解多元函数偏导数与全微分的概念，会求多元复合函数一阶、二阶偏导数，会求全微分，了解隐函数存在定理，会求多元隐函数的偏导数.