等式(*)两边与 b 作叉积，得

$$b\times c=-b\times a=a\times b,$$

所以

$$a\times b=b\times c=c\times a.$$

充分性证明：因为

$$a\times b=b\times c=c\times a.$$

根据 $a\times b=b\times c$，得

$$(a+c)\times b=0,$$

故 $(a+b+c)\times b=0$，所以 b 与 $a+b+c$ 平行.

类似地，根据 $a\times b=c\times a$，得到 a 与 $a+b+c$ 平行．根据 $b\times c=c\times a$，得到 c 与 $a+b+c$ 平行.

又因为 a，b，c 为三个不共线的平面向量，所以

$$a+b+c=0.$$

五、多元函数微分学

·考试内容与要求·

数学(一)

考试内容

多元函数的概念　二元函数的几何意义　二元函数的极限和连续的概念　有界闭区域上多元连续函数的性质　多元函数偏导数和全微分　全微分存在的必要条件和充分条件　多元复合函数、隐函数的求导法　二阶偏导数　方向导数和梯度　空间曲线的切线和法平面　曲面的切平面和法线　二元函数的二阶泰勒公式　多元函数极值和条件极值　拉格朗日乘数法　多元函数的最大值、最小值及其简单应用

考试要求

1. 理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义.

2. 了解二元函数的极限与连续性的概念以及有界闭区域上连续函数的性质.

3. 理解多元函数偏导数和全微分的概念，会求全微分．了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分形式的不变性.

4. 理解方向导数与梯度的概念并掌握其计算方法.

5. 掌握多元复合函数一阶、二阶偏导数的求法.

6. 会用隐函数的求导法则.

7. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程.

8. 了解二元函数的二阶泰勒公式.

9. 理解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值，并会解决一些简单的应用问题.

数学(二)

考试内容

多元函数的概念　二元函数的几何意义　二元函数的极限与连续的概念　有界闭区域上二元连续函数的性质　多元函数偏导数和全微分　多元复合函数、隐函数的求导法　二阶偏导数　多元函数的极值和条件极值、最大值和最小值

考试要求

1. 了解多元函数的概念，了解二元函数的几何意义.

2. 了解二元函数的极限与连续的直观意义，了解有界闭区域上二元连续函数的性质.

3. 了解多元函数偏导数与全微分的概念，会求多元复合函数一阶、二阶偏导数，会求全微分，了解隐函数存在定理，会求多元隐函数的偏导数.

4. 了解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值．会求简单多元函数的最大值和最小值，会求解一些简单的应用题．

•考试内容解析•

（一）多元函数概念

1. 二元函数的定义　设 D 是平面上的一个点集，如果对于每一个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照一定的法则总有一个确定的值和它对应，则称 z 是变量 x，y 的二元函数(或点 P 的函数)，记为

$$z=f(x,y)\text{或 } z=f(P).$$

点集 D 称为该函数的定义域．x，y 称为自变量，z 也称为因变量．数集 $\{z\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为该函数的值域．

类似地，可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数．

2. 二元函数的几何意义　$z=f(x,y)$ 在几何上一般表示空间直角坐标系中的一个曲面．例如 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 表示上半球面，$z=x^2+y^2$ 表示旋转抛物面等．

（二）二元函数的极限

定义　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某去心邻域内有定义，如果动点 (x,y) 以任何方式无限趋于点 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 总是无限趋于一个常数 A，则称当 (x,y) 趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$．

（三）二元函数的连续性

1. 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续．如果 $f(x,y)$ 在区域 D 上每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续．

2. 有界闭区域上连续函数的性质

(1) 最大值和最小值定理　在有界闭区域 D 上的多元连续函数，在 D 上一定有最大值和最小值．

(2) 介值定理　在有界闭区域 D 上的多元连续函数，可以取到它在 D 上的最小值与最大值之间的任何值．

（四）偏导数

1. 偏导数的定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义，如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\text{或 } f'_x(x_0,y_0),$$

即
$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数定义为 $f'_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$．

2. 如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 的每一点 (x,y) 处都有偏导数，一般地说，它们仍是 x，y 的函数，称为 $f(x,y)$ 的偏导函数，简称偏导数．记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial x},f'_x(x,y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial y},f'_y(x,y)$．

3. 偏导数的几何意义，设有二元函数 $z=f(x,y)$，且 $z_0=f(x_0,y_0)$．则 $f'_x(x_0,y_0)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$ 在几何上分别表示曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的切线对 x 轴和对 y 轴的斜率．

4. 高阶偏导数　如果二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 仍然具有偏导数，则它们的偏

导数称为 $z=f(x,y)$的二阶偏导数，记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y)=z''_{xx};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y)=z''_{xy};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y)=z''_{yy};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y)=z''_{yx}.$$

其中称 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 为混合偏导数．类似地可以定义三阶、四阶以及 n 阶偏导数．

5．如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 都在区域D内连续，则在 D 内 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，即二阶混合偏导数与求偏导的先后次序无关．

（五）全微分

1．定义　设二元函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)的某邻域内有定义．当 $f(x,y)$的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可以表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A，B 不依赖于 Δx、Δy，而仅与 x，y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处可微．$A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数$f(x,y)$在点(x,y)处的全微分，记作 dz，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$．

2．若函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处可微，则必在(x,y)处连续．

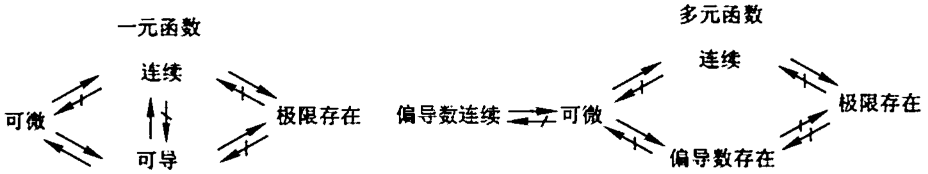
3．可微的必要条件　如果函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处可微，则该函数在点(x,y)处的两个偏导数都存在，且 $A=\frac{\partial z}{\partial x}$，$B=\frac{\partial z}{\partial y}$．

又对于自变量 x、y 有 $\Delta x=dx$，$\Delta y=dy$，所以全微分 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$．

4．可微的充分条件　如果函数 $z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$连续，则函数在该点可微．

5．全微分的形式不变性　设 $z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，如果 $f(u,v)$，$u(x,y)$，$v(x,y)$ 分别有连续偏导数，则复合函数 $z=f(u,v)$在(x,y)处的全微分仍可表为 $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$，即无论 u，v 是自变量还是中间变量，上式总成立．

注　一元函数和多元函数在极限存在，连续、可导、可微的相互关系上，有相同之处，更有相异之处，图示如下(记号→表示可推出，$\not\to$表示不一定推出)



（六）复合函数求导法则

1．若 $u=u(x,y)$和 $v=v(x,y)$在点(x,y)处偏导数存在，函数 $z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$在点(x,y)处偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

2．设 $z=f(u,v)$有连续偏导数，$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$都可导，则 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}$，这里$\frac{dz}{dt}$称为 z

对 t 的全导数.

3. 设 $z=f(u,v,w)$有连续偏导数，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，$w=\omega(x,y)$偏导数存在，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

注　多元函数的复合函数关系比较复杂，不可能列出所有的公式，上面是三个较常用的求偏导公式．一般说来，求复合函数偏导数时，要利用链锁法则——先通过对所有有关的中间变量求偏导，再乘以中间变量对自变量的偏导数.

（七）隐函数的求导公式

1. 设函数 $F(x,y,z)$在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

2. 由方程组确定的隐函数的导数

设方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定了隐函数 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$，上式两边分别对 x 求偏导，注意到 u 和 v 是 x 及 y 的函数，有

$$\begin{cases}F'_x+F'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F'_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ G'_x+G'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G'_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$

当 $\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}\neq 0$ 时，从上式中可解出 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$．同理，原方程两端对 y 求偏导，可求出 $\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$.

（以下的八至十二数学二不要求）

（八）方向导数

1. 定义　设二元函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某邻域内有定义．从 P_0 点引射线 l，并设 $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$为 l 上另外一点，如果极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$ 存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$在点 P_0 沿方向 l 的方向导数，记作 $\frac{\partial f}{\partial l}$，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

对三元函数，$u=f(x,y,z)$ 有类似的定义.

2. 如果函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x,y)$可微，那么函数在该点沿任一方向 l 的方向导数都存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi,$$

其中 φ 为 x 轴到方向 l 的转角.

对三元函数 $u=f(x,y,z)$有类似结果：

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中 α，β，γ 为方向 l 的方向角.

（九）梯度

1. 定义　设函数 $z=f(x,y)$在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数．则对于 D 内每一点 $P(x,y)$，向量 $\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j$ 称为函数 $z=f(x,y)$在点 $P(x,y)$的梯度，记作 grad $f(x,y)$，即

$$\mathrm{grad}\, f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j.$$

类似定义三元函数 $u=f(x,y,z)$在点 $P(x,y,z)$的梯度

$$\text{grad } u=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k$$

2. 函数在某点的梯度是这样一个向量．它的方向是函数在该点方向导数最大的方向，它的模是最大方向导数的值．

（十）空间曲线的切线与法平面

1. 设曲线方程为$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$ $P_0(x_0,y_0,z_0)$是曲线上对应于 $t=t_0$ 的点，即 $x_0=x(t_0)$，$y_0=y(t_0)$，$z_0=z(t_0)$，则曲线在 P_0 点处切线的方向向量为$\{x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)\}$，切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)};$$

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

2. 若空间曲线是由方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$表示的，则可视 x，y，z 中之一为参变量，得到参数方程，例如$\begin{cases}x=x,\\ y=y(x),\\ z=z(x).\end{cases}$切线的方向向量取作$\{1,y'(x),\ z'(x)\}$，这里 $y'(x)$，$z'(x)$可用由方程组确定的隐函数求导法得到，代入 1 中的公式即可得曲线的切线和法平面方程．

（十一）曲面的切平面及法线

1. 设曲面方程为 $F(x,y,z)=0$，则曲面上点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$处的法向量为 $n=\{F'_x(x_0,y_0,z_0),\ F'_y(x_0,y_0,z_0),\ F'_z(x_0,y_0,z_0)\}$．该点的切平面方程为

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0);$$

曲面在该点的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

2. 如果曲面方程为 $z=f(x,y)$，即 $f(x,y)-1=0$．这样 $P_0(x_0,y_0,z_0)$处的法向量为 $n=\{f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),\ -1\}$，代入 1 中公式即可得曲面的切平面及法线方程．

（十二）二元函数的泰勒公式

1. 设 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域内连续，且具有三阶的连续偏导数，(x_0+h,y_0+k)为此邻域内的任一点，则有

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)=&f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)\\&+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3f(x_0+\theta h,y_0+\theta k),\ (0<\theta<1)\end{aligned}$$

此公式称为二元函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的带有拉格朗日型余项的二阶泰勒公式．其中记号

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$ 表示 $hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)$；

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)$ 表示 $h^2f_{xx}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}f(x_0,y_0)+k^2f_{yy}(x_0,y_0)$；

$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$ 表示 $\left(h^3\frac{\partial^3f}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3f}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3f}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3f}{\partial y^3}\right)\Bigg|_{(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}$.

2. 在 1 中取 $x_0=0$，$y_0=0$，则 1 中的泰勒公式称为带有拉格朗日余项的二阶麦克劳林公式．

（十三）多元函数的极值

1. 定义　设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义，如果在此邻域内都有 $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$ [或$f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$]，则称函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取得极大值(或极小值)．

2. 极值存在的必要条件　设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处具有偏导数．且在(x_0,y_0)处取得极值，则

它在该点的偏导数必为零，即

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0.$$

3. 极值存在的充分条件　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$．令

$$f''_{xx}(x_0,y_0)=A,\ f''_{xy}(x_0,y_0)=B,\ f''_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

则

(1) 当 $AC-B^2>0$ 时，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，且当 $A<0$ 时，取得极大值，$A>0$ 时，取得极小值；

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不取得极值；

(3) 当 $AC-B^2=0$ 时，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处是否取得极值不能确定，还需另作讨论．

4. 条件极值问题　函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的极值，称为条件极值．求条件极值的方法常用下面的拉格朗日乘数法：

构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$，通过求解方程组

$$\begin{cases}F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x=0\\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y=0\\ F'_z=f'_z+\lambda\varphi'_z=0\\ F'_\lambda=\varphi(x,y,z)=0\end{cases}$$

得到 x、y、z，而点 (x,y,z) 就是可能取得极值的点．

注　在实际问题中，(x,y,z) 是否为极值点，通常可以根据实际问题本身的背景加以确定，这与一元函数的情况类似．

·例 题 详 解·

例 5.1　设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，$f$、$\varphi$ 具有二阶连续导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________．

[答案]　$yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$．

[提示]　本题考查抽象复合函数的二阶偏导数．应用复合函数求导公式计算．

[解]　$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)+yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$$
$$=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y).$$

[典型错误]　本题中 f 与 φ 中的中间变量均为一元，因此本题实质上是一元复合函数的求导，只要注意到对 x 求导时，y 视为常数；对 y 求导时，x 视为常数即可．有的答卷中出现了 f'_x、f'_y 等记号，从而不能简化．究其原因，这些考生误为 f、φ 中的中间变量是两个，从而出现了 f'_x、f'_y 等错误记号．

例 5.2　设 $u=e^{-x}\sin\frac{x}{y}$，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $\left(2,\frac{1}{\pi}\right)$ 处的值为________．

[答案]　$\left(\frac{\pi}{e}\right)^2$．

[提示]　本题考查二元函数在一点处的偏导数值．先求出 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，再将点 $\left(2,\frac{1}{\pi}\right)$ 代入则可．

[解]　$\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-x}\sin\frac{x}{y}+e^{-x}\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}=e^{-x}\left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-\sin\frac{x}{y}\right)$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^{-x}\left[-\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}-\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)-\cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right],$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)}=e^{-2}\left(-\pi^2\cos 2\pi+2\pi^3\sin 2\pi+2\pi^2\cos 2\pi\right)=\left(\frac{\pi}{e}\right)^2.$$

例 5.3　设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

［答案］ 2.

［提示］ 本题考查的知识点是隐函数偏导数的计算．可用直接法、公式法、求全微分等多种方法求解．

［解法 1］ 在题设等式两边对 x 求偏导，并注意到 z 是 x、y 的二元函数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3z}\left(2-3\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

由此得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}};$$

同理得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}},$$

于是
$$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3\cdot 2e^{2x-3z}+2}{1+3e^{2x-3z}}=2.$$

［解法 2］ 令 $F(x,y,z)=z-e^{2x-3z}-2y$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-2}{1+3e^{2x-3z}}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}},$$

故
$$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

［解法 3］ 在等式两边求全微分，则有

$$dz=e^{2x-3z}(2dx-3dz)+2dy.$$

从而
$$dz=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}dx+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}dy,$$

故
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}.$$

由此得
$$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

［典型错误］ 有的考生用解法 2，但在求 F_x，F_y 时，却把 z 看成是 x，y 的函数，而不明白在 $F(x,y,z)$ 中 x、y、z 都是相互独立的自变量，从而不能得出正确结果．

例 5.4　由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz=$ ________.

［答案］ $dx-\sqrt{2}dy$.

［提示］ 本题考查全微分的计算方法．可用隐函数求导法求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入全微分计算公式，或利用全微分的形式不变性计算．

［解］ 设 $F(x,y,z)=xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\sqrt{2}$，则

$$F_x=yz+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad F_y=xz+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad F_z=xy+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

于是
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{yz\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x}{xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{xz\sqrt{x^2+y^2+z^2}+y}{xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z}.$$

故
$$dz\bigg|_{(1,0,-1)}=\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,0,-1)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(1,0,-1)}dy=dx-\sqrt{2}dy.$$

本题也可用下面的方法求解：

在等式两边求全微分，有

$$yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z) = 0.$$

将 $x=1$，$y=0$，$z=-1$ 代入上式．解得

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x - \sqrt{2}\mathrm{d}y.$$

例 5.5 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程是________．

［答案］ $2x+4y-z-5=0$.

［提示］ 本题考查曲面的法向量、两向量平行、平面的点法式方程等基础知识．关键是求出切点坐标．

［解］ 设切点坐标为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在 P_0 处的法向量为 $(-2x_0,-2y_0,1)$，应与已知平面的法向量 $n=(2,4,-1)$ 平行，所以

$$\frac{-2x_0}{2} = \frac{-2y_0}{4} = \frac{1}{-1},$$

从而　$x_0=1$，$y_0=2$，$z_0=x_0^2+y_0^2=5$．于是得到所求切平面方程

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0,\quad \text{即}\quad 2x+4y-z=5.$$

［典型错误］ 由法向量 $(-2x_0,-2y_0,1)$，误认为 $-2x_0=2$，$-2y_0=4$，从而 $x_0=-1$，$y_0=-2$，$z_0=x_0^2+y_0^2=5$，答成 $2(x+1)+4(y+2)-(z-5)=0$，即 $2x+4y-z+15=0$．注意：若两平面平行，则它们法向量对应的坐标成比例，而并不一定相等．还有的考生答成 $2x+4y-z=0$ 或 $2x+4y-z=2x_0+4y_0-(x_0^2+y_0^2)$，没有将切点求出来．

例 5.6 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 的法线方程为________．

［答案］ $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$.

［提示］ 本题考查曲面在一点处的法线方程．关键是求出法线的方向向量，而此方向向量恰是曲面在点 $(1,-2,2)$ 处的法向量．

［解］ 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则曲面在点 $(1,-2,1)$ 处的法向量，即法线的方向向量为

$$(F_x,F_y,F_z)\Big|_{(1,-2,2)} = (2x,4y,6z)\Big|_{(1,-2,2)} = (2,-8,12),$$

故所求法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z-2}{12},\quad \text{即}\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}.$$

［典型错误］ 错将法线方程写成切平面方程

$$(x-1)-4(y+2)+6(z-2)=0.$$

例 5.7 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为________．

［答案］ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0,\sqrt{2},\sqrt{3})$.

［提示］ 本题考查旋转曲面的方程，曲面的法向量等基础知识．需首先求出旋转曲面的方程．

［解］ 旋转曲面的方程为 $3(x^2+z^2)+2y^2=12$，即 $3x^2+2y^2+3z^2-12=0$.

在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向外侧的法向量为 $(6x,4y,6z)\Big|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}$ 即 $(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2})$，将其单位化得 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0,\sqrt{2},\sqrt{3})$.

［典型错误］ 错将旋转曲面写成 $3x^2+2(y^2+z^2)=12$，即 $3x^2+2y^2+2z^2=12$．这是曲线绕 x 轴旋转一周所得曲面的方程．

例 5.8 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为________．

［答案］ $\dfrac{1}{2}$.

［提示］ 本题考查方向导数的计算方法，需先计算出函数在点 A 处的各个偏导数及向量 $\overrightarrow{AB}$ 的三个方向余弦．

［解］ $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,0,1)}=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,0,1)}=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,0,1)}=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}.$$

方向$\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$，由此得其方向余弦 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=\frac{2}{3}$，$\cos\gamma=\frac{1}{3}$.

于是所求方向导数为$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right]_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

例 5.9 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$在点 $M(1,2,-2,)$处的梯度 $\mathrm{grad}\ u|_M=$ ________.

［答案］ $\frac{2}{9}(1,2,-2)$.

［提示］ 本题考查梯度的计算公式.

［解］ 由 $\mathrm{grad}\ u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k$

$$=\frac{1}{x^2+z^2+z^2}(2xi+2yj+2zk),$$

得
$$\mathrm{grad}\ u\Big|_M=\frac{1}{1^2+2^2+(-2)^2}(2i+4j-4k)=\frac{2}{9}(1,2,-2).$$

例 5.10 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\ r)\Big|_{(1,-2,2)}=$ ________.

［答案］ $\frac{2}{3}$.

［提示］ 本题考查的知识点是梯度与散度的公式和计算．按公式 $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\ r)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)$去计算即可.

［解］ $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2r}=\frac{x}{r}$，同理$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$，$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\frac{r-x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3},$$

同理
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)=\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}.$$

故
$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\ r)\Big|_{(1,-2,1)}=\left[\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\right]_{(1,-2,1)}=\frac{2}{r}\Big|_{(1,-2,1)}=\frac{2}{3}.$$

［典型错误］ 一些考生将答案错误地写成$\frac{8}{27}i+\frac{5}{27}j+\frac{5}{27}k$，把 $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\ r)$错误地按$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)i+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)j+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)k$ 来计算．没有弄清散度 $\mathrm{div}\,f$ 是数量还是向量.

例 5.11 二元函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$存在，是 $f(x,y)$在该点连续的

(A) 充分条件而非必要条件.　　(B) 必要条件而非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分条件又非必要条件.

［答案］ (D).

［提示］ 本题考查二元函数连续、偏导数存在等之间的关系．在可导、可微、连续等基本概念及其相互关系上，多元函数与一元函数有着根本的区别，只有清楚地理解它们之间的相互关系，才能正确选项.

［解］ 二元函数在某点的连续与偏导数存在之间没有必然的联系，例如

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\ g(x,y)=\begin{cases}1, & xy=0,\\ 0, & xy\neq 0.\end{cases}$$

因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，所以$f(x,y)$在$(0,0)$点连续，但是由于

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

不存在，即知偏导数$f'_x(0,0)$不存在.

而$g(x)$恰恰相反，$g(x,y)$在$(0,0)$点显然不连续，但是两个偏导数都是0，即存在.

由此可知(A)、(B)、(C)都可排除，应选(D).

[典型错误] 有的考生受一元函数中“可导必连续，而连续未必可导”的影响，照搬一元函数的结论，而错误地选择了(A).

例 5.12 考虑二元函数$f(x,y)$的下面4条性质：

① $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续.

② $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处两个偏导数连续.

③ $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微.

④ $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在.

若用“$P\Rightarrow Q$”表示可由性质P推出性质Q，则有

(A) ②⇒③⇒①.　　　　(B) ③⇒②⇒①.

(C) ③⇒④⇒①.　　　　(D) ③⇒①⇒④.

[答案] (A).

[提示] 本题考查的是对下面关系的认知：

$$②\Rightarrow③\begin{matrix}\nearrow ①\\ \searrow ④.\end{matrix}$$

[解] 根据二元函数的连续、偏导数存在、可微、偏导数连续之间的关系，由于“偏导数连续必可微”，而“可微必连续”，故选择(A).

[典型错误] 有的考生选择了(C)，错误地认为既然③可以推出④，而③又可推出①，那么应该是③⇒④⇒①，还有的考生认为偏导数存在函数必连续，从而有④⇒①，错误地将一元的情况搬到二元中来.

例 5.13 二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$在点$(0,0)$处

(A) 连续，偏导数存在.　　　　(B) 连续，偏导数不存在.

(C) 不连续，偏导数存在.　　　(D) 不连续，偏导数不存在.

[答案] (C).

[提示] 用定义计算$f(x,y)$在点$(0,0)$处的偏导数，举例说明$f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续.

[解] 由$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，知$f_x(0,0)=0$. 同理$f_y(0,0)=0$，故$f(x,y)$在点$(0,0)$处偏导数存在. 又当$(x,y)$沿$y=kx$趋向$(0,0)$点时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+(kx)^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

k取不同值，该极限值也不同，所以极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在，即$f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续.

例 5.14 设有三元方程$xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点$(0,1,1)$的一个邻域，在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z=z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$y=y(x,z)$和$z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$y=y(x,z)$.

[答案] (D).

[提示] 本题考查对隐函数存在定理的条件与结论的理解. 从分析隐函数存在定理的条件着手.

[解] 令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1=0$, 则有

$$F_z\Big|_{(0,1,1)}=(-\ln y+xe^{xz})\Big|_{(0,1,1)}=0,$$

$$F_y\Big|_{(0,1,1)}=\left(x-\frac{z}{y}\right)\Big|_{(0,1,1)}=-1\neq 0,$$

$$F_x\Big|_{(0,1,1)}=(y+ze^{xz})\Big|_{(0,1,1)}=2\neq 0.$$

由隐函数存在定理可知, 题设方程可确定具有连续偏导数的函数 $x=x(y,z)$及 $y=y(x,z)$. 故选(D).

[典型错误] 有的考生习惯于把 x、y 作为自变量, z 作为因变量, 还认为方程只能确定一个隐函数, 而错误地选择(A). 其实由 $F_z(0,1,1)=0$, 即可排除(A)、(B)、(C).

例 5.15 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$. 则点 P 的坐标是

(A) $(1,-1,2)$. (B) $(-1,1,2)$. (C) $(1,1,2)$. (D) $(-1,-1,2)$.

[答案] (C).

[提示] 本题考查曲面切平面的求法以及两个平面平行的充要条件.

[解] 设切点是(x_0,y_0,z_0), 则切平面的法向量是$(2x_0,2y_0,1)$, 它与平面 $2x+2y+z-1=0$ 的法向量平行, 故有 $\dfrac{2x_0}{2}=\dfrac{2y_0}{2}=\dfrac{1}{1}$. 由此解得 $x_0=1$, $y_0=1$, $z_0=4-x_0^2-y_0^2=2$. 故选(C).

例 5.16 在曲线 $x=t$, $y=-t^2$, $z=t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线

(A) 只有 1 条. (B) 只有 2 条. (C) 至少有 3 条. (D) 不存在.

[答案] (B).

[提示] 本题考查空间曲线切线方向向量的求法, 以及直线与平面平行的充要条件, 故需先求出切线的方向向量, 并且此方向向量与平面的法向量的数量积为 0.

[解] 对应于 t_0 处曲线切线的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1,-2t_0,3t_0^2)$, 平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$, 依题意有 $\boldsymbol{\tau}\perp\boldsymbol{n}$, 从而$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}=0$. 即有

$$1-4t_0+3t^2=0,$$

解之 $t_0=1$ 或 $t_0=\dfrac{1}{3}$. 因而满足题意的切线有 2 条, 故选(B).

[典型错误] 有的考生错误地把切线与平面平行的条件看作$\dfrac{1}{1}=\dfrac{-2t_0}{2}=\dfrac{3t_0^2}{1}$. 解出 $t_0=-1$ 或 $t_0=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 而选择了(C).

例 5.17 设函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$附近有定义, 且 $f'_x(0,0)=3$, $f'_y(0,0)=1$, 则

(A) $dz\Big|_{(0,0)}=3dx+dy$.

(B) 曲面 $z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的法向量为$\{3,1,1\}$.

(C) 曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{1,0,3\}$.

(D) 曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{3,0,1\}$.

[答案] (C).

[提示] 可用简单计算及排除法, 得出正确选项.

[解] 函数 $z=f(x,y)$在点 $M_0(x_0,y_0)$存在偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}$, 并不能保证 $z=f(x,y)$在点 M_0 处可微分, 因此(A)项被排除.

曲面 $z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$处的法向量若存在, 应是 $\boldsymbol{n}=\pm\{f_x(0,0),f_y(0,0),-1\}=\pm(3,1,$

$-1)$，因此排除(B).

由一元函数知识可知，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 必存在切线，且切线斜率为 $f'(x_0)$，切线方向为 $(1,f'(x_0))$. 因此若 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 存在偏导数(不一定连续)，则曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases}$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的切线向量为 $(1,0,f'_x(x_0,y_0))$，可知选项(C)正确，从而也就排除了(D).

[典型错误] 有的考生选择了(A)，其理由是应用了全微分计算公式 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$. 其实，能应用此公式的前提是函数可微. 函数在某一点可微，其偏导数必然存在；但反之，偏导数存在并不一定能保证函数可微. 这些考生正是忽略了这一点.

例 5.18 已知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

(A) 点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点.　　(B) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极小值点.　　(D) 根据所给条件无法判断(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

[答案] (A).

[提示] 本题是考查学生能力的综合题，要用二元函数极值的定义考查(0,0)点是否为极值点，为此需根据题设极限，找到 $f(x,y)$ 在(0,0)点邻域内与已知函数及无穷小的联系.

[解] 由极限和无穷小的关系，在点(0,0)的充分小的邻域内有

$$\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+\alpha,\ \text{其中}\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\alpha=0.$$

于是

$$f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2+\alpha(x^2+y^2)^2,$$

从而在此邻域内，在 $xy>0$ 处 $f(x,y)>0$；在 $xy<0$ 处必存在如点 $(x,-x)$，使 $f(x,y)<0$，可见 $f(0,0)$ 不是极值，故选(A).

[典型错误] 错选(B)、(C)、(D)的都有，表示学生不知所措，不知从何下手，原因是对二元函数的极限知之不多.

例 5.19 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\,\mathrm{d}t$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有

(A) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$.　　(B) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$.　　(C) $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$.　　(D) $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$.

[答案] (B).

[提示] 分别计算 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$，验证即得.

[解] $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$.

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

由此可知 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$，故选(B).

[典型错误] 选择(A)、(C)或(D)者，都是由计算错误所导致.

例 5.20 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,$

$y)=0$ 下的一个极值点. 下列选项正确的是

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.　　(B) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.　　(D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

[答案] (D).

[提示] 由条件可知, 由方程 $\varphi(x,y)=0$ 的确定函数 $y=y(x)$, 因而 $f(x,y)=f[x,y(x)]$, 其极值是一元函数的极值问题, 因而 $[f(x,y(x))]_x'=0$. 这是解决本题的切入点. 本题考查条件极值的概念, 可微函数取得极值的必要条件、以及隐函数的微分法. 另外本题也可用拉格朗日乘数法讨论.

[解法 1] 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\varphi(x,y)=0$ 确定的函数, 因而 $y_0=y(x_0)$, $f(x,y)=f[x,y(x)]$, $x=x_0$ 是它的极值点. 于是

$$[f(x,y(x))]_x'\Big|_{x=x_0}=f_x'(x_0,y_0)+f_y'(x_0,y_0)\cdot\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}=0.$$

而 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x'(x,y)}{\varphi_y'(x,y)}$, 于是上式变为

$$f_x'(x_0,y_0)-f_y'(x_0,y_0)\cdot\frac{\varphi_x'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}=0.$$

若 $f_x'(x_0,y_0)=0$ 时, 则 $f_y'(x_0,y_0)=0$ 或 $\varphi_x'(x_0,y_0)=0$. 并不能肯定只有 $f_y'(x_0,y_0)=0$ 或只有 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$, 这就排除了(A)、(B)选项.

若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 要使上式成立. 必须 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$. 这就排除了(C)项. 而选择(D).

[解法 2] 用拉格朗日乘数法, 设

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

由于 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点. 故

$$L_x(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x'(x_0,y_0)=0 \tag{1}$$

$$L_y(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y'(x_0,y_0)=0 \tag{2}$$

若 $f_x'(x_0,y_0)=0$. 当 $\lambda=0$ 时, 由(2)知 $f_y'(x_0,y_0)=0$; 但 $\lambda\neq 0$ 时, 由(2)及 $\varphi_y'(x_0,y_0)\neq 0$. 可知 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$. 这就排除掉了选项(A)与(B).

若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$, 则由(1)式知 $\lambda\neq 0$, 于是若(2)式成立. 必须 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$, 因而选(D).

说明: 以上两种解法本质上相同. 事实上在拉格朗日函数 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 中的 λ 就是 $-\frac{f_y'(x_0,y_0)}{\varphi_y'(x_0,y_0)}$.

[典型错误] 有的考生把条件极值与无条件极值的结论搞混淆, 认为既然 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点取得极值. 就应有 $f_x'(x_0,y_0)=0$、$f_y'(x_0,y_0)=0$, 故选择了(A), 其实这是无条件极值的必要条件.

例 5.21 设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$, 其中函数 $f(t)$ 二阶可导. $g(u,v)$ 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

[提示] 本题考查多元复合函数偏导数的求法, 重要的是要分清函数是如何复合的.

[解] $\frac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_1'+yg_2'$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''+xg_{12}''+g_2'+xyg_{22}''.$$

其中 $g_1'=g_x'(x,xy)$, $g_2'=g_{xy}'(x,xy)$.

[典型错误] 函数 $f(2x-y)$ 的中间变量是 1 个, 所以对中间变量求一阶导数、二阶导数的记号应是 f', f'', 有的考生对二元函数 $f(2x-y)$ 的复合情形不清晰, 出现了 f_x', f_{xy}' 之类的错误记号.

例 5.22 设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

[提示] 这是一道求包含抽象函数的二阶偏导数的题目. 可用复合函数微分法求解.

[解] $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}f_{12}''\right)-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}f_{22}''\right)-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

$$=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''.$$

[典型错误] 求二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$出现漏项. 或不知如何计算. 有的考生将$\frac{\partial}{\partial x}g\left(\frac{y}{x}\right)$写成$g_x'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$, g'应是对中间变量$\frac{y}{x}$整体求导, 而不是对 x 求导.

例 5.23 设函数 $z=f(x,y)$在点$(1,1)$处可微, 且 $f(1,1)=1$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$, $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$, 求$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

[提示] 注意本题特点, f是二元函数, φ是由f确定的一元函数, 所要求的是导数在 $x=1$ 处的值, 本题考查多元复合函数求导数. 关键是正确求出$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$.

[解] $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=\left.\left[3\varphi^2(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right]\right|_{x=1}$$

$$=3\varphi^2(x)\left[f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))(f_1'(x,x)+f_2'(x,x))\right]\Big|_{x=1}$$

$$=3\cdot1\cdot[2+3(2+3)]=51.$$

[典型错误] 有的考生对 $\varphi(x)$的复合关系弄不清, 或者将 $\varphi'(x)$做成 $\varphi'(x)=f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))$, 少复合一次.

例 5.24 设变换$\begin{cases}u=x-2y\\v=x+ay\end{cases}$, 可把方程

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 求常数 a.

[提示] 此题应理解为 $z=z(u,v)$, $u=x-2y$, $v=x+ay$. 且 $z(u,v)$的二阶偏导数连续, 即有$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$, 用复合函数微分法正确求出$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. 再依题设结论可求出 a. 本题也可以将 z 视为以 x, y 为中间变量的 u, v 的二元复合函数, 利用复合函数微分法求解.

[解法 1] $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

将上述结果代入原方程, 经整理后得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

依题意 a 应满足

$$6+a-a^2=0 \quad 且 \quad 10+5a\neq0,$$

解之得 $a=3$.

[解法 2] 将 z 视为以 x, y 为中间变量的 u, v 的二元复合函数. 由题设可解得

$$x=\frac{au+2v}{a+2}, \quad y=\frac{-u+v}{a+2}.$$

从而 $$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{a}{a+2},\ \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{a}{a+2},\ \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{1}{a+2},\ \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{a+2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{a}{a+2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{a+2}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{a}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{1}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{2a}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{a-2}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

依题意 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，即 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

代入前式，得 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{2a-6}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{a-3}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

令$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$. 得 $a-3=0$，$a+2\neq0$，故 $a=3$.

［典型错误］ 有的考生将$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$代入$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$中，然后代入原方程中，得

$$(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0，即\quad 6+a-a^2=0.$$

推出 $a=3$ 或 $a=-2$. 实际上 $a=-2$ 时$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\neq0$. 这种做法的错误原因在于互换了题中因果关系.

例 5.25 设 $y=y(x)$，$z=z(x)$是由方程 $z=xf(x+y)$和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

［提示］ 本题考查由方程组所确定的隐函数的求导方法. 在本题中，y 和 z 均是 x 的一元函数. 可在两个方程两边对 x 求导，然后解关于$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$的方程组，即可同时求出$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$及$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

［解］ 分别在 $z=xf(x+y)$和 $F(x,y,z)=0$ 的两端对 x 求导，得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+x\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f', \\ F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases}-xf'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+xf', \\ F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-F_x.\end{cases}$$

由此解得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{(f+xf')F_y-xf'F_x}{F_y+xf'F_z}\quad(F_y+xf'F_z\neq0).$$

［典型错误］ 有些考生把 $z=xf(x+y)$中的 $f(x+y)$误认为是二元函数，错误地得出$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(x+y)+x\left(f'_x\cdot1+f'_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$. 求由方程组所确定的隐函数导数时，必须分清谁是自变量，方程组确定了几个几元函数，这一点很重要.

例 5.26 设直线 l：$\begin{cases}x+y+b=0, \\ x+ay-z-3=0\end{cases}$在平面 π 上，而平面 π 与曲面：$z=x^2+y^2$ 相切于点$(1,-2.5)$，求 a、b 之值.

［提示］ 利用多元微分法求出平面 π 的方程. 由于直线 l 在 π 上，故将 l 的方程代入 π 的方程中，便可求出 a、b 的值. 由于 l 是两个平面的交线，因此本题也可从经过直线 l 的平面方程来入手求解.

[解法 1]　在点$(1,-2,5)$处曲面的法向量 $n=\{2,-4,-1\}$，故切平面即平面 π 的方程为

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0,$$

即

$$2x-4y-z-5=0. \qquad (*)$$

再由 l：$\begin{cases}x+y+b=0,\\ x+ay-z-3=0\end{cases}$ 可得 $y=-(x+b)$，$z=x-a(x+b)-3$.

代入$(*)$，得 $2x+4(x+b)-x+a(x+b)+3-5=0$，因而有

$$5+a=0,\quad 4b+ab-2=0.$$

由此解得　$a=-5$，$b=-2$.

[解法 2]　过 l 的平面方程设为 $x+ay-z-3+\lambda(x+y+b)=0$，即 $(1+\lambda)x+(a+\lambda)y-z-3+\lambda b=0$. 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点$(1,-2,5)$处的法向量 $n=\{2,-4,-1\}$，故由题设知

$$\frac{1+\lambda}{2}=\frac{a+\lambda}{-4}=\frac{-1}{-1}.$$

解得　　$\lambda=1$，$a=-5$.

又点$(1,-2,5)$在平面 π 上，故　$(1+\lambda)-2(a+\lambda)-8+\lambda b=0$.

将 $\lambda=1$，$a=-5$ 代入，解得 $b=-2$.

例 5.27　设 n 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$处指向外侧的法向量，求函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在点$P$ 处沿方向 n 的方向导数.

[提示]　先求出函数 u 在点P 处的各个偏导数，以及曲面在点 P 处指向外侧的法向量的方向余弦，然后代入方向导数计算公式.

[解]　由 $n=4i+6j+2k$ 知，该方向的方向余弦

$$\cos(\widehat{n,i})=\frac{4}{\sqrt{4^2+6^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos(\widehat{n,j})=\frac{6}{\sqrt{4^2+6^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}},$$

$$\cos(\widehat{n,k})=\frac{2}{\sqrt{4^2+6^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}},\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14}.$$

从而

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=\left.\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\widehat{n,i})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\widehat{n,j})+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(\widehat{n,k})\right]\right|_P$$

$$=\frac{6}{\sqrt{14}}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{8}{\sqrt{14}}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}-\sqrt{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}.$$

例 5.28　确定常数 λ，使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $A(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda i-x^2(x^4+y^2)^\lambda j$ 为某二元函数$u(x,y)$的梯度，并求 $u(x,y)$.

[提示]　平面单连通区域内向量场 $A(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j$ 为梯度的充要条件是$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$. 由此可定出 λ. 在此基础上，由与路径无关的曲线积分 $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ 求出 $u(x,y)$.

[解]　令 $P=2xy(x^4+y^2)^\lambda$，$Q=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$. $A(x,y)$在右半平面 $x>0$ 上为某二元函数 $u(x,y)$的梯度的充要条件是$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，此即

$$4x(x^4+y^2)^\lambda(\lambda+1)=0,\ \text{解之得}\ \lambda=-1.$$

于是，在右半平面内任取一点，例如$(1,0)$作为积分路径的起点，则得

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy\,dx-x^2\,dy}{x^4+y^2}=\int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+0^2}dx-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}dy$$

$$= -\arctan\frac{y}{x^2}$$

[典型错误] 一些考生不知道梯度是什么，或不知道如何判别一个向量场是梯度场，或不了解曲线积分与路径无关的等价命题．从而无从下手．

例 5.29 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$为区域 D 上一点，问 $h(x,y)$在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$的表达式．

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点．也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$达到最大值的点．试确定攀登起点的位置．

[提示] 本题考查梯度的概念，方向导数与梯度的关系，用拉格朗日乘数法求条件极值的方法．

[解] (1) 由梯度的几何意义知，$h(x,y)$在点 $M(x_0,y_0)$处沿梯度

$$\operatorname{grad} h(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}=(y_0-2x_0)\boldsymbol{i}+(x_0-2y_0)\boldsymbol{j}$$

方向的方向导数最大．方向导数的最大值为该梯度的模，所以

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}.$$

(2) 令 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$.

由题意，只需求 $f(x,y)$在约束条件 $75-x^2-y^2+xy=0$ 下的最大值点．

令 $L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy)$，则

$$\begin{cases} L'_x=10x-8y+\lambda(y-2x)=0, & ① \\ L'_y=10y-8x+\lambda(x-2y)=0, & ② \\ L'_\lambda=75-x^2-y^2+xy=0. & ③ \end{cases}$$

①式与②式相加可得$(x+y)(2-\lambda)=0$，从而得 $y=-x$ 或 $\lambda=2$.

若 $\lambda=2$，则由①式得 $y=x$，再由③式得 $x=\pm5\sqrt{3}$，$y=\pm5\sqrt{3}$.

若 $y=-x$，则由③式得 $x=\pm5$，$y=\mp5$.

于是得到 4 个可能的极值点

$$M_1(5,-5)，M_2(-5,5)，M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3})，M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}).$$

由于 $f(M_1)=f(M_2)=450$，$f(M_3)=f(M_4)=150$.

故 $M_1(5,-5)$或 $M_2(-5,5)$可作为攀登的起点．

[典型错误] 不知道 $\left|\operatorname{grad} h\right|_M$ 就是要求的方向导数的最大值，所以无从下手．不会求条件极值．求条件极值时，方程解错，也有的考生去求 D 的边界线的法向量的模的最大值．

例 5.30 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短．

[提示] 这是一道满足一定的约束条件的多元函数的极值问题，一般用拉格朗日乘数法来求．关键是要写出点到直线的距离公式．本题还有其他的一些解法，如求出椭圆的平行于直线 $2x+3y-6=0$ 的切线及其切点；也可以将问题转化为一元函数极值问题．

[解法 1] 设$P(x,y)$为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上任意一点，则 P 到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$．求 d 的最小值点即求d^2 的最小值点．作

$$F(x,y,\lambda)=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4),$$

由 Lagrange 乘数法，令

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0,$$

得方程组

$$\begin{cases}\frac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0,\\ \frac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y=0,\\ x^2+4y^2-4=0.\end{cases}$$

解此方程组，得

$$x_1=\frac{8}{5},\ y_1=\frac{3}{5};\quad x_2=-\frac{8}{5},\ y_2=-\frac{3}{5}.$$

于是

$$d\Big|_{(x_1,y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}},\quad d\Big|_{(x_2,y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}}.$$

由问题的实际意义最短距离存在，因此$\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$即为所求点.

［解法 2］ 椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上任一点 $P(x,y)$处切线斜率 $y'=-\frac{x}{4y}$. 平行于直线 $2x+3y-6=0$ 的切线斜率应满足 $-\frac{x}{4y}=-\frac{2}{3}$，即 $3x=8y$.

由

$$\begin{cases}x^2+4y^2=4\\ 3x=8y\end{cases}$$

解得

$$x_1=\frac{8}{5},\ y_1=\frac{3}{5}\quad 和\quad x_2=-\frac{8}{5},\ y_2=-\frac{3}{5}.$$

$$\mathrm{d}\Big|_{(x_1,y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}},\ \mathrm{d}\Big|_{(x_2,y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}}.$$

故点$\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$为所求.

［解法 3］ 椭圆的参数方程为 $x=2\cos\varphi$，$y=\sin\varphi$，将其代入解法 1 的距离公式中，得

$$\begin{aligned}d&=\frac{1}{\sqrt{13}}|4\cos\varphi+3\sin\varphi-6|\\&=\frac{1}{\sqrt{13}}|5\sin(\varphi+\theta)-6|.\end{aligned}$$

其中θ满足 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$.

当 $\sin(\varphi+\theta)=1$ 时，d 达到最小值，而此时 $x=2\cos\varphi=2\sin\theta=\frac{8}{5}$，$y=\sin\varphi=\cos\theta=\frac{3}{5}$.

即 点$\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$为所求之点.

［典型错误］ 主要有三种：不会写点到直线的距离；写错 $F(x,y,\lambda)$；不会判定(或未判定)哪一点是所求的点.

例 5.31 设 $z=z(x,y)$是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数. 求 $z=z(x,y)$的极值点和极值.

［提示］ 本题考查的知识点包含多元函数无条件的极值的求法和隐函数的二阶偏导数的求法.

［解］ 在方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两边分别对 x 和 y 求偏导数，并注意到 $z=z(x,y)$是 x，y 的二元函数. 有

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0\quad 和\quad -6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

令 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-3y=0,\\ -3x+10y-z=0.\end{cases}$ 故 $\begin{cases}x=3y,\\ z=y.\end{cases}$

将上式代入 $x^2-6xy+10y^3-2yz-z^2+18=0$，可得

$$\begin{cases}x=9,\\y=3,\\z=3\end{cases}\quad 或 \quad\begin{cases}x=-9,\\y=-3,\\z=-3.\end{cases}$$

由于

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

所以

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6},\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2},\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3},$$

故 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，又 $A=\frac{1}{6}>0$，所以点(9,3)是 $z(x,y)$的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$.

类似地，由

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3},$$

可知 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，又 $A=-\frac{1}{6}<0$，从而点(-9，-3)是 $z(x,y)$的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

［典型错误］ 有的考生由$\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 及 $x^2-6xy+10y^2-2yz-y^2+18=0$ 解出两组解

$$\begin{cases}x=9,\\y=3,\\z=3\end{cases}\quad 及 \quad\begin{cases}x=-9,\\y=-3,\\z=-3.\end{cases}$$

便断言(9,3)为极大值点，$z=3$ 为极大值；(-9，-3)为极小值点，$z=-3$ 为极小值. 显然是混淆了最大最小值与极大极小值的概念，不理解极值只是函数的局部性态，极大值有可能会小于极小值. 本题就是一个例子. 还有的考生在求二阶偏导数时，出现了计算错误，花费了很多时间，反映了一些学生对基本训练不够重视.

例 5.32 已知函数 $z=f(x,y)$的全微分 $dz=2xdx-2ydy$，并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$上的最大值和最小值.

［提示］ 这是一道考查全微分与多元函数最大最小值求法的综合题，首先要求出 $f(x,y)$的具体表达式.

［解法 1］ 由 $dz=2xdx-2ydy$ 可知

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+C.$$

再由 $f(1,1)=2$，得 $C=2$，故

$$z=f(x,y)=x^2-y^2+2.$$

令$\frac{\partial f}{\partial x}=2x=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=-2y=0$，解得驻点(0,0).

在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上，$z=x^2-(4-4x^2)+2$，即

$$z=5x^2-2\quad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

其最大值为 $z\Big|_{x=\pm 1}=3$，最小值为 $z\Big|_{x=0}=-2$. 再与 $f(0,0)=2$ 比较，可知 $f(x,y)$在椭圆域 D 上的最大值为 3，最小值为 -2.

［解法 2］ 同解法 1，得驻点(0,0).

用拉格朗日乘数法求此函数在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的极值.

设 $L=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$，令

$$\begin{cases}L_x'=2x+2\lambda x=0,\\ L_y'=-2y+\frac{\lambda}{2}y=0,\\ L_\lambda'=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0,\end{cases}$$

解得 4 个可能的极值点(0,2)，(0,－2)，(1,0)和(－1,0).

又 $f(0,2)=-2$，$f(0,-2)=-2$，$f(1,0)=3$，$f(-1,0)=3$．再与 $f(0,0)=2$ 比较，得 $f(x,y)$在 D 上的最大值为 3，最小值为－2.

[典型错误] 不能由题设条件正确写出 $f(x,y)$的表达式，从而无法往下求解.

六、多元函数积分学

·考试内容与要求·

数学(一)

考试内容

二重积分与三重积分的概念、性质、计算和应用　两类曲线积分的概念、性质及计算　两类曲线积分的关系　格林(Green)公式　平面曲线积分与路径无关的条件　二元函数全微分的原函数　两类曲面积分的概念、性质及计算　两类曲面积分的关系　高斯(Gauss)公式　斯托克斯(Stokes)公式　散度、旋度的概念及计算　曲线积分和曲面积分的应用

考试要求

1．理解二重积分、三重积分的概念，了解重积分的性质，了解二重积分的中值定理.

2．掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标)，会计算三重积分(直角坐标、柱面坐标、球面坐标).

3．理解两类曲线积分的概念，了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系.

4．掌握计算两类曲线积分的方法.

5．掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件，会求二元函数全微分的原函数.

6．了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系，掌握计算两类曲面积分的方法，会用高斯公式、斯托克斯公式计算曲面、曲线积分.

7．了解散度与旋度的概念，并会计算.

8．会用重积分、曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量(平面图形的面积、体积、曲面面积、弧长、质量、质心、转动惯量、引力、功及流量等).

数学(二)

考试内容

二重积分的概念、基本性质和计算

考试要求

了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分(直角坐标、极坐标)的计算方法.

·考试内容解析·

(一) 二重积分

1．二重积分的概念

(1) 二重积分定义