用拉格朗日乘数法求此函数在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 上的极值.

设 $L=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)$，令

$$\begin{cases}L_x'=2x+2\lambda x=0,\\ L_y'=-2y+\frac{\lambda}{2}y=0,\\ L_\lambda'=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0,\end{cases}$$

解得 4 个可能的极值点(0,2)，(0，-2)，(1,0)和(-1,0).

又 $f(0,2)=-2$，$f(0,-2)=-2$，$f(1,0)=3$，$f(-1,0)=3$. 再与 $f(0,0)=2$ 比较，得 $f(x,y)$在 D 上的最大值为 3，最小值为 -2.

[典型错误] 不能由题设条件正确写出 $f(x,y)$的表达式，从而无法往下求解.

六、多元函数积分学

·考试内容与要求·

数学(一)

考试内容

二重积分与三重积分的概念、性质、计算和应用　两类曲线积分的概念、性质及计算　两类曲线积分的关系　格林(Green)公式　平面曲线积分与路径无关的条件　二元函数全微分的原函数　两类曲面积分的概念、性质及计算　两类曲面积分的关系　高斯(Gauss)公式　斯托克斯(Stokes)公式　散度、旋度的概念及计算　曲线积分和曲面积分的应用

考试要求

1. 理解二重积分、三重积分的概念，了解重积分的性质，了解二重积分的中值定理.
2. 掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标)，会计算三重积分(直角坐标、柱面坐标、球面坐标).
3. 理解两类曲线积分的概念，了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系.
4. 掌握计算两类曲线积分的方法.
5. 掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件，会求二元函数全微分的原函数.
6. 了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系，掌握计算两类曲面积分的方法，会用高斯公式、斯托克斯公式计算曲面、曲线积分.
7. 了解散度与旋度的概念，并会计算.
8. 会用重积分、曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量(平面图形的面积、体积、曲面面积、弧长、质量、质心、转动惯量、引力、功及流量等).

数学(二)

考试内容

二重积分的概念、基本性质和计算

考试要求

了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分(直角坐标、极坐标)的计算方法.

·考试内容解析·

(一) 二重积分

1. 二重积分的概念

(1) 二重积分定义

设 $f(x,y)$是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n,$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积．在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点(ξ_i,η_i)，作乘积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$．如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时，这和的极限总存在(与 $\Delta\sigma_i$ 的分法及(ξ_i,η_i)的取法均无关)，则称此极限值为函数 $f(x,y)$在闭区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta\sigma_i.$$

其中 $f(x,y)$称为被积函数，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 称为被积表达式，$\mathrm{d}\sigma$ 称为面积元素，x 与 y 称为积分变量，D 称为积分区域，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 称为积分和．

(2) 二重积分存在定理

若 $f(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 一定存在．

(3) 二重积分的几何意义

设 $f(x,y)\geqslant 0$，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 表示以 $z=f(x,y)$为顶，以 D 为底．侧面是以 D 的边界曲线为准线、母线平行于 z 轴的柱面的曲顶柱体的体积．

2．二重积分性质

1° $\iint\limits_D [k_1f_1(x,y)+k_2f_2(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma = k_1\iint\limits_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + k_2\iint\limits_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$($k_1,k_2$ 为常数)．

2° 若 $D=D_1\cup D_2$，且 D_1 与 D_2 无公共点，则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

3° $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \sigma$．其中 σ 为区域D 的面积．据此可求平面图形的面积．

4° 若 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，$(x,y)\in D$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,$$

特别地，

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma.$$

5° 设 M 和 m 是 $f(x,y)$在闭区域 D 上最大值和最小值，σ 是D 的面积，则有

$$m\sigma \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma.$$

6° 二重积分的中值定理　设函数 $f(x,y)$在闭区域 D 上连续，σ 是D 的面积，则在 D 上至少存在一点(ξ,η)，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma.$$

3．二重积分的计算法

(1) 利用直角坐标计算二重积分

设区域 D 可以用不等式

$$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

来表示，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

若区域 D 可以用不等式

$$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),\quad c\leqslant y\leqslant d$$

来表示，则
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 利用极坐标计算二重积分

设积分区域 D 可用不等式

$$\varphi_1(\theta)\leqslant r\leqslant\varphi_2(\theta),\quad \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

来表示，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

4．二重积分应用

(1) 曲面面积　设曲面 S 由方程 $z=f(x,y)$ 给出，D 为曲面 S 在 xOy 面上的投影区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则曲面面积

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\sigma.$$

(2) 平面薄片的重心　设平面薄片占有 xOy 平面上的闭区域 D，在点 (x,y) 处面密度为 $\rho(x,y)$，假定 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续，则薄片的重心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma},\qquad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}.$$

特别地，若 $\rho(x,y)=$ 常数，则平面图形的形心坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma,\qquad \bar{y}=\frac{1}{A}\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma,$$

其中 A 为 D 的面积.

(3) 平面薄片的转动惯量　设一薄片占有 xOy 面上闭区域 D，在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$，假定 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续，则薄片对于 x 轴的转动惯量 I_x，对于 y 轴的转动惯量 I_y 以及对于原点的转动惯量 I_o 分别为

$$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,\ I_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma,\ I_o=\iint\limits_D(x^2+y^2)\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

(4) 平面薄片对质点的引力　设有平面薄片占有 xOy 面上闭区域 D，在点 (x,y) 处的面密度为 $\rho(x,y)$，假设 $\rho(x,y)$ 在 D 上连续，则薄片对位于 z 轴上点 $M_0(0,0,a)$ 处单位质量的质点的引力

$$F_x=G\iint\limits_D\frac{x\rho(x,y)}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma,$$

$$F_y=G\iint\limits_D\frac{y\rho(x,y)}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma,$$

$$F_z=-G\iint\limits_D\frac{a\rho(x,y)}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma.$$

(以下数学二不要求)

(二) 三重积分

1．三重积分的概念

(1) 三重积分定义

设 $f(x,y,z)$ 是空间闭区域 Ω 上的有界函数，将 Ω 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta v_1,\ \Delta v_2,\ \cdots,\ \Delta v_n,$$

其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域，也表示它的体积．在每个 Δv_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$．如果当各小闭区域直径中的最大值 λ 趋于零时这和的极限总存在[与 Δv_i 的分法及 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法均无关]，则称此极限值为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分，记作 $\iiint\limits_{D}f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$，即

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i,$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数，$f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 称为被积表达式，$\mathrm{d}v$ 称为体积元素，x、y 与 z 称为积分变量，Ω 称为积分区域，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 称为积分和．

(2) 三重积分存在定理

若 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$ 一定存在．

(3) 三重积分物理意义　设一物体占有 $Oxyz$ 上闭区域 Ω，在点 (x,y,z) 处的体密度为 $\rho(x,y,z)$，假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则物体质量 M 为

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v.$$

2．三重积分性质　二重积分的性质可推广到三重积分，例如中值定理：

假设 $u=f(x,y,z)$ 在空间闭区域 Ω 上连续，V 是 Ω 的体积，则至少存在一点 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$，使得

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=f(\xi,\eta,\zeta)\cdot V.$$

3．三重积分的计算法

(1) 利用直角坐标计算三重积分

若空间闭区域 Ω 表示为 $\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D\}$，其中

$$D=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\},$$

则
$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

若空间闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,\ c_1\leqslant z\leqslant c_2\}$$

其中 D_z 是平行于 xOy 平面、纵坐标为 z 的平面截闭区域 Ω 所得到的一个平面闭区域，则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 利用柱面坐标计算三重积分

若空间区域 Ω 可以用不等式

$$z_1(r,\theta)\leqslant z\leqslant z_2(r,\theta),\ r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$$

来表示，则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint\limits_{\Omega}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\&=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}r\mathrm{d}r\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

(3) 利用球面坐标计算三重积分

若空间闭区域 Ω 表示为 $\{(\rho,\varphi,\theta)\mid\rho_1(\varphi,\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\varphi,\theta),\varphi_1(\theta)\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho.$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2 \mathrm{d}\rho.$$

4. 三重积分的应用

(1) 物体的质心坐标　设物体占有空间域 Ω，在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)$，假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则物体的质心坐标

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v,\quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v,\quad \bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v,$$

其中 $M = \iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v$．特别地 $\rho(x,y,z)=$ 常数，则形心坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{V}\iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}v,\quad \bar{y} = \frac{1}{V}\iiint_{\Omega} y\,\mathrm{d}v,\quad \bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}v,$$

其中 V 为 Ω 体积．

(2) 物体转动惯量　设物体占有空间域 Ω，在点 (x,y,z) 处密度为 $\rho(x,y,z)$，假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则物体关于 x 轴、xOy 平面及原点 O 的转动惯量 I_x、I_{xy} 及 I_o 分别是

$$I_x = \iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v,$$

$$I_{xy} = \iiint_{\Omega} z^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v,$$

$$I_o = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}v.$$

(3) 物体对质点的引力

设物体占有空间域 Ω，在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)$，Ω 外有一质点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，其质量为 m_0，假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则物体对质点的引力为 $\vec{F}=\{F_x,F_y,F_z\}$，其中

$$F_x = \iiint_{\Omega}\frac{km_0\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}},$$

$$F_y = \iiint_{\Omega}\frac{km_0\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}},$$

$$F_z = \iiint_{\Omega}\frac{km_0\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}}.$$

(三) 对弧长的曲线积分

1. 对弧长的曲线积分的概念与性质

(1) 对弧长曲线积分的定义

设 L 为 xOy 面内的一条以 A、B 为端点的光滑(或分段光滑)曲线弧，函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界，在 L 上任意插入 $n-1$ 个点 M_1，M_2，…，M_{n-1} 把 L 分成 n 个小弧段 $\overparen{M_{i-1}M_i}$ $(i=1,2,\cdots,n,M_0=A,M_n=B)$，长度为 Δs_i，又在 $\overparen{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，如果当各小弧段长度的最大值 $\lambda\to 0$ 时，这和的极限总存在[与 ΔS_i 的分法及 (ξ_i,η_i) 的取法均无关]，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分，记作 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$，即

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数，$f(x,y)\mathrm{d}s$ 称为被积表达式，x 与 y 称为积分变量，L 称为积分弧段．

此定义可以类似地推广到积分弧段为空间曲线弧 Γ 的情形，即函数 $f(x,y,z)$ 在曲线弧 Γ 上对弧长的曲线积分

$$\int_{\Gamma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,\Delta S_i .$$

(2) 对弧长的曲线积分的性质

对弧长的曲线积分有类似于重积分的性质，例如

$$\int_L [k_1 f_1(x,y) + k_2 f_2(x,y)]\mathrm{d}s = k_1\int_L f_1(x,y)\mathrm{d}s + k_2\int_L f_2(x,y)\mathrm{d}s \quad (k_1, k_2 \text{ 为常数});$$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s \quad (L = L_1 + L_2).$$

设 $f(x,y)$在 L 上连续，则在 L 上至少存在一点(ξ,η)使得

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = f(\xi,\eta)\cdot S,$$

其中 S 为曲线弧 L 的长度.

2. 对弧长的曲线积分的计算法

设 $f(x,y)$在曲线弧 L 上有定义且连续．L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

若曲线 L 由方程

$$y=\psi(x) \qquad (x_0\leqslant x\leqslant X)$$

给出，则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{X} f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

若曲线 L 由方程

$$r=r(\theta) \quad (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

给出，则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta]\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta .$$

若空间曲线弧 Γ 由参数方程

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出，则 $$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

3. 对弧长曲线积分的应用

(1) 质心坐标　设曲线形物体占有 xOy 平面上弧段 L，在点 $P(x,y)$处的线密度为$\rho(x,y)$，假定$\rho(x,y)$在 L 上连续，则曲线形物体质心坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y)\,\mathrm{d}s, \qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\int_L y\rho(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

其中 $M=\int_L \rho(x,y)\,\mathrm{d}s$. 若 $\rho(x,y)$ = 常数，则形心坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_L x\,\mathrm{d}s, \qquad \bar{y} = \frac{1}{S}\int_L y\,\mathrm{d}s.$$

其中 S 是弧长.

(2) 转动惯量　设曲线形物体占有 xOy 平面上弧段 L，在点 $P(x,y)$处的线密度为$\rho(x,y)$，假定$\rho(x,y)$在 L 上连续，则曲线物体关于 x 轴和原点的转动惯量分别为

$$I_x = \int_L y^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}s, \qquad I_o = \int_L (x^2+y^2)\rho(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

（四）对坐标的曲线积分

1．对坐标的曲线积分的概念与性质

（1）对坐标曲线积分的定义

设 L 为 xOy 面内从点 A 到点 B 的一条有向光滑（或分段光滑）曲线弧，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上有界，在 L 上沿 L 的方向任意插入点列 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，…，$M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ 把 L 分成 n 个有向小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ $(i=1,2,\cdots,n;M_0=A,M_n=B)$，设 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$，点 (ξ_i,η_i) 为 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任意取定的点．如果当各小弧段长度的最大值 $\lambda\to 0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 极限总存在［与曲线的分法及 (ξ_i,η_i) 的取法均无关］，则称此极限值为函数 $P(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 x 的曲线积分，记作 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x$．类似地，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ 总存在［与曲线弧的分法及 (ξ_i,η_i) 的取法均无法］，则称此极限值为函数 $Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 y 的曲线积分，记作 $\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y$，即

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i,$$

其中 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 称为被积函数，L 称为积分弧段．

一般地

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

上述定义可以类似地推广到积分弧段为空间有向曲线弧 Γ 的情形：

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i].$$

（2）对坐标曲线积分的性质

若 $L=L_1+L_2$，则

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{L_1}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{L_2}P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

设 L 是有向曲线弧，$-L$ 是与 L 方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{-L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

2．对坐标曲线积分的计算法

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上连续

（1）若 L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$$

当 t 单调地由 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到 B，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在以 α，β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,\mathrm{d}t.$$

（2）若 L 的方程为 $y=\psi(x)$，当 x 单调地由 a 变到 b 时，点 $M(x,y)$ 从 L 起点 A 沿 L 运动到 B，$\psi(x)$ 在以 a，b 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，则

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \{P[x,\psi(x)] + Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\,dx.$$

若空间曲线弧 Γ 由参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$ 给出，则

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$
$$= \int_\alpha^\beta \{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t) + R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}\,dt,$$

其中 α 对应于 Γ 的起点，β 对应于 Γ 的终点.

3. 两类曲线积分之间的关系

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,ds.$$

其中 $\alpha=\alpha(x,y)$，$\beta=\beta(x,y)$ 为有向曲线弧 L 上点 (x,y) 处的正向切线向量的方向角.

4. 格林公式及其应用

(1) 格林公式　设闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint_L P\,dx + Q\,dy.$$

其中 L 是 D 取正向的边界曲线.

若取 $P=-y$，$Q=x$，则 L 所围成的区域 D 的面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L -y\,dx + x\,dy.$$

(2) 平面上曲线积分与路径无关的条件

设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P\,dx + Q\,dy$ 在 G 内与路径无关(或沿 G 内任意闭曲线的曲线积分为零)的充分必要条件是在 G 内处有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(3) 二元函数的全微分求积

设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数，则 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 在 G 内为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分的充分必要条件是等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 G 内恒成立.

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$
$$= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy.$$

或

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx.$$

5. 对坐标曲线积分的应用

设质点在力

$$F(x,y) = F_x(x,y)i + F_y(x,y)j$$

作用下，沿平面曲线 C 由 A 点移动到 B 点，其中 $F_x(x,y)$，$F_y(x,y)$ 在 C 上连续，则质点在移动过程中 F 所做的功

$$W = \int_C F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy.$$

（五）对面积的曲面积分

1. 对面积的曲面积分的概念与性质

（1）对面积曲面积分的定义

设曲面 Σ 是光滑（或分片光滑）的，函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上有界，把 Σ 任意分成 n 小块 ΔS_i（ΔS_i 同时也代表第 i 小块曲面的面积），设 (ξ_i,η_i,ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$（$i=1,2,\cdots,n$），并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$. 如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda\to0$ 时，该和的极限总存在[与 ΔS_i 的分法及 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法均无关]，则称此极限值为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一类曲面积分，记作 $\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$，即

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数，Σ 称为积分曲面.

（2）对面积的曲面积分的性质　类似于对弧长的曲线积分的性质.

2. 对面积的曲面积分的计算法

设积分曲面 Σ 由方程 $z=z(x,y)$ 给出，Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy}，函数 $z=z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有连续偏导数，被积函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则

$$\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 对面积的曲面积分的应用

设有一分布着质量的曲面 Σ，在点 (x,y,z) 处的面密度为 $\rho(x,y,z)$，假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

其中 $M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$. 特别地 $\rho(x,y,z)=$ 常数，则形心坐标

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}S,\qquad \bar{y}=\frac{1}{S}\iint\limits_{\Sigma}y\,\mathrm{d}S,\qquad \bar{z}=\frac{1}{S}\iint\limits_{\Sigma}z\,\mathrm{d}S.$$

其中 S 为曲面 Σ 的面积.

上述曲面关于 x 轴，xOy 平面，原点的转动惯量分别为

$$I_x=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

$$I_{xy}=\iint\limits_{\Sigma}z^2\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

$$I_0=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

（六）对坐标的曲面积分

1. 对坐标的曲面积分的概念与性质

（1）对坐标曲面积分的定义

设 Σ 为光滑（或分片光滑）的有向曲面，函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上有界，把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i（ΔS_i 又表示第 i 小块小曲面的面积），ΔS_i 在 xOy 平面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$，(ξ_i,η_i,ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一

点，如果当各小块曲面的直径的最大值$\lambda\to0$时，

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

总存在[与曲面的分法及(ξ_i,η_i,ζ_i)的取法均无关]. 则称此极限值为函数 $R(x,y,z)$在有向曲面 Σ 上对坐标 x, y 的曲面积分. 记作 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 即

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy},$$

其中 $R(x,y,z)$称为被积函数，Σ 称为积分曲面.

类似地

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz},$$

$$\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xz}.$$

一般地

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 对坐标曲面积分的性质

类似于对坐标的曲线积分. 例如

若把 Σ 分成Σ_1 和 Σ_2. 则

$$\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

设 Σ 是有向曲面，$-\Sigma$ 是和 Σ 取相反侧的有向曲面. 则

$$\iint\limits_{-\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 对坐标的曲面积分的计算法

设积分曲面 Σ 是由方程 $z=z(x,y)$给出，Σ 在 xOy 平面上投影区域为 Dxy，$z=z(x,y)$在 Dxy 上具有一阶连续偏导数. 被积函数 $R(x,y,z)$在 Σ 上连续. 则

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若曲面 Σ 是由方程 $z=z(x,y)$所给出的曲面上侧，取正号. 反之取负号.

类似地，若曲面 Σ 由 $x=x(y,z)$给出，则

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

若曲面 Σ 是由 $x=x(y,z)$给出的曲面前侧. 取正号，反之取负号. 若曲面 Σ 是由 $y=y(x,z)$给出，则

$$\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint\limits_{D_{xz}}Q(x,y(x,z),z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

若积分曲面 Σ 是由 $y=y(x,z)$所给出曲面右侧. 取正号，反之取负号.

3. 两类曲面之间的关系

$$\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S.$$

其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是有向曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

4. 高斯公式及应用

(1) 高斯公式　设空间闭区域 Ω 是由分片光滑闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是 Ω 的整个边界曲面取外侧.

(2) 取 $P=x$，$Q=y$，$R=z$，则空间区域 Ω 的体积为

$$V=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5. 通量与散度

(1) 通量　设某向量场由

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

给出，其中 P，Q，R 具有一阶连续偏导数，Σ 是场内的一片有向曲面，$\boldsymbol{n}^{\circ}$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处的单位法向量，则 $\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}\mathrm{d}S$ 称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 通过曲面 Σ 向着指定侧的通量.

由定义知 $\iint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(2) 散度　设某向量场由

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

给出，则向量场 $\boldsymbol{A}$ 在场中一点 (x,y,z) 处散度

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

(3) 高斯公式向量形式

$$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oiint_{\Sigma}A_n\mathrm{d}S$$

其中 Σ 是空间闭区域 Ω 的边界曲面，而

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}^{\circ}\cdot\mathrm{d}S=\boldsymbol{i}\cos\alpha\mathrm{d}S+\boldsymbol{j}\cos\beta\mathrm{d}S+\boldsymbol{k}\cos\gamma\mathrm{d}S.$$

$$A_n=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}=P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma.$$

6. 斯托克斯公式

设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有界曲面，Γ 的正向与 Σ 的侧面符合右手规则，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在包含 Σ 在内的空间域内具有一阶连续偏导数，则

$$\oint_{\Gamma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

7. 环流量与旋度

(1) 环流量　向量场

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

沿场内有向闭曲线 Γ 的曲线积分

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

称为向量场 A 沿有向闭曲线 Γ 的环流量.

(2) 向量场的旋度　设有向量场

$$A(x,y,z)=P(x,y,z)i+Q(x,y,z)j+R(x,y,z)k$$

则向量场 $A(x,y,z)$ 在场内一点 (x,y,z) 处旋度

$$\mathrm{rot}\ A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)k.$$

(3) 斯托克斯公式向量形式

$$\oint_\Gamma A\cdot t^\circ \mathrm{d}s=\oint_\Gamma A\cdot \mathrm{d}s=\iint_\Sigma \mathrm{rot}\ A\cdot n^\circ \mathrm{d}s,$$

或

$$\oint_\Gamma A_t \mathrm{d}s=\iint_\Sigma (\mathrm{rot}\ A)_n \mathrm{d}s.$$

其中 n° 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的单位法向量，t° 为 Σ 正向边界曲线 Γ 上点 (x,y,z) 处的单位切向量，$(\mathrm{rot}\ A)_n=A\cdot n^\circ$ 为 rot A 在 Σ 的法向量上投影，$A_t=A\cdot t^\circ$ 为向量 A 在 Γ 切向量上的投影.

·例 题 详 解·

例 6.1　积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值等于________.

[答案]　$\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$.

[提示]　本题考查的知识点是二次积分交换积分次序和计算．因 e^{-y^2} 的原函数不能用初等函数表示，故需交换积分次序．另一种方法是设 $F(x)=\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$．然后用定积分分部积分法计算.

[解法 1]　$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$D=\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 2,0\leqslant x\leqslant 2\}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 2\}.$$

故

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2 \mathrm{e}^{-y^2}y\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{d}\mathrm{e}^{-y^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4}).$$

[解法 2]　令 $F(x)=\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$，$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^2 F(x)\mathrm{d}x$

$$=xF(x)\Big|_0^2-\int_0^2 xF'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4}).$$

[典型错误]　有的考生答 $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4}$．误以为下限代入为 0.

例 6.2　交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^0 \mathrm{d}y\int_2^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x=$______.

[答案]　$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

[提示] 本题考查的知识点是将二次积分转化为二重积分，然后更换次序.

[解] $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x=-\iint\limits_{D}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 $D=\{(x,y)\mid 1-y\leqslant x\leqslant 2,-1\leqslant y\leqslant 0\}=\{(x,y)\mid 1-x\leqslant y\leqslant 0,1\leqslant x\leqslant 2\}$. 故

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=-\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{1-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

[典型错误] (1)有些考生将答案写成$\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{0}f(x,y)\,\mathrm{d}y$. 交换二次积分是常考题. 但本题的新意在于积分$\int_{2}^{1-y}f(x,y)\,\mathrm{d}y$的积分限是从大到小. 将二次积分转化为二重积分时，必须将积分限写成下限≤上限，然后再更换次序. 这些考生没有注意，故答案相差一个符号. (2)部分考生由于过去没有遇到过这种情况，不知如何做，反映了他们学习呆板，不能把学习的知识融会贯通.

例 6.3 设区域 D 为$x^2+y^2\leqslant R^2$，则$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

[答案] $\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$.

[提示] 本题考查的知识点是二重积分在极坐标系下的计算方法.

[解] $$\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\left[\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}\right]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta\int_{0}^{R}r^3\mathrm{d}r$$
$$=4\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_{0}^{R}\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta$$
$$=R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

[典型错误] (1)由于误将极坐标系下的面积元素写成 $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，得到错误答案$\frac{\pi}{4}R^3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$. (2)或是由于考生没有根据积分区域形状，以及被积函数的形式，选择极坐标系计算，而是选择了直角坐标系，或是由于选择了极坐标，但在用倍角公式化简 $\cos^2\theta$，$\sin^2\theta$ 出现计算错误没有得到正确答案.

例 6.4 设 C 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则 $\oint_C(2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s=$ ______.

[答案] $12a$.

[提示] 本题考查对弧长曲线积分的计算方法. 将 C 的方程 $3x^2+4y^2=12$ 代入被积函数，并考虑曲线的对称性及被积函数的奇偶性.

[解] 因曲线 C 是关于 y 轴对称的，$2xy$ 是 x 的奇函数，所以 $\oint_C 2xy\mathrm{d}s=0$. 再将 C 的方程 $3x^2+4y^2=12$ 代入

$$\oint_C(2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s=\oint_C(2xy+12)\,\mathrm{d}s$$
$$=\oint_C 12\mathrm{d}s=12a.$$

[典型错误] 由于部分考生对多元函数积分积分域的对称性以及被积函数的奇偶性弄不明白，在计算$\oint_C 2xy\mathrm{d}s$时，将曲线 C 的方程代入，计算 $\mathrm{d}s$，然后化为定积分计算，但出现计算错误.

例 6.5 设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$. 则曲线积分 $\oint_L(2xy-2y)\,\mathrm{d}x+(x^2-4x)\,\mathrm{d}y$ 的值是______.

[答案] -18π.

[提示] 本题考查的知识点是对坐标曲线积分的计算法和格林公式．一种方法是由于 L 是闭曲线，故可用格林公式，另一种方法是将圆的方程写成参数方程直接计算．

[解法 1] $\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=\iint_D[(2x-4)-(2x-2)]dxdy$,

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 9\}$，于是

$$\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=-\iint_D 2dxdy=-2\cdot\pi\cdot 3^2=-18\pi.$$

[解法 2] 圆周的参数方程为 $x=3\cos t$、$y=3\sin t$、故

$$\begin{aligned}\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy&=\int_0^{2\pi}[(18\cos t\sin t-6\sin t)(-3\sin t)+(9\cos^2 t-12\cos t)(3\cos t)]dt\\&=\int_0^{2\pi}(-54\sin^2 t\cos t+18\sin^2 t+27\cos^3 t-36\cos^2 t)dt\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}18\sin^2 tdt-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}36\cos^2 tdt=-18\pi.\end{aligned}$$

[典型错误] 少数考生答案不正确，可能是没有应用格林公式，而是用参数方程直接计算出现错误．

例 6.6 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L xdy-2ydx$ 的值为______．

[答案] $\frac{3}{2}\pi$.

[提示] 本题是一个基本计算题，主要考查对坐标曲线积分的计算和格林公式．常见的计算方法有，添加曲线后应用格林公式．或者用参数方程直接计算．

[解法 1] 记 L_1 的方程为 $x=0$ (y:$\sqrt{2}$到 0)．L_2 的方程为 $y=0$．(x:0 到$\sqrt{2}$)．$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，由格林公式得

$$\begin{aligned}\int_L xdy-2ydx&=\int_{L+L_1+L_2}xdy-2ydx-\int_{L_1}xdy-2ydx-\int_{L_2}xdy-2ydx\\&=\iint_D 3dxdy-0-0=\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

[解法 2] 记 $\overline{L}$ 的方程为 $x+y=\sqrt{2}$(x:0 到$\sqrt{2}$)，D 是由 L 和 $\overline{L}$ 围成的区域．由格林公式得

$$\begin{aligned}\int_L xdy-2ydx&=\int_{L+\overline{L}}xdy-2ydx-\int_{\overline{L}}xdy-2ydx\\&=\iint_D 3dxdy-\int_0^{\sqrt{2}}[-x-2(\sqrt{2}-x)]dx\\&=3\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)+3=\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

[解法 3] 由于 L 的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t,\\ y=\sqrt{2}\sin t,\end{cases}$ t：0 到$\frac{\pi}{2}$．故

$$\begin{aligned}\int_L xdy-2ydx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2}\cos t\cdot\sqrt{2}\cos t-2\sqrt{2}\sin t(-\sqrt{2}\sin t))dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2 t+4\sin^2 t)dt\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 t)dt=\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

[典型错误] 对于开曲线的对坐标的曲线积分．添加曲线使之成为闭曲线应用格林公式．但必须减去添加曲线上的积分．本题解法 1 中添加曲线积分都为 0．因此有些考生尽管答案正确．但未必考虑到上述情况．

例 6.7 向量场 $A(x,y,z)=xy^2i+ye^zj+x\ln(1+z^2)k$ 在点 $P(1,1,0)$ 处散度 $\mathrm{div}\,A=$______.

[答案] 2.

[提示] 本题考查向量场散度的概念与求法.

[解] 这里 $P(x,y)=xy^2$，$Q(x,y)=ye^z$，$R(x,y)=x\ln(1+z^2)$，于是由公式，$\mathrm{div}\,A(1.1.0)=\left(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\right)\bigg|_{(1,1,0)}=\left(y^2+e^z+\dfrac{2xz}{1+z^2}\right)\bigg|_{(1,1,0)}=2.$

[典型错误] 少数考生概念不清，认为向量场的散度是向量，从而填 $i+j$.

例 6.8 设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)=$______.

[答案] $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

[提示] 本题考查的知识点有数量场梯度概念与计算，向量场的散度与计算、复合函数的偏导数等. 首先求出数量场的梯度 grad u，它是一个向量，然后再求向量场 grad u 的散度，因而结果是数量.

[解] 因为 $u=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$，故 $\mathrm{grad}\,u=\dfrac{\partial u}{\partial x}i+\dfrac{\partial u}{\partial y}j+\dfrac{\partial u}{\partial z}k=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}(xi+yj+zk)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)\\&=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}.\end{aligned}$$

[典型错误] (1)数量场的梯度、向量场的散度及旋度是教学上的薄弱环节，也是学生学习的难点，不少考生概念不清，分不清哪一个是数量，哪一个是向量. (2)少数考生在求 u 的二阶偏导数总是出错.

例 6.9 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

[答案] $(2-\sqrt{2})\pi R^3$.

[提示] 本题考查的知识点有对坐标的曲面积分计算法、高斯公式及三重积分计算法. 先用高斯公式将曲面积分化为三重积分，然后或用截面法(先二重积分后单积分)，或用柱线面(先单积分后二重积分)计算三重积分. 若知道球冠体积和锥体体积，则计算更简单.

[解法 1] 由 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\end{cases}$，解得曲线方程：$\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{R^2}{2},\\ z=\dfrac{R}{\sqrt{2}}.\end{cases}$

$$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+3\iiint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中 Ω_1 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ 所围成，Ω_2 由 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 和 $z=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ 所围成.

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=3\left[\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\\&=3\left[\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\pi z^2\mathrm{d}z+\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z\right]\\&=3\pi\left[\frac{z^3}{3}\bigg|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}+\left(R^2z-\frac{z^3}{3}\right)\bigg|_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}\right]=(2-\sqrt{2})\pi R^3.\end{aligned}$$

[解法 2] $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_{\Omega}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$

$$= 3\iint\limits_{r<\frac{R}{\sqrt{2}}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_r^{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}z$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} r\left(\sqrt{R^2-r^2}-r\right)\mathrm{d}r$$

$$= 3\cdot 2\pi\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} = (2-\sqrt{2})\pi R^3.$$

[解法 3] 同解法 1 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= 3\left[\iiint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]$$

$$= 3\left[\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{2}\cdot\frac{R}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\pi\left(R-\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2\left[3R-\left(R-\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\right]\right]$$

$$= (2-\sqrt{2})\pi R^3.$$

[典型错误] 本题要求考生计算时细心，否则常会出错．如解法 1 中常有考生将截面 $x^2+y^2\leqslant z^2$ 的面积误写成 πz，而把截面 $x^2+y^2\leqslant R^2-z^2$ 的面积误写为 $\pi\sqrt{R^2-z^2}$．解法 2 中利用柱面坐标计算三重积分时将柱面坐标系中体积元素误写为 $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$，计算最后结果时也经常会出错．

例 6.10 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 的第一象限部分，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．　(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．　(D) 0．

[答案] (A)．

[提示] 本题是一道考查函数奇偶性和区域对称性及二重积分概念的选择题．如图所示，连接 OB，考虑区域$\triangle OAB$ 与$\triangle OBC$ 的对称性以及被积函数的奇偶性即可得到正确的选项．

[解] 如图 19 所示，连接 OB，将积分分成区域$\triangle OBC$ 和区域$\triangle OAB$ 上积分之和．由于区域 OAB 关于 y 轴对称，而 xy 是奇函数，$\cos x\cos y$是偶函数．区域$\triangle OBC$ 关于 x 轴对称，xy 是奇函数，$\cos x\sin y$ 是奇函数．故选(A)．

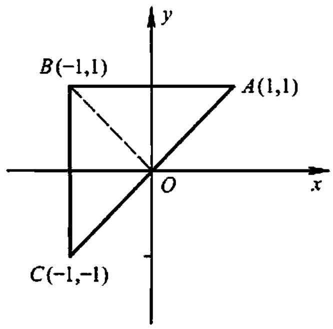

图 19

[典型错误] 部分考生对此类题目心中无数，不知道将问题归结为一元函数奇偶性和对称性去分析，有的只考虑区域的对称性而忽略被积函数的奇偶性选(C)．有的是瞎猜而选(D)．

例 6.11 设 $f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)$等于

(A) $2f(2)$．　(B) $f(2)$．　(C) $-f(2)$．　(D) 0．

[答案] (B)．

[提示] 本题是一道基本运算题，主要考查累次积分交换积分顺序和变限定积分函数的求导知识点．先交换二次积分的积分顺序，再求导．

[解法 1] $F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t\mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t(x-1)f(x)\mathrm{d}x$，

所以 $F'(t)=(t-1)f(t)$，故 $F'(2)=f(2)$．即选项(B)正确．

[解法 2] 本题也可以看成是一个含参变量积分函数的求导问题，利用含参变量积分函数的求导公式直接得

$$F'(t)=\int_t^t f(x)\mathrm{d}x+\int_1^t f(t)\mathrm{d}y=(t-1)f(t),$$

故
$$F'(2)=f(2).$$

[典型错误] 有少数考生选(D)，究其原因是他们只考虑$\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$是y的函数，而没有考虑到它又是t的函数，因而没有交换积分顺序就对t求导.

例 6.12 已知$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$为某函数的全微分，则$a$等于

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) -1.　　(D) 2.

[答案] (D).

[提示] 本题是一道基本概念和运算题，考查的知识点是$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$为某个二元函数全微分的充要条件以及偏导数求法.

[解] 因为$P(x,y)=\dfrac{x+ay}{(x+y)^2}$. $Q(x,y)=\dfrac{y}{(x+y)^2}$，故$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{2y}{(x+y)^3}$，由$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$即可得$a=2$，故选(D).

[典型错误] 由于偏导数计算错误而得不到正确选项.

例 6.13 设S: $x^2+y^2+z^2=a^2$ ($z\geqslant0$)，S_1为S在第一象限中的部分. 则有

(A) $\iint\limits_S x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S$.　(B) $\iint\limits_S y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S$.　(C) $\iint\limits_S z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S$.　(D) $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}xyz\mathrm{d}S$.

[答案] (C).

[提示] 本题也是一道考查对于积分区域的对称性和被积函数奇偶性理解的选择题，载体是对面积的曲面积分. 想方设法归结到一元的对称性和奇偶性，加上排除法，即可得到正确选项.

[解] 因为S是球面的$z\geqslant0$部分. 所以在S上x与y轮换对称. 故(A)与(B)两个选项是一样的. (A)的左边，被积函数是x的奇函数. S又对称于yOz平面. 故$\iint\limits_S x\mathrm{d}S=0$，而右边$\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S>0$，所以(A)、(B)都不对. 又因为$S$是关于$yOz$平面，$xOz$平面都对称. 故$\iint\limits_S z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}z\mathrm{d}S$. 又在$S_1$上，$x$与$z$轮换对称，所以$\iint\limits_{S_1}z\mathrm{d}S=\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S$. 故(C)对.

[典型错误] 本题选(C)和(D)人数几乎相等，误选(D)的原因可能是：认为$\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S$的被积函数$xyz$既是$x$的奇函数，又是$y$的奇函数，就认为$xyz$是偶函数. 事实上对于固定的$y$和$z$，$xyz$为$x$的奇函数，而对于固定的$y$和$z$，区域$S$关于$yOz$平面对称，所以$\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S=0$，而右边$\iint\limits_{S_1}xyz\mathrm{d}S>0$，故(D)不对.

例 6.14 计算二次积分$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2\sin\dfrac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

[提示] 本题考查二次积分交换积分次序及二重积分计算. 由所给二次积分作出D的图形. 将区域D上的二重积分转化为先对x后对y的积分.

[解] $D=\{(x,y)\mid\sqrt{x}\leqslant y\leqslant x,1\leqslant x\leqslant2\}\cup\{(x,y)\mid\sqrt{x}\leqslant y\leqslant2,2\leqslant x\leqslant4\}$

$=\{(x,y)\mid y\leqslant x\leqslant y^2,1\leqslant y\leqslant2\}$,

$$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^x\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 \frac{2y}{\pi}\left(-\cos\frac{\pi x}{2y}\right)\Big|_y^{y^2} dy$$
$$= \int_1^2 \frac{2y}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi y}{2}\right) dy$$
$$= -\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi}{2} y dy = \frac{4}{\pi^3}(2+\pi).$$

[典型错误] (1)二次积分交换次序后积分定限出现错误；(2)少数考生误以为 $\sin u$ 的原函数是 $\cos u + C$，因而答案相差负号.

例 6.15 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}} dxdy$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

[提示] 本题考查的知识点是二重积分的计算. 关键是处理 $\max\{x^2,y^2\}$. 按 $\max\{x^2,y^2\}$ 的要求将 D 划分成两个区域. 从而将二重积分分成两个二重积分的和并计算之.

[解] 设 $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$，

$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 1\}$，

则
$$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}} dxdy = \iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}} dxdy + \iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}} dxdy$$
$$= \iint\limits_{D_1} e^{x^2} dxdy + \iint\limits_{D_2} e^{y^2} dxdy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy + \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx$$
$$= \int_0^1 x e^{x^2} dx + \int_0^1 y e^{y^2} dy$$
$$= e - 1.$$

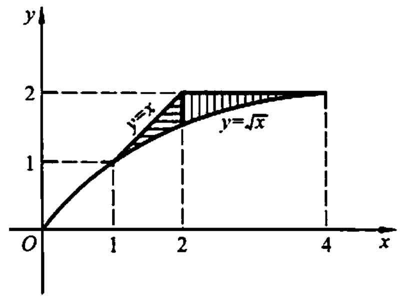

图 20

[典型错误] ①不知道如何处理 $\max\{x^2,y^2\}$. ②知道如何处理 $\max\{x^2,y^2\}$，但却将二重积分分成两块之和错误地做成将该二重积分分别按两种情形计算：

当 $x^2 \geqslant y^2$ 时，
$$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}} dxdy = \iint\limits_D e^{x^2} dxdy$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^1 e^{x^2} dy = \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

无法往下做. 类似地当 $y^2 \geqslant x^2$ 时也无法做下去. 也有的人，做成：

当 $x^2 \geqslant y^2$ 时，$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}} dxdy = \iint\limits_{D_1} e^{x^2} dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy = \frac{1}{2}(e-1)$.

当 $y^2 \geqslant x^2$ 时，$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}} dxdy = \cdots = \frac{1}{2}(e-1)$，也是错误的.

例 6.16 计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

[提示] 本题考查的知识点是二重积分的计算. 关键是处理 $|x^2+y^2-1|$. 按 $|x^2+y^2-1|$ 要求将 D 分成两个区域，然后将二重积分分成两个二重积分之和并计算之.

[解法 1] 设 $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$，

$D_2 = \{(x,y) \mid \sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$，

则
$$\iint\limits_D |x^2+y^2-1| d\sigma = \iint\limits_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint\limits_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma.$$

由于
$$\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\sigma\int_0^1(1-r^2)\,r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8},$$
$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y+\frac{\pi}{8}\\&=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$
故
$$\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}.$$

［解法 2］ 同解法一
$$\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2-y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma.$$
$$\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{8}.$$
$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left[x^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(x^2-\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x+\frac{2}{3}\int_0^1(1-x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$
故
$$\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

［典型错误］ (1)不知道如何处理$|x^2+y^2-1|$；(2)知道如何处理$|x^2+y^2-1|$，但是将二重积分拆成两个区域上的积分和错误地做成二重积分按两种情形在 D 上计算：

当 $x^2+y^2-1>0$ 时 $\displaystyle\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}(x^2-y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2-y^2-1)\,\mathrm{d}y$;

当 $x^2+y^2-1<0$ 时 $\displaystyle\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$.

(3)在求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\,\mathrm{d}x$ 时用倍角公式计算中出现错误.

例 6.17 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant0,y\geqslant0\}$，$[1+x^2+y^2]$表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{D}xy[1+x^2+y^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

［提示］ 本题考查的知识点有函数概念、二重积分性质，以及二重积分在极坐标系下的计算方法. 关键是如何处理$[1+x^2+y^2]$，一种方法是将二重积分转化成极坐标系下的二重积分，$[1+x^2+y^2]=[1+r^2]$，写出$[1+r^2]$在区间$[0,\sqrt[4]{2}]$上具体解析式子. 再积分. 另一种方法是按$[1+x^2+y^2]$要求将 D 分成两个区域，从而二重积分成为两个二重积分之和并计算之.

［解法 1］
$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}xy[1+x^2+y^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\sin\theta\cos\theta[1+r^2]\,\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3[1+r^2]\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 r^3 \mathrm{d}r + \int_1^{\sqrt[4]{2}} 2r^3 \mathrm{d}r\right)$$
$$= \frac{3}{8}.$$

[解法 2] 记
$$D_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\},$$
$$D_2 = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \sqrt{2}, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}.$$
则有
$$[1 + x^2 + y^2] = 1,\ (x,y) \in D_1,$$
$$[1 + x^2 + y^2] = 2,\ (x,y) \in D_2.$$

于是
$$\iint_D xy[1 + x^2 + y^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3 \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}r + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_1^{\sqrt[4]{2}} 2r^3 \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}r$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{8}.$$

[典型错误] (1)多数考生不太熟悉取整函数，因而不知如何处理$[1 + x^2 + y^2]$，表现在将二重积分转化为极坐标系下的二重积分后做不下去，或将被积函数错写成$[1 + x^2 + y^2] = 2$；(2)粗心，误认为$x^2 + y^2 = \sqrt{2}$的半径是$\sqrt{2}$.

例 6.18 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，并设$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = A$，求$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.

[提示] 本题涉及到的知识点有二重积分的性质、交换积分次序、变上限定积分函数、定积分的分部积分法等. 可将二次积分转化为重积分，然后利用二重积分性质，也可以交换积分次序后将x、y互换，还可以利用变上限定积分函数和分部积分法计算.

[解法 1]
$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{x \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x \leqslant 1}} f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\xlongequal{x\text{ 与 }y\text{ 对换}} \iint\limits_{\substack{y \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1}} f(y)f(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1}} f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}A^2.$$

[解法 2] 交换积分次序，然后将x和y互换得
$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x)f(y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y\right]$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2$$
$$= \frac{1}{2}A^2.$$

[解法 3] 记$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则$F(0) = 0, F(1) = A, \mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$.

于是
$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}F(y) = \int_0^1 f(x)[F(1) - F(x)]\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 f(x)\, F(1)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\, F(x)\,\mathrm{d}x \\
&= A\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}F(x) \\
&= A^2 - \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}A^2.
\end{aligned}
$$

[典型错误] 本题用解法 3 较为简单，但是这样解题的考生很少，他们不太习惯用变上限积分函数作为一个函数确定的原函数. 还有些考生没有想到应用轮换对称性，因而在将二次积分转化为二重积分或交换积分次序后止步不前. 有的考生应用了轮换对称性，但是没有想到 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，或 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}y$. 因而没有得到最终结果.

例 6.19 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 上，问当 R 取何值时，球面 Σ 在定球面内部的那部分面积最大.

[提示] 本题是一道综合题. 考查的知识点有曲线在坐标面上投影，曲面面积的求法，二重积分在极坐标系下的计算方法以及一元函数的极值及其求法，关键是求出 Σ 在定球内部的曲面面积. 为使计算简单，将 Σ 的球心设在 $(0,0,a)$.

解 设球面 Σ 的球心为 $(0,0,a)$，则 Σ 的方程为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=R^2,$$

两球面的交线在 xOy 面上的投影曲线 C 为

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2) \\ z=0. \end{cases}$$

设 C 所围平面区域为 D_{xy}（见图 21）. 球面 Σ 在定球面内那部分的方程为

$$z = a-\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

这部分球面的面积为

$$
\begin{aligned}
S(R) &= \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}} \frac{Rr\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2-r^2}} \\
&= 2\pi R^2 - \frac{1}{a}\pi R^3 \quad (0<R<2a).
\end{aligned}
$$

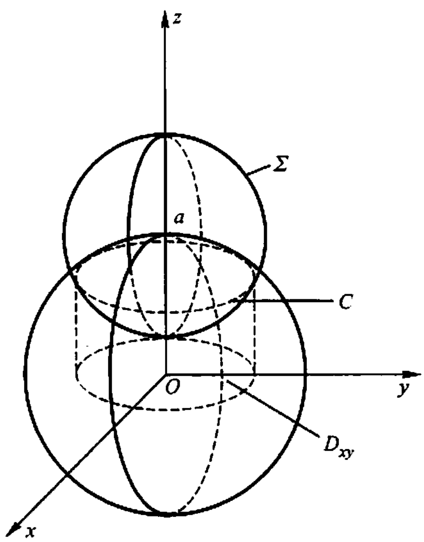

图 21

由 $S'(R) = 4\pi R - \frac{3}{a}\pi R^2 = 0$，得

$$R=0\,(舍去),\quad R=\frac{4}{3}a.$$

而
$$S''\left(\frac{4}{3}a\right) = \left(4\pi-\frac{6}{a}\pi R\right)\bigg|_{R=\frac{4}{3}a} = -4\pi<0.$$

故当 $R=\frac{4}{3}a$ 时，球面 Σ 在定球面内的那部分面积最大.

[典型错误] (1)建立恰当的坐标系或将几何图形置于坐标系中适当位置能使问题简单，而学生常常忽略，不少考生没有将 Σ 的球心置于 $(0,0,a)$，因而使 Σ 方程复杂而做不下去；(2)由于两曲面的交线在 xOy 平面上投影计算错而中途停顿；(3)在求出驻点 $R=\frac{4}{3}a$ 后没有判断是极大值点还是极小值点，又没有其他类

似的说明.

例 6.20　计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

[提示]　本题考查的知识点是三重积分性质以及三重积分的计算方法. 由于 Ω 是由锥面和球面所围成的空间域，故采用球面坐标系可以减少工作量.

[解法 1]　$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v$.

由于 Ω 是关于 yOz 平面对称的，被积函数 x 是奇函数，故 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=0$. 事实上

$$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\sin\varphi\cos\theta\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$=\sin\theta\Big|_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=0.$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8},$$

所以

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v=0+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}.$$

[解法 2]　同解法 1 得

$$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=0.$$

由 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$，$z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_1 是平行于 xOy 平面截锥体的截面：$x^2+y^2\leqslant z^2\left(0\leqslant z\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$；$D_2$ 是平行于 xOy 平面的平面截球体的截面：$x^2+y^2\leqslant 1-z^2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant z\leqslant 1\right)$. 于是

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}z\pi z^2\mathrm{d}z+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 z\pi(1-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\pi\left[\frac{z^4}{4}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right)\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\right]=\frac{1}{8}\pi.$$

[典型错误]　(1)有些考生对球面坐标系下三次积分定限，特别是 φ 的定限不是很清楚. 本题中有的将对 φ 积分的上限误写为 $\dfrac{\pi}{2}$；(2)在解法二中截面面积 D_1 写成 πz.

例 6.21　求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与 $z=4$ 所围成的立体.

[提示]　本题主要考查三重积分的计算方法，同时涉及到旋转曲面的概念. 由于 Ω 是由旋转曲面与平面所围成. 因此采用柱面坐标系，当然既可以用柱线法. 又可用截面法.

[解法 1]　旋转曲面方程为 $x^2+y^2=2z$. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=2z,\\ z=4\end{cases}$ 在 xOy 平面上投影为 $\begin{cases}x^2+y^2=8,\\ z=0.\end{cases}$

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)\,dv=\iint_{r\leqslant\sqrt{8}}d\sigma\int_{\frac{r^2}{2}}^{4}(r^2+z)\,dz$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{8}}r\,dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{4}(r^2+z)\,dz$$
$$=2\pi\int_0^{\sqrt{8}}\left(4r^3+8r-\frac{5}{8}r^5\right)dr$$
$$=\frac{256}{3}\pi.$$

[解法 2]　立体在 z 轴上投影区域为$[0,4]$，平行于 xOy 平面的平面截立体的截面$x^2+y^2\leqslant 2z\quad(0\leqslant z\leqslant 4)$，于是

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)\,dv=\int_0^4 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(r^2+z)\,r\,dr$$
$$=4\pi\int_0^4 z^2\,dz=\frac{256}{3}\pi.$$

[典型错误]　部分考生对三重积分计算方法缺乏训练，空间想象能力较差，基本功不扎实，表现在：

(1) 将积分区域误认为是圆柱体；

(2) 将积分区域错看成是旋转抛物面下侧的那一部分；

(3) 用旋转抛物面方程 $x^2+y^2=2z$ 来替换被积函数，即 $I=\iiint_{\Omega}3z\,dv$，这把三重积分与曲面积分相混淆.

(4) 少数考生丢失体积元素 $dv=r\,dr\,d\theta\,dz$ 中的 r.

例 6.22　设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 的距离的平方成正比(比例常数 $k>0$)，求球体的重心位置.

[提示]　本题考查的知识点是重积分的物理应用——物体的重心坐标．由于重心问题有规范化的解法，因而关键是建立恰当的坐标系.

[解法 1]　记所考虑的球体为 Ω．以 Ω 的球心为原点 O，射线 OP_0 为正向 x 轴，建立直角坐标系，则点 P_0 的坐标为$(R,0,0)$，球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

设 Ω 的重心位置为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，得

$$\bar{y}=0,\bar{z}=0,\bar{x}=\frac{\iiint_{\Omega}xk[(x-R)^2+y^2+z^2]dv}{\iiint_{\Omega}k[(x-R)^2+y^2+z^2]dv}.$$

而

$$\iiint_{\Omega}[(x-R)^2+y^2+z^2]dv=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv+\iiint_{\Omega}R^2dv$$
$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\iiint_{\Omega}x[(x-R)^2+y^2+z^2]dv=-2R\iiint_{\Omega}x^2dv=-\frac{2R}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dv$$
$$=-\frac{16}{3}R\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho=-\frac{8}{15}\pi R^6.$$

故　$\bar{x}=-\dfrac{R}{4}$，因此球体 Ω 的重心位置为$\left(-\dfrac{R}{4},0,0\right)$.

[解法 2]　设所考虑的球体为 Ω，球心为 O'，以定点 P_0 为原点，射线 P_0O'为正 z 轴，建立直角坐标系，则球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=2Rz$.

设 Ω 的重心位置为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，得

$$\bar{x}=0,\quad \bar{y}=0,\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}kz\,(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}k\,(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}.$$

而

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^4\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\,(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^5\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{64}{3}\pi R^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{8}{3}\pi R^6.$$

故 $\bar{z}=\frac{5}{4}R$，因此球体 Ω 重心位置为 $\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$

说明 在解法 1 中利用了对称性，$\iiint\limits_{\Omega}2Rx\,\mathrm{d}v=0$，$\iiint\limits_{\Omega}x^3\mathrm{d}v=\iint\limits_{\Omega}xy^2\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}xz^2\mathrm{d}v=0$.

［典型错误］(1)建立合适坐标系是求解问题的前提，相当一部分考生对此不太重视，不说明如何建立坐标系，就写球面方程；(2)有些考生似乎不太清楚：球体重心是客观存在的，而坐标系是人为的，选取坐标系尽可能使 P_0 的坐标简单，从而使计算简单，他们设 P_0 为(x_0,y_0,z_0)，增加了解题难度；(3)本题用球面坐标计算三重积分比较方便，有的考生采用直角坐标系，因而困难重重，得不到正确结果；(4)采用球面坐标系后，体积元素，积分限，甚至距离的平方都有错误；(5)审题不仔细，误以为是球面的重心坐标.

例 6.23 求八分之一的球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，$x\geqslant0$，$y\geqslant0$，$z\geqslant0$ 的边界曲线的重心，设曲线的线密度 $\rho=1$.

［提示］ 本题考查的知识点是对弧长曲线积分的物理应用——重心.

［解］ 边界曲线如图 22 所示，曲线在 xOy，yOz，zOx 坐标平面内的弧段分别为 L_1、L_2、L_3，则曲线的质量为

$$m=\int_{L_1+L_2+L_3}\mathrm{d}S=3\cdot\frac{2\pi R}{4}=\frac{3}{2}\pi R.$$

设重心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int_{L_1+L_2+L_3}x\mathrm{d}S=\frac{1}{m}\left(\int_{L_1}x\mathrm{d}S+\int_{L_2}x\mathrm{d}S+\int_{L_3}x\mathrm{d}S\right)$$

$$=\frac{1}{m}\left(\int_{L_1}x\mathrm{d}S+0+\int_{L_3}x\mathrm{d}S\right)=\frac{2}{m}\int_{L_1}x\mathrm{d}S$$

$$=\frac{2}{m}\int_0^R\frac{Rx}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2R^2}{m}=\frac{4R}{3\pi}.$$

由对称性知，$\bar{y}=\bar{z}=\bar{x}=\frac{4R}{3\pi}$，即所求重心为$\left(\frac{4R}{3\pi},\frac{4R}{3\pi},\frac{4R}{3\pi}\right)$.

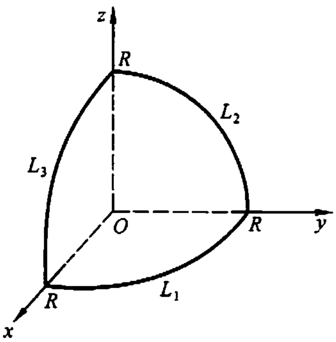

图 22

［典型错误］(1)在计算 $\int_{L_1+L_2+L_3}\mathrm{d}S$ 时，部分考生没有意识到它在数值上等于曲线弧长，因而仍用定积分去求，增加难度，又容易出现计算错误；(2) 利用对称性常常使求解过程简单，但一些考生不习惯用它，他们没有想到$\int_{L_2}x\mathrm{d}x=0,\int_{L_1}x\mathrm{d}S=\int_{L_3}x\mathrm{d}S$，而是分别计算，增大了计算工作量，又容易出错.

例 6.24 求 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\,\mathrm{d}y$，其中 a，b 为正的常数. L 为从点 $A\,(2a,0)$沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$到点 $O\,(0,0)$的弧.

［提示］ 本题是一道对坐标的曲线积分计算题，涉及到的知识点有格林公式，二重积分性质，曲线积分

与路径无关等知识点．直接计算比较困难．一种方法是增加一条有向线段成为闭曲线应用格林公式；另一种方法是将曲线积分分成两部分，其中一部分曲线积分与路径无关，余下的积分利用曲线的参数方程计算．

［解法 1］ 添加从点 $O(0,0)$沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$的有向直线段 L_1，

$$I=\int_{L\cup L_1}(e^x\sin y-b(x+y))\,dx+(e^x\cos y-ax)\,dy$$

$$-\int_{L_1}(e^x\sin y-b(x+y))\,dx+(e^x\cos y-ax)\,dy.$$

由格林公式，前一积分

$$I_1=\iint_D(b-a)\,d\sigma=\frac{\pi}{2}a^2(b-a),$$

其中 D 为 $L\cup L_1$ 所围成的半圆域．直接计算后一积分可得

$$I_2=\int_0^{2a}(-bx)\,dx=-2a^2b.$$

从而 $I=I_1-I_2=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)+2a^2b=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$.

［解法 2］

$$I=\int_L(e^x\sin y-b(x+y))\,dx+(e^x\cos y-ax)\,dy$$

$$=\int_L e^x\sin y\,dx+e^x\cos y\,dy-\int_L b(x+y)\,dx+ax\,dy.$$

前一积分与路径无关，所以

$$\int_L e^x\sin y\,dx+e^x\cos y\,dy=e^x\sin y\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0.$$

对后一积分，取 L 的参数方程：$\begin{cases}x=a+a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$，$t$ 从 0 到 π．得

$$\int_L b(x+y)\,dx+ax\,dy$$

$$=\int_0^{\pi}(-a^2b\sin t-a^2b\sin t\cos t-a^2b\sin^2 t+a^3\cos t+a^3\cos^2 t)\,dt$$

$$=-2a^2b-\frac{1}{2}\pi a^2b+\frac{1}{2}\pi a^3,$$

从而 $I=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$.

［典型错误］ 少数考生或是由于审题不仔细．误以为闭曲线或者由于粗心，没有减去 I_2 上积分，同样由于不够仔细 $I=I_1-I_2=\frac{\pi}{2}a^2(b-a)-2a^2b$.

例 6.25 设函数 $Q(x,y)$在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数．曲线积分

$$\int_L 2xy\,dx+Q(x,y)\,dy$$

与路径无关．并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}[2xy\,dx+Q(x,y)\,dy]=\int_{(0,0)}^{(1,t)}[2xy\,dx+Q(x,y)\,dy],$$

求 $Q(x,y)$.

［提示］ 本题考查的知识点是曲线积分与路径无关的充要条件和对坐标曲线积分的计算．先由曲线积分与路径无关的条件确定 $Q(x,y)$，其中 $Q(x,y)$带有待定函数 $C(y)$．再利用题设等式通过计算曲线积分确定 $C(y)$．

解 由曲线积分与路径无关的条件知

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x.$$

于是，$Q(x,y)=x^2+C(y)$．其中 $C(y)$为待定函数．

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1[t^2+C(y)]\mathrm{d}y=t^2+\int_0^1C(y)\mathrm{d}y,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^t[1^2+C(y)]\mathrm{d}y=t+\int_0^tC(y)\mathrm{d}y.$$

由题设，
$$t^2+\int_0^1C(y)\mathrm{d}y=t+\int_0^tC(y)\mathrm{d}y.$$

两边对 t 求导，得 $2t=1+C(t)$，即 $C(t)=2t-1$，从而 $C(y)=2y-1$，所以 $Q(x,y)=x^2+2y-1$．

［典型错误］ (1)由曲线积分与路径无关条件得到貌似偏微分方程的常微分方程$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$．有的考生得到 $Q(x,y)=x^2$，有的得到 $Q(x,y)=x^2+C$，不知道应该加上 $C(y)$这一项；(2)在求出 $Q(x,y)=x^2+C(y)$后不会计算曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 和$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$；(3)得到等式 $t^2+\int_0^1C(y)\mathrm{d}y=t+\int_0^tC(y)\mathrm{d}y$ 但不会求$C(y)$．

例 6.26 计算曲线积分 $I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点(1,0)为中心，R 为半径的圆周($R>1$)，取逆时针方向．

［提示］ 本题考查的知识点是正确应用格林公式和对坐标曲线积分计算．由于 $R>1$，原点(0,0)包含在 L 内．而原点是被积函数的奇点，因此不满足格林公式条件，可在 L 内作包含原点的椭圆C．然后在由 L 和 C 所围成的复连通域应用格林公式．若知道循环常数概念，则可作椭圆 $4x^2+y^2=1$ 求曲线积分．

［解法 1］
$$P=\frac{-y}{4x^2+y^2},\ Q=\frac{x}{4x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ (x,y)\neq(0,0).$$

作足够小椭圆 C：$\begin{cases}x=\dfrac{\delta}{2}\cos\theta\\ y=\delta\sin\theta\end{cases}$，($\theta\in[0,2\pi]$，$C$ 取逆时针方向)．于是由格林公式有

$$\oint_{L+C^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=0.$$

即得
$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{2}\delta^2}{\delta^2}\mathrm{d}\theta=\pi.$$

［解法 2］ 同解法 1，有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，而(0,0)是奇点，故围绕(0,0)点任何简单闭曲线上的线积分是一常数，取椭圆 C：$4x^2+y^2=1$，于是

$$I=\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_Cx\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_{4x^2+y^2\leqslant1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\pi.$$

［典型错误］ (1)部分考生验算$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，$L$ 又是闭曲线，于是 $I=0$．他们忽略了，若$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则 $\oint_LP\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$ 成立的条件 L 在单连通域内；(2)解题思路正确，但没有仔细观察分母形式．在 L 内作包围原点的闭曲线不是椭圆，而是圆：$\begin{cases}x=\delta\cos t,\\ y=\delta\sin t,\end{cases}$从而得到 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\delta^2\mathrm{d}t}{4\delta^2\cos^2t+\delta^2\sin^2t}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+3\cos^2t}$，计算不下去；(3)按照常规方法，令 L 的参数方程为 $x=1+R\cos t$，$y=R\sin t$．于是 $I=\int_0^{2\pi}\frac{R^2+R\cos t}{4(1+R\cos t)^2+R^2\sin^2t}\mathrm{d}t$，计算复杂，做不

到底.

例 6.27 在变力 $F=yzi+xzj+xyk$ 作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上第一象限的点$M(x,y,z)$,问 x，y，z 为何值时，力 F 所做的功 W 最大？并求出 W 的最大值.

［提示］ 本题是一道综合应用题，涉及到的知识点有直线的参数方程，变力沿曲线做功，对坐标的曲线积分的计算以及条件极值等．首先用曲线积分计算出 F 沿射线$\overrightarrow{OM}$所做的功 W，然后在约束条件下求 W 的极值.

解 设 $M(x,y,z)$为曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上第一卦限上的任一点．则射线段$\overline{OM}$的方程为$X=xt$，$Y=yt$，$Z=zt$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$．因此 F 沿$\overrightarrow{OM}$所做的功为

$$W=\int_{OM}YZ\mathrm{d}X+ZX\mathrm{d}Y+XY\mathrm{d}Z=\int_0^1 3xyzt^2\mathrm{d}t=xyz.$$

令

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

则由

$$\begin{cases} F'_x=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ F'_y=xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ F'_z=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$

得 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}b$，$z=\frac{\sqrt{3}}{3}c$．由问题的实际意义知，点$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b,\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)$即为所求点，且$W_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

［典型错误］ (1)或是因为射线段$\overline{OM}$参数方程没有写对，或是 t 的积分区间没有找到，因而 W 的表达式没有求对；(2)少数考生解方程组出现错误．(3)审题不够仔细，只求出极值点，忘记了求 $W_{\max}$.

例 6.28 确定常数 λ，使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $A(x,y)=2xy(x^4+x^2)^\lambda i-x^2(x^4+y^2)^\lambda j$ 为某二元函数 $u(x,y)$的梯度，并求 $u(x,y)$.

［提示］ 本题考查的知识点实质上是平面单连通域上曲线积分与路径无关的条件、全微分求积，但是是以梯度形式出现的．由$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$求出 λ，再由与路径无关的曲线积分$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$求出 $u(x,y)$.

［解］ 令 $P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda$，$Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$．由$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，有

$$4x(x^4+y^2)^\lambda(\lambda+1)=0.$$

于是推知当且仅当 $\lambda=-1$ 时，所给向量场是梯度场．在 $x>0$ 的半平面内任取一点，例如(1,0)作为积分路径的起点，则得

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{(x^4+y^2)}+C\\ &=\int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+y^2}\mathrm{d}x-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y+C\\ &=-\arctan\frac{y}{x^2}+C.\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

［典型错误］ 不少考生不知道梯度是什么，更不知道如何判别一个向量场为梯度场．因而不能抓住问题的本质，当然无从下手.

例 6.29 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x - xf(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

[提示] 本题是一道将平面上对坐标的曲线积分和二元函数偏导数相结合的证明题. 涉及的知识点有平面上对坐标曲线积分与路径的条件，齐次函数的性质及微分法. 由齐次函数的特点，在方程两端对 t 求导，并令 $t=1$，或令 $t=\dfrac{1}{y}$ 代入所给等式后再分别对 x，y 求偏导，即得曲线积分与路径无关的条件.

[证法 1] 由格林公式知，对 D 内的任意有向简单闭曲线 L，$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x - xf(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 的充分必要条件是：对任意 $(x,y)\in D$，有

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial y}(yf(x,y)) + \frac{\partial}{\partial x}(xf(x,y))\\ &= 2f(x,y) + yf'_2(x,y) + xf'_1(x,y).\end{aligned}$$

由于对任意的 $(x,y)\in D$ 及 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，
两边对 t 求导，得

$$xf'_1(tx,ty) + yf'_2(tx,ty) = -2t^{-3}f(x,y).$$

令 $t=1$，得

$$2f(x,y) + xf'_1(x,y) + yf'_2(x,y) = 0,$$

即

$$\frac{\partial}{\partial y}(yf(x,y)) + \frac{\partial}{\partial x}(xf(x,y)) = 0.$$

所以

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x - xf(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

[证法 2] 同证法 1 首先需证明的充分条件为

$$2f(x,y) + yf'_y(x,y) + xf'_x(x,y) = 0.$$

在 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 中令 $t=\dfrac{1}{y}$，得

$$f\left(\frac{x}{y},1\right) = y^2f(x,y),$$

即

$$f(x,y) = y^{-2}f\left(\frac{x}{y},1\right).$$

上式分别对 x，y 求偏导，得

$$f'_x(x,y) = y^{-2}f'_1\left(\frac{x}{y},1\right)\cdot\frac{1}{y} = y^{-3}f'_1\left(\frac{x}{y},1\right),$$

$$f'_y(x,y) = -2y^{-3}f\left(\frac{x}{y},1\right) - xy^{-4}f'_1\left(\frac{x}{y},1\right),$$

故

$$xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = -2y^{-2}f\left(\frac{x}{y},1\right),$$

即

$$2f(x,y) + xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = 0.$$

[典型错误] (1) 一部分考生对齐次函数比较陌生，不理解"对任意 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$"意味着这是 t 的恒等式. 因而两端对 x 求导.

(2) 知道对两端求偏导数，但偏导数符号混淆. 分不清是对哪一个变量求导.

(3) 求偏导数后不知道令 $t=1$.

总之考生对证明题有畏难情绪，反映学习中基础不扎实.

例 6.30 设 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，π 为 S 在点 P 处的切平面，

$\rho(x,y,z)$为点 $O(0,0,0)$到平面 π 的距离．求 $\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

［提示］ 本题是一道综合性较强的计算题，考查的知识点有切平面方程，点到平面的距离，对面积曲面积分的计算等．本题的关键是(1)准确写出 $\rho(x,y,z)$；(2)准确写出 $\mathrm{d}S$；(3)正确计算二重积分．

［解］ 设(X,Y,Z)为 π 上任意一点，则 π 的方程为

$$\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1,$$

从而知

$$\rho(x,y,z)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

由

$$z=\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}.$$

有

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{-x}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}.$$

于是

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}\mathrm{d}\sigma,$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \frac{z\mathrm{d}S}{\rho(x,y,z)} &= \frac{1}{4}\iint\limits_D (4-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)\,r\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

［典型错误］ 由于本题每一步都有一定的计算量，稍不留意就会出错，能够做到最后并得到正确的结果并不很多，考生熟练的运算能力有待提高．

例 6.31 设有一高度为 $h(t)$(t 为时间)的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$(设长度单位为厘米、时间单位为小时)．已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9)．问高度为 130(厘米)的雪堆全部融化需多少小时?

［提示］ 本题是一道综合应用题，考查有利用重积分求立体的体积、侧面积等知识点以及建立数学模型的能力．分别用三重积分、二重积分将雪堆的体积和侧面积表示成 $h(t)$的函数，然后利用$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$ 导出 $h(t)$，最后求出$h(t)=0$的 t 值．

［解］ 记 V 为雪堆体积，S 为雪堆的侧面积，则

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi[h^2(t)-h(t)z]\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h^3(t),\\ S &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}[h^2(t)+16r^2]^{\frac{1}{2}}r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{13\pi h^2(t)}{12}.$$

由题意知$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$. 所以$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{13}{10}$. 因此 $h(t)=-\frac{13}{10}t+C$. 由 $h(0)=130$ 得 $h(t)=-\frac{13}{10}t+130$. 令 $h(t)\to 0$ 得 $t=100$ (小时). 因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需时间为 100 小时.

[典型错误] ①审题不仔细. 认为侧面面积满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$; ②比例关系写成$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0.9S$, 漏了负号; ③想从$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$ 来求 V; ④将 t 看成与 x、y 有关, 计算三重积分时不知如何处理 t 与 x, y 的关系; ⑤不会计算三重积分与曲面面积; ⑥计算错误十分普遍.

例 6.32 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$, 其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧, a 为大于零的常数.

[提示] 本题考查的知识点有对坐标的曲面积分的计算、高斯公式以及二重积分、三重积分的计算. 本题是基本题, 可添加平面 $z=0$ 上相应的部分与 Σ 构成封闭曲面后用高斯公式. 还可将 Σ(或分片之后)投影到相应的坐标平面上化成二重积分逐块计算.

[解法 1] 先以$(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=a$ 代入被积函数,

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

补一块有向平面 S^-: $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2,\\ z=0,\end{cases}$ 其法向量与 z 轴正向相反. 从而得到

$$I=\frac{1}{a}\Bigg[\oiint\limits_{\Sigma+S^-}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint\limits_{S^-}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Bigg]$$

$$=\frac{1}{a}\left[-\iiint\limits_{\Omega}(3a+2z)\mathrm{d}v+\iint\limits_{D}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right],$$

其中 Ω 为$\Sigma+S^-$围成的空间区域, D 为 $z=0$ 上的平面区域 $x^2+y^2\leqslant a^2$. 于是

$$I=\frac{1}{a}\left[-2\pi a^4-2\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v+\pi a^4\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[-\pi a^4-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z\mathrm{d}z\right]$$

$$=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

[解法 2] 直接分块计算.

$$I_1=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 D_{yz}为 yOz 平面上的半圆 $y^2+z^2\leqslant a^2$, $z\leqslant 0$. 利用极坐标, 得

$$I_1=-2\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\mathrm{d}r=-\frac{2}{3}\pi a^3.$$

$$I_2=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\iint\limits_{D_{xy}}\left[a-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 D_{yz}为 xOy 平面上的圆域 $x^2+y^2\leqslant a^2$. 用极坐标. 得

$$I_2 = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - r^2} - r^2)\, r dr = \frac{\pi}{6}a^3.$$

因此．$I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{2}a^3$.

［典型错误］ (1)由于在(0,0,0)处，被积函数分母为0，因此在添加平面 $z=0$ 之前应先以$(x^2+y^2+z^2)^{1/2}=a$ 代入被积函数．但考生未必注意到这一点，而是直接添加平面、用高斯公式．结果增大计算工作量．又容易出错；(2)有的审题不仔细就当闭曲面去做．有的添加平面但误认为在平面 $z=0$ 上曲面积分为0；(3)计算三重积分时采用柱面坐标或球面坐标，定限出错；(4)采用解法2，但曲面的侧概念不清，导致二重积分前的符号出错．总之反映出考生基本功不扎实．

例 6.33 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy,$$

其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ $(z\geqslant 0)$的上侧．

［提示］ 本题考查的知识点是对坐标的曲面积分的计算，涉及到高斯公式、三重积分和二重积分．由于本题是基本题．一是添加平面构成封闭曲面用高斯公式．二是直接计算．

［解法 1］ 取 Σ_1 为 xOy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域，则

$$\begin{aligned} I = &\iint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy \\ &- \iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy. \end{aligned}$$

根据高斯公式，得

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z)\,dxdydz \\ &= 6\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r^2} (z + r^2)\, r dz \\ &= 12\pi \int_0^1 \left[\frac{1}{2} r(1 - r^2)^2 + r^3(1 - r^2)\right] dr \\ &= 2\pi, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma_1} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1)dxdy \\ &= -\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (-3)\,dxdy = 3\pi. \end{aligned}$$

因此 $I = 2\pi - 3\pi = -\pi$.

注 在本解法中．积分 $\iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z)\,dxdydz$ 也可如下计算：

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} 6(x^2 + y^2 + z)\,dxdydz \\ &= 6\int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2\leqslant 1-z} (x^2 + y^2 + z)\,dxdy \\ &= 6\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1-z}} (r^2 + z)\, r dr \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

[解法 2] 记 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$. 由于 $z=1-x^2-y^2$, 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2y.$$

从而

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{D}\{2x^3(2x)+2y^3(2y)+3[(1-x^2-y^2)^2-1]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{D}[4(x^4+y^4)+3(x^2+y^2)^2-6(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1[4r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)+3r^4-6r^2]r\mathrm{d}r \\
&= -\pi.
\end{aligned}$$

[典型错误] (1)不添加曲面 Σ_1 就用高斯公式，究其原因，一是审题不够仔细. 另一种可能是平时学习基础不扎实. 而被误导："碰到第二型曲面积分就是用高斯公式"；(2)在计算 Σ_1 上积分时没有注意 Σ_1 的侧. 因而漏掉负号；(3)直接计算时分成三个积分. 由于曲面的侧的概念理解不深. 正负号发生错误.

例 6.34 设对于半空间 $x>0$ 内的任意光滑有向封闭曲面 Σ. 都有

$$\oiint_{\Sigma} xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

其中函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，求 $f(x)$.

[提示] 本题考查的知识点有对坐标的曲面积分. 高斯公式(沿任意闭曲面的曲面积分为零的充分必要条件)及一阶线性非齐次微分方程的解法. 首先由高斯公式推出 $f(x)$应满足的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0,$$

然后解微分方程.

[解] 由题设和高斯公式得

$$\begin{aligned}
0 &= \oiint_{\Sigma} xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \pm\iiint_{\Omega}[xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

其中 Ω 为 Σ 所围成的有界闭区域. 当有向闭曲面 Σ 的法向量指向外侧时. 取"+"号. 当有向曲面 Σ 的法向量指向内侧时. 取"−"号. 由 Σ 的任意性. 知

$$xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0\quad(x>0),$$

即

$$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\quad(x>0),$$

故

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^{\int\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right] \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x+C).
\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x+C)\right]=1$，故必有 $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+C)=0$. 从而 $C=-1$，于是

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x-1).$$

说明 若知道沿任意闭曲面的曲面积分为零的充分必要条件. 可直接写出：

由题设

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0,$$

不必写出高斯公式.

［典型错误］ (1)没有掌握高斯公式. 将$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$写成$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}$，成为方程组，当然 $f(x)$ 解不出来了；(2)求解微分方程时公式记错，$e^{-\int P(x)dx}$ 与 $e^{\int P(x)dx}$ 互换；(3)不会或不知道由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=y_0$ 确定常数 C.

例 6.35 计算曲线积分

$$\oint_C (z-y)\,dx+(x-z)\,dy+(x-y)\,dz,$$

其中 C 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x-y+z=2,\end{cases}$ 从 z 轴正向往 z 轴负向看 C 的方向是顺时针的.

［提示］ 本题考查的知识点是空间曲线积分. 涉及到对坐标的曲线积分计算、斯托克斯公式，曲面积分及二重积分计算. 由于 C 是封闭曲线. 一种解法是将空间曲线用参数方程表示，确定好 C 的起点和终点所对应的参数值用定积分计算；另一种解法是利用斯托克斯公式将曲线积分化为曲面积分再化为二重积分计算，但应注意曲面 S 的侧与曲线 C 的正向符合右手定则，从而正确决定二重积分的正负号.

［解法 1］ 令 $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$. 则

$$z=2-x+y=2-\cos\theta+\sin\theta.$$

于是

$$\begin{aligned}&\oint (z-y)\,dx+(x-z)\,dy+(x-y)\,dz\\&=-\int_{2\pi}^{0}\{2(\sin\theta+\cos\theta)-2\cos 2\theta-1\}\,d\theta\\&=-\left[2(-\cos\theta+\sin\theta)-\sin 2\theta-\theta\right]\Big|_{2\pi}^{0}\\&=-2\pi.\end{aligned}$$

［解法 2］ 设 S 是平面 $x-y+z=2$ 上以 C 为边界的有限部分. 其法向量与 z 轴正向的夹角为钝角. D_{xy} 为 S 在 xOy 面上的投影区域.

记

$$\boldsymbol{F}=(z-y)\boldsymbol{i}+(x-z)\boldsymbol{j}+(x-y)\boldsymbol{k},$$

则

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ z-y&x-z&x-y\end{vmatrix}=2\boldsymbol{k}.$$

利用斯托克斯公式知

$$\begin{aligned}\oint_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}&=\iint_S(\operatorname{rot}\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_S 2\,dx\,dy\\&=-\iint_{D_{xy}}2\,dx\,dy=-2\pi.\end{aligned}$$

［典型错误］ (1)解法 1 中对 θ 的积分从 0 到 2π；(2)用斯托克斯公式时没有考虑方向，定错符号；(3)有些考生将 C 化为 $y=\sqrt{1-x^2}$，$z=2-x+\sqrt{1-x^2}$，根号前没有正、负号，从而致错.

例 6.36 计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)\,dx+(2z^2-x^2)\,dy+(3x^2-y^2)\,dz$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线. 从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

［提示］ 本题考查空间第二型曲线积分的计算，涉及到斯托克斯公式、二重积分性质、格林公式等内容. 本题解法较多，可利用斯托克斯公式后采用转换投影，或用第一型曲面积分，或用降维法；也可利用斯托克斯公式后. 分别计算三个第二型曲面积分. 当然也可以将空间曲线 L 化为参数式方程后分段积分.

［解法 1］ 记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧，D 为 S 在 xOy 坐标面上的投影. 由斯托克斯公式得

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_S (-2y-4z)\,dydz + (-2z-6x)\,dzdx + (-2x-2y)\,dxdy \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (4x+2y+3z)\,dS \\
&= -2\iint_D (x-y+6)\,dxdy \\
&= -12\iint_D dxdy \\
&= -24.
\end{aligned}
$$

[解法 2] 转换投影法．用斯托克斯公式，取平面 $x+y+z=2$ 被 L 所围成的部分为 S．按斯托克斯公式的规定，它的方向向上．S 在 xOy 平面上的投影域记为 D．$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 1\}$．$S$ 为 $z=2-x-y$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$．$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-1$．于是

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_L (y^2-z^2)\,dx + (2z^2-x^2)\,dy + (3x^2-y^2)\,dz \\
&= \iint_S (-2y-4z)\,dydz + (-2z-6x)\,dzdx + (-2x-2y)\,dxdy \\
&= \iint_S \{-2y-4z,\,-2z-6x,\,-2x-2y\}\cdot\left\{-\frac{\partial z}{\partial x},\,-\frac{\partial z}{\partial y},1\right\}dxdy \\
&= -2\iint_S (4x+2y+3z)\,dxdy = -2\iint_D (x-y+6)\,dxdy \\
&= -12\iint_D dxdy = -24.
\end{aligned}
$$

其中 $\iint_D (x-y)\,dxdy = \iint_D x\,dxdy - \iint_D y\,dxdy = 0-0=0$．用到性质：$x$ 为 x 的奇函数，D 对称于 y 轴：y 为 y 的奇函数．D 对称于 x 轴，积分均应为零．

降维法．取 S 如解法 1 中定义，代入 I 中，

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{L_1} [y^2-(2-x-y)^2]\,dx + [2(2-x-y)^2-x^2]\,dy + (3x^2-y^2)(-dx-dy) \\
&= \oint_{L_1} (y^2-4x^2-2xy+4x+4y-4)\,dx + (3y^2-2x^2+4xy-8x-8y+8)\,dy \\
&\xlongequal{\text{格林公式}} -2\iint_D (x-y+6)\,dxdy = -24.
\end{aligned}
$$

其中 L_1 为 L 在 xOy 平面上的投影．逆时针．

[解法 3] 逐个投影法．由斯托克斯公式

$$
I_1 = \iint_S (-2y-4z)\,dydz = -2\iint_{D_{yz}} (y+2z)\,dydz.
$$

其中 $D_{yz}=\{(y,z)\,|\,|2-y-z|+|y|\leqslant 1\}$．分别命 $y\geqslant 0$，$y\leqslant 0$，$2-y-z\geqslant 0$．$2-y-z\leqslant 0$．可得到 D_{yz} 的 4 条边的方程：右：$2y+z=3$．上：$z=3$．左：$2y+z=1$．下：$z=1$．于是

$$
I_1 = -2\int_1^3 dz\int_{\frac{1}{2}(1-z)}^{\frac{1}{2}(3-z)} (y+2z)\,dy = -16.
$$

类似地，

$$
I_2 = -2\iint_S (2+3x)\,dzdx = -8.
$$

$$
I_3 = -2\iint_S (x+y)\,dxdy = 0.\ (\text{由奇、偶性及对称性})
$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -24.$$

[解法 4]　参数法．$L: |x| + |y| = 1$，$z = 2 - x - y$．

当 $x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$ 时，L_1: $y = 1 - x$，$z = 2 - x - y = 1$，x 从 1 到 0．

$$\int_{L_1} (y^2 - z^2)\,dx + (2z^2 - x^2)\,dy + (3x^2 - y^2)\,dz$$

$$= \int_1^0 [(1 - x)^2 - 1 + (2 - x^2)(-1)]\,dx = \frac{7}{3}.$$

当 $x \leqslant 0$，$y \geqslant 0$，L_2: $y = 1 + x$，$z = 1 - 2x$，x 从 0 到 -1，

$$\int_{L_2} = \int_0^{-1} (2x + 4)\,dx = -3.$$

当 $x \leqslant 0$，$y \leqslant 0$，L_3: $y = -1 - x$，$z = 3$，x 从 -1 到 0，

$$\int_{L_3} = \int_{-1}^0 (2x^2 + 2x - 26)\,dx = -\frac{79}{3}.$$

当 $x \geqslant 0$，$y \leqslant 0$，L_4: $y = x - 1$，$z = 3 - 2x$，x 从 0 到 1，

$$\int_{L_4} = \int_0^1 (-18x + 12)\,dx = 3.$$

所以

$$I = \int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4} = -24.$$

[典型错误]　①一些考生对空间封闭曲线第二型曲线积分用斯托克斯公式化为第二型曲面积分之后，又用高斯公式化为三重积分，可以说他们对高斯公式一点也不懂；②有的考生连曲线积分、曲面积分的记号也没有写对；③用参数式做时，参数式写不对，分别投影时，yOz 平面与 zOx 平面上的投影域不会求；④计算错误比比皆是．

例 6.37　设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t) = \frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2 + y^2 + z^2)\,dv}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2 + y^2)\,d\sigma}, \qquad G(t) = \frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2 + y^2)\,d\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,dx},$$

其中 $\Omega(t) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant t^2\}$，$D(t) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant t^2\}$．

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性．

(2) 证明当 $t > 0$ 时，$F(t) > \frac{2}{\pi} G(t)$．

[提示]　本题是一道微积分的综合题，涉及到的知识点有在球面坐标系下三重积分的计算，在极坐标系下二重积分计算，对称区间上偶函数积分的性质，变上限定积分函数及函数的单调性等．首先采用球面坐标、极坐标和偶函数积分性质将题中三重积分，二重积分及定积分化为变上限积分函数，其次考察 $F'(x)$ 的符号判定函数的单调性，最后作辅助函数，利用单调性证明不等式．

(1) [解]　因为

$$F(t) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^t f(\rho^2)\rho^2 \sin\varphi\, d\rho}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2)\, r\,dr} = \frac{2\int_0^t f(\rho^2)\rho^2\, d\rho}{\int_0^t f(r^2)\, r\,dr}$$

$$= \frac{2\int_0^t f(r^2)\, r^2\,dr}{\int_0^t f(r^2)\, r\,dr},$$

$$F'(t)=\frac{2tf(t^2)\int_0^t f(r^2)\,r(t-r)\,\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)\,r\mathrm{d}r\right]^2},$$

所以在$(0,+\infty)$上$F'(t)>0$，故$F(t)$在$(0,+\infty)$内单调增加.

(2)［证明1］ 因

$$G(t)=\frac{2\pi\int_0^t f(r^2)\,r\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(x^2)\,\mathrm{d}x}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)\,r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r},$$

要证明$t>0$时$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$，只需证明$t>0$时，$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$，即证

$$\int_0^t f(r^2)\,r^2\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)\,r\mathrm{d}r\right]^2>0.$$

令
$$g(t)=\int_0^t f(r^2)\,r^2\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)\,r\mathrm{d}r\right]^2,$$

则
$$g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)\,(t-r)^2\,\mathrm{d}r>0,$$

故$g(t)$在$(0,+\infty)$内单调增加．因为$g(t)$在$t=0$处连续，所以当$t>0$时，有$g(t)>g(0)=0$，因此，当$t>0$时，

$$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t).$$

［证明2］ 同证明1，只需证明$\int_0^t f(r^2)\,r^2\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2>0$，

令
$$\begin{aligned}\Delta&=\int_0^t f(r^2)\,r^2\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2\\&=\int_0^t f(r^2)\,r^2\mathrm{d}r\int_0^t f(u^2)\,\mathrm{d}u-\int_0^t f(r^2)\,r\mathrm{d}r\cdot\int_0^t f(u^2)\cdot u\mathrm{d}u\\&=\iint_D f(r^2)\cdot r^2\cdot f(u^2)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}u-\iint_D f(r^2)\,f(u^2)\cdot ru\mathrm{d}r\mathrm{d}u\\&=\iint_D rf(r^2)\,f(u^2)\,(r-u)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

其中$D=\{(r,u)\mid 0\leqslant r\leqslant t,0\leqslant u\leqslant t\}$，由轮换对称性得

$$\begin{aligned}\Delta&=\iint_D uf(u^2)\,f(r^2)\,(u-r)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\iint_D f(r^2)\,f(u^2)\,(r-u)^2\,\mathrm{d}r\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

由于$f(r^2)>0$，$f(u^2)>0$，$(r-u)^2>0$，故$\Delta>0$，即$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

［典型错误］

① 不会用球面坐标与极坐标化简$F(t)$与$G(t)$，或者化错，当然无法做下去；

② 变上限求导计算错或者最后化不到上面所写的$F'(t)$的分子形状；

③ 不去讨论$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)$的分子，而令

$$g(t)=F(t)-\frac{2}{\pi}G(t),$$

试图求$g'(t)$，用单调性讨论$g(t)>0$，这是做不到的．因为不但求$g'(t)$麻烦，并且讨论$\lim\limits_{t\to0^+}g(t)$也麻烦．这种取分子讨论的技巧应留意．

这些都表明考生综合运用所学知识的能力较低，应加强训练．

例 6.38 已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$．$L$ 为 D 的正向边界．试证：

(1) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$； (2) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\geqslant 2\pi^2$.

[提示] 本题考查的知识点包括第二型曲线积分的计算法，格林公式，二重积分性质以及轮换对称性等．本题可利用第二型曲线积分计算法将曲线积分化为定积分进行比较证明．也可以用格林公式将曲线积分化为二重积分利用轮换对称性证明．但无论何种证法．在(2)的证明中均用到不等式 $e^u+e^{-u}\geqslant 2$.

[证法 1] (1) 左边 $=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$.

$$右边=\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}[e^{\sin x}+e^{-\sin x}]dx.$$

所以
$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx.$$

(2) 由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\geqslant 2$，故由(1)的证明 $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\geqslant 2\pi^2$.

[证法 2] (1) 由格林公式．

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\sigma. \qquad (*)$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})d\sigma. \qquad (**)$$

又区域 D 关于 x 与 y 轮换对称，即 x 换为 y．y 换为 x 之后 D 不变，于是有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_D f(y,x)d\sigma.$$

从而知$(*)=(**)$.

(2) 由(1)有

$$\begin{aligned}\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx&=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\sigma\\&=\iint_D e^{\sin y}d\sigma+\iint_D e^{-\sin x}d\sigma\\&\xlongequal{轮换对称}\iint_D e^{\sin x}d\sigma+\iint_D e^{-\sin x}d\sigma\\&=\iint_D(e^{\sin x}+e^{-\sin x})d\sigma\geqslant\iint_D 2d\sigma=2\pi^2.\end{aligned}$$

[典型错误]

① 写成 $\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\sigma=\iint_D e^{\sin y}d\sigma\iint_D e^{-\sin x}d\sigma$；

② 写成 $\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\sigma\geqslant 2\iint_D\sqrt{e^{\sin y}e^{-\sin x}}d\sigma\geqslant 2\pi^2$，真是乱来一通；

③ 写成"因为 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}=e^{\sin y}+e^{-\sin y}$，所以

$$\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx=\int_0^{\pi}(e^{\sin y}+e^{-\sin y})dy."$$

其实．后一式子是对的，而前一式子是不对的；

④与③类似．写成

$$e^{-\sin y}+e^{\sin x}=e^{-\sin x}+e^{\sin y}.$$

这也是不对的．

由以上②、③、④可见．考生都想去证某一等式，但是不知用轮换对称性．甚至不知道去用"定积分的值与积分变量无关"这一简单结论．

例 6.39 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数，L 是上半平面($y>0$)内的有向分段光滑曲

线，其起点为(a,b)，终点为(c,d). 记 $I=\int_L \frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$.

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关；

(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

[提示] 本题考查曲线积分与路径无关的充分必要条件以及曲线积分计算. 要证明曲线积分与路径无关，只要证明$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 求 I 的值有多种方法，可以选择特殊的路径，也可以拆项组合. 在 $\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y$ 中令 $F'(u)=f(u)$.

(1) 证明 因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\right\}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\right\}$$

在上半平面内处处成立，所以在上半平面内曲线积分 I 与路径无关.

(2) [解法 1] 由于 I 与路径无关，故可取积分路径 L 为由点(a,b)到点(c,b)再到点(c,d)的折线段，所以

$$\begin{aligned}I&=\int_a^c \frac{1}{b}\left[1+b^2f(bx)\right]\mathrm{d}x+\int_b^d \frac{c}{y^2}\left[y^2f(cy)-1\right]\mathrm{d}y\\&=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\,\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\,\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd}f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

当 $ab=cd$ 时，$\int_{ab}^{cd}f(t)\,\mathrm{d}t=0$，由此得 $I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

[解法 2] $$I=\int_L \frac{\mathrm{d}x}{y}-\frac{x\mathrm{d}y}{y^2}+\int_L yf(xy)\,\mathrm{d}x+xf(xy)\,\mathrm{d}y.$$
$$\int_L \frac{\mathrm{d}x}{y}-\frac{x\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

设 $F(x)$为 $f(x)$的一个原函数，则

$$\int_L yf(xy)\,\mathrm{d}x+xf(xy)\,\mathrm{d}y=\int_L f(xy)\,\mathrm{d}(xy)=F(cd)-F(ab).$$

所以当 $ab=cd$ 时，$F(cd)-F(ab)=0$，由此得 $I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

[解法 3] 因为与路径无关，且起点的 x 坐标与 y 坐标的积 ab 与终点的 x 坐标与 y 坐标的积 cd 相等，故可取 $L: xy=k$，$k=ab=cd$. 于是 $x=\frac{k}{y}$.

$$\begin{aligned}I&=\int_b^d\left\{\frac{1}{y}\left[1+y^2f(k)\right]\left(-\frac{k}{y^2}\right)+\frac{k}{y^3}\left[y^2f(k)-1\right]\right\}\mathrm{d}y\\&=\int_b^d -\frac{2k}{y^3}\mathrm{d}y=\left.\frac{k}{y^2}\right|_b^d=\frac{k}{d^2}-\frac{k}{b^2}\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.\quad(\text{因为 } k=ab=cd).\end{aligned}$$

[典型错误]

① 不会将解法 1 中的 $\int_a^c bf(bx)\,\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\,\mathrm{d}y$ 合并而正好消去.

② 解法 2 中不会去设一个原函数 $F(u)$，从而做不下去. 有的考生只知道去找一个具体函数的原函数，而不知道去令一个抽象的原函数.

例 6.40 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单正向闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4}$ 的值恒为同一常数.

（Ⅰ）证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有 $\oint_C \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} = 0$；

（Ⅱ）求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

［提示］ 本题考查的知识点是对坐标曲线积分的性质和曲线积分与路径无关的充分必要条件. 在 C 上任意取定两点 M、N，将 C 分成两部分，每一部分和另外一条以 M、N 为端点的曲线组成了围绕原点的闭曲线，由题设并利用第二型曲线积分性质即可证明 C 上积分为 0. 再利用曲线积分与路径无关的条件便可求出 $\varphi(y)$.

（Ⅰ）［证］ 如图 23. 设 C 是半平面 $x>0$ 内的任一分段光滑简单闭曲线，在 C 上任意取定两点 M、N，作围绕原点的闭曲线 $\overset{\frown}{MQNRM}$，同时得到另一围绕原点的闭曲线 $\overset{\frown}{MQNPM}$.

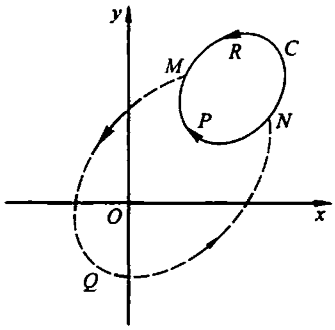

图 23

根据题设可知

$$\oint_{\overset{\frown}{MQNRM}} \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} - \oint_{\overset{\frown}{MQNPM}} \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} = 0.$$

根据第二类曲线积分的性质，利用上式可得

$$\begin{aligned}
&\oint_C \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} \\
&= \int_{\overset{\frown}{NRM}} \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} + \int_{\overset{\frown}{MPN}} \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} \\
&= \int_{\overset{\frown}{NRM}} \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} - \int_{\overset{\frown}{NPM}} \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} \\
&= \oint_{\overset{\frown}{MQNRM}} \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} - \oint_{\overset{\frown}{MQNPM}} \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

（Ⅱ）［解法 1］ 设 $P = \frac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}$，$Q = \frac{2xy}{2x^2 + y^4}$，$P$，$Q$ 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续偏导数. 由（Ⅰ）知，曲线积分 $\int_L \frac{\varphi(y)\,dx + 2xy\,dy}{2x^2 + y^4}$ 在该区域内与路径无关. 故当 $x>0$ 时，总有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y(2x^2 + y^4) - 4x\cdot 2xy}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{-4x^2y + 2y^5}{(2x^2 + y^4)^2}, \qquad ①$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)(2x^2 + y^4) - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{2x^2\varphi'(y) + \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2}. \qquad ②$$

比较①、②两式的右端，得

$$\begin{cases} \varphi'(y) = -2y, & ③ \\ \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5. & ④ \end{cases}$$

由③得 $\varphi(y) = -y^2 + c$. 将 $\varphi(y)$ 代入④得 $2y^5 - 4cy^3 = 2y^5$. 所以 $c=0$，从而 $\varphi(y) = -y^2$.

［解法 2］ 由(Ⅰ)知当 $x>0$ 时，$\frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 为某个二元函数的全微分，设它的原函数为 $u(x,y)$. 则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{2x^2 + y^4}.$$

由 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{2x^2 + y^4}$ 得 $u = \int \frac{2xy\,dy}{2x^2 + y^4} = \frac{x}{\sqrt{2}x}\arctan\frac{y^2}{\sqrt{2}x} + c(x)$ 从而 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-y^2}{2x^2 + y^4} + c'(x) = \frac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}$. $c'(x) =$

$\dfrac{\varphi(y)+y^2}{2x^2+y^4}$. 因 $c'(x)$仅与 x 有关，知 $\varphi(y)+y^2=0$，故 $\varphi(y)=-y^2$.

[典型错误] (1)对于(Ⅰ)证明. 绝大多数学生都未能正确添加辅助曲线来证明结论，而是采取了挖去奇点的方法，当然证明不下去. 说明他们在学习这一部分知识时，只死记某一方法，而未掌握思想；(2)考生能用$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$导出关于$\varphi(y)$的方程，但在求解时未注意正确地确定积分中的常数 C.

七、无穷级数(数学二不要求)

·考试内容与要求·

考试内容

常数项级数的收敛与发散的概念　收敛级数的和的概念　级数的基本性质与收敛的必要条件　几何级数与 p 级数及其收敛性　正项级数收敛性的判别法　交错级数与莱布尼茨定理　任意项级数的绝对收敛与条件收敛　函数项级数的收敛域与和函数的概念　幂级数及其收敛半径、收敛区间(指开区间)和收敛域　幂级数的和函数　幂级数在其收敛区间内的基本性质　简单幂级数的和函数的求法　初等函数的幂级数展开式　函数的傅里叶(Fourier)系数与傅里叶级数　狄利克雷(Dirichlet)定理　函数在$[-l,l]$上的傅里叶级数　函数在$[0,l]$上的正弦级数和余弦级数

考试要求

1. 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.
2. 掌握几何级数与 p 级数的收敛与发散的条件.
3. 掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法，会用根值判别法.
4. 掌握交错级数的莱布尼茨判别法.
5. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系.
6. 了解函数项级数的收敛域及和函数的概念.
7. 理解幂级数收敛半径的概念，掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.
8. 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)，会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和.
9. 了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件.
10. 掌握 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$及$(1+x)^a$ 的麦克劳林展开式，会用它们将一些简单函数间接展开成幂级数.
11. 了解傅里叶级数的概念和狄里克雷收敛定理，会将定义在$[-l,l]$上的函数展开为傅里叶级数，会将定义在$[0,l]$上的函数展开为正弦级数与余弦级数，会写出傅里叶级数的和的表达式.

·考试内容解析·

(一) 数项级数

1. 数项级数的概念和性质

(1) 基本概念

定义 7.1　设$\{u_n\}$是一个数列，则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots \tag{7.1}$$

为一个数项级数，简称级数，u_n 称为数项级数(7.1)的通项. $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ 称为数项级数(7.1)的前 n 项部分和.

定义 7.2　若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$有极限，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 称为此级数

的和，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k$．当 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在时，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散．

利用收敛定义，易知当 $|q|<1$ 时，几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛，和为$\frac{1}{1-q}$；当 $|q|\geqslant 1$ 时，几何级数发散．

定理 7.1 （级数收敛的必要条件） 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$．

(2) 收敛级数的性质

1° 数乘　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，α 是任意实数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} u_n$．

2° 加法　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n+\sum_{n=1}^{\infty} v_n .$$

注　由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，得不到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛．例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$．

3° 改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的任意有限项的值不影响其敛散性．

4° 重组　收敛级数加括号后所形成的级数仍收敛，且和的值不变．

注　也就是说，由加括号后所形成的级数发散就能推出原级数发散．此性质类似于有限个数的加法所满足的结合律．注意此性质的反面并不成立，即一个级数加括号后所形成的级数收敛并不能保证原级数收敛．

2．正项级数

(1) 正项级数概念与特点

定义 7.3　通项非负的级数称为正项级数．

正项级数的特点　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 是一单调递增数列．

定理 7.2 （正项级数收敛的充分必要条件） 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界．

当 $p>1$ 时，p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，p 级数发散．

(2) 正项级数的判别法

定理 7.3 （比较判别法） 若存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $0\leqslant u_n\leqslant v_n$，则

(1) 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散．

定理 7.4 （比阶判别法） 设 $u_n\geqslant 0$，且 $\lim_{n\to\infty} n^p u_n=C$，则

(1) 当 $0\leqslant C<+\infty$，且 $p>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $0<C\leqslant+\infty$，且 $p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散．

注　当 $u_n\geqslant 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性可以由无穷小量 u_n $(n\to\infty)$ 的阶来判断．

定理 7.5 （比值判别法，D'Alembert 判别法） 设 $u_n>0$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=C$，则

(1) 当 $C<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $C>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，且 $\lim_{n\to\infty} u_n=+\infty$；

(3) 当 $C=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性无法判断.

定理 7.6 （根值判别法，Cauchy 根值判别法） 设 $u_n>0$，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=C$，则

(1) 当 $C<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $C>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，且 $\lim_{n\to\infty} u_n=+\infty$；

(3) 当 $C=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性无法判断.

3．交错级数

定义 7.4 设 $u_n>0$，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 为交错级数.

定理 7.7 （莱布尼茨(Leibniz)判别法） 若 $u_n>0$ $(n=1,2,3,\cdots)$满足

(1) 数列 $\{u_n\}$ 单调递减，即 $u_n\geqslant u_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛，且 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k\right|\leqslant u_{n+1}$.

定理 7.7 中的两个条件又称为莱布尼茨条件.

4．任意项级数

(1) 绝对收敛与条件收敛

定义 7.5 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

注　绝对收敛级数可以重排，即绝对收敛级数重排后所得级数的敛散性与和不变．这类似于有限个数加法的交换律.

(2) 任意项级数的判别法

定理 7.8 （绝对值判别法） 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛．即绝对收敛的级数一定收敛.

（二）幂级数

1．函数项级数的有关概念

定义 7.6 设函数 $u_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$都在 D 上有定义，则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots$$

为定义在 D 上的一个函数项级数，$u_n(x)$称为通项，$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 称为部分和函数．

定义 7.7 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在 D 上的一个函数项级数，$x_0\in D$．若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛，则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个收敛点．所有收敛点构成的集合称为级数的收敛域.

定义 7.8 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域为 I，则任给 $x\in I$，存在唯一的实数 $S(x)$，使得 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 成立．定义域为 I 的函数 $S(x)$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数．

注 求函数项级数的收敛域时，主要是利用收敛域的定义及有关的数项级数的判别法．

2．幂级数的有关概念

(1) 幂级数的定义

定义 7.9 设 $\{a_n\}(n=0,1,2,3,\cdots)$ 是一实数列，则称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数为 x_0 处的幂级数．

$x_0=0$ 时的幂级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$．

(2) 幂级数的收敛半径

定理 7.9 (阿贝尔(Abel)定理) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x_0\neq 0$ 处收敛，则当 $|x|<|x_0|$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛．

推论 7.1 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 x_1 处发散，则当 $|x|>|x_1|$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散．

推论 7.2 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x_0\neq 0$ 处收敛，在 x_1 处发散，则存在唯一的实数 $R>0$，使得

(1) 当 $|x|<R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛；

(2) 当 $|x|>R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散．

定义 7.10 若 $R\geqslant 0$ 满足条件：

(1) 当 $|x|<R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛；

(2) 当 $|x|>R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散，

则称 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径，开区间 $(-R,R)$ 称为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间．

推论 7.2 说明，在 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 既有非零收敛点，又有发散点时，它的收敛半径是存在且唯一的．

当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 没有非零收敛点时，规定其收敛半径为零；当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 没有发散点时，规定其收敛半径为 $+\infty$．另外，由收敛半径的定义还可以知道，使得幂级数条件收敛的点只能是其收敛区间的端点．

(3) 收敛半径的求法

根据收敛半径的定义，我们一般用正项级数的比值判别法或根值判别法来求幂级数收敛半径的值．

例如，对于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若 $a_n\neq 0$（即不缺项），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\rho|x|$，所以，当 $\rho|x|<1$，即 $|x|<\dfrac{1}{\rho}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛，当 $\rho|x|>1$，即 $|x|>\dfrac{1}{\rho}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散．因此，由收敛半径的定义便得 $R=\dfrac{1}{\rho}$．特别地，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 时，$R=+\infty$；当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$ 时，$R=0$．

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$，若 $a_n\neq 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{2(n+1)}}{a_nx^{2n}}\right|=\rho x^2$，所以，当 $\rho x^2<1$，

即 $|x|<\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 绝对收敛，当 $\rho x^2>1$，即 $|x|>\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 发散．因此，根据收敛半径的定义便得 $R=\frac{1}{\sqrt{\rho}}$．特别地，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 时，$R=+\infty$；当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$ 时，$R=0$．

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，上述方法可以写成以下定理．

定理 7.10 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的系数 a_n 满足 $a_n\neq0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则其收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$．

类似地还有以下定理．

定理 7.11 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的系数 a_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则其收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$．

注 需要注意的是，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 存在(或是无穷大)仅仅是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$ 的一个充分条件．因此，由幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，并不能保证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R}$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$．

3．幂级数的性质

(1) 加法　若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R_1，$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径为 R_2，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 $R=\min\{R_1,R_2\}$，且

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\ x\in(-R,R).$$

(2) 和函数的连续性　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续，即任给 $x_0\in I$，有

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0}a_nx^n\right).$$

(3) 可积性与逐项积分公式　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积，且可逐项积分，即任给 $x\in I$，有

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

其中，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 称为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的积分级数，若记 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径为 R_1，则 $R\leqslant R_1$．

(4) 可导性与逐项求导公式　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且可逐项求导，即任给 $x\in(-R,R)$，有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

其中，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 称为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的导级数，若记 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径为 R_2，则 $R\leqslant R_2$．

由性质(3)与(4)易知，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径相等，即 $R=R_1=R_2$．

4．函数展开成幂级数

(1) 概念

定义 7.11 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，$x_0\in D$，若

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

对任意的 $x\in D$ 都成立，则称 $f(x)$ 在区间 D 上能展开成 x_0 处的幂级数.

由幂级数的性质易知，若 $f(x)$ 在区间 D 上能展开成 x_0 处的幂级数，则 $f(x)$ 在区间 D 内存在任意阶导数.

(2) 展开形式的唯一性

定理 7.12 若函数 $f(x)$ 在区间 D 上能展开成 x_0 处的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.$$

则其展开系数为

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

注 展开形式的唯一性是能利用间接展开法将函数展开成幂级数的主要理论根据.

(3) 泰勒级数与麦克劳林级数

定义 7.12 若 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，且在 x_0 处的各阶导数 $f^{(n)}(x_0)(n=1,2,3,\cdots)$ 都存在，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒(Taylor)级数，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒系数. 特别地，$x_0=0$ 处的泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林(Maclaurin)级数.

定理 7.13 (函数展开成泰勒级数的充要条件) 函数 $f(x)$ 在 $x_0\in D$ 处的泰勒级数在 D 上收敛到 $f(x)$ 的充分必要条件是：$f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

的余项 $R_n(x)$ 在 D 上收敛到零，即对任意的 $x\in D$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

定理 7.14 函数 $f(x)$ 在 $x_0\in D$ 处的泰勒级数在 D 上收敛到 $f(x)$ 的一个充分条件是：$f(x)$ 的各阶导数 $f^{(n)}(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 在 D 上一致有界. 即存在 $M>0$，使得 $|f^{(n)}(x)|\leqslant M$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$ 和任意的 $x\in D$ 都成立.

(4) 直接展开法

直接展开法指的是：利用泰勒级数的定义及泰勒级数收敛的充要条件，将函数在某个区间上直接展开成指定点的泰勒级数的方法.

由直接展开法易知函数 e^x，$\ln(1+x)$，$\cos x$，$\sin x$，$(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林级数展开式为：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad x\in(-1,1).$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

其中，当 $\alpha\leqslant-1$ 时，$x\in(-1,1)$；当 $-1<\alpha<0$ 时，$x\in(-1,1]$；当 $\alpha>0$ 时，$x\in[-1,1]$.

特别地，当 $\alpha=-1$ 时，有

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ x\in(-1,1).$$

(5) 间接展开法

间接展开法指的是：通过一定运算将函数转化为其他函数，进而利用新函数的幂级数展开将原来函数展开为幂级数的方法．所用的运算主要是加法运算，数乘运算，(逐项)积分运算和(逐项)求导运算．利用的幂级数展开公式主要是一些简单函数的麦克劳林展开公式，上述几个简单函数就是常用的几个．间接展开法是将函数展开成幂级数的主要方法．

5．简单幂级数的和函数及简单数项级数求和

求简单幂级数的和函数的问题恰好是将简单函数展开成幂级数问题的反面．下面通过几个具体例子来说明此类问题的求解方法．

(1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数 $S(x)$．

令

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},$$

则 $S_1(x)$的定义域为$(-1,1)$，且 $S(x)=xS_1(x)$．任给 $x\in(-1,1)$，由逐项积分公式得，

$$\int_0^x S_1(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\quad x\in(-1,1).$$

因此，

$$S_1(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1),$$

所以，

$$S(x)=xS_1(x)=\frac{x}{(1-x)^2},\quad x\in(-1,1).$$

(2) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$ 的和函数．

令

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

则 $S_1(x)$的定义域为$[-1,1)$，且 $S(x)=xS_1(x)$．任给 $x\in(-1,1)$，由逐项求导公式得，

$$S'_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1).$$

因此，

$$S_1(x)=S_1(x)-S_1(0)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x),\quad x\in(-1,1).$$

所以，

$$S(x)=xS_1(x)=-x\ln(1-x),\quad x\in(-1,1).$$

由 $S(x)\in C[-1,1)$得，$S(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}S(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}[-x\ln(1-x)]=\ln 2$.

(3) 求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和．

考虑幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，则其收敛域为$[-1,1]$．若记其和函数为 $S(x)$，则

$$S(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

由于

$$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)\,dt$$

$$=\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\Big)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x,x\in(-1,1).$$

又因为 $S(x)\in C[-1,1]$，所以

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\arctan x=\frac{\pi}{4}.$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

（三）傅里叶级数

1. 周期为 2π 的傅里叶级数

（1）概念

定义 7.13 设函数 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，且在$[-\pi,\pi]$上可积，则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

为 $f(x)$的傅里叶系数；称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为 $f(x)$的以 2π 为周期的傅里叶级数．记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

注　根据周期函数的性质，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos nx\,dx$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\sin nx\,dx$.

注　根据奇函数和偶函数的性质．当 $f(x)$是周期为 2π 的可积奇函数时，$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$，$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,2,3,\cdots)$，此时 $f(x)$的以 2π 为周期的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

称为正弦级数．

类似地，当 $f(x)$是周期为 2π 的可积偶函数时，其以 2π 为周期的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

称为余弦级数．其中 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$.

（2）傅里叶级数的收敛性

定理 7.15（狄里克雷(Dirichlet)收敛定理）　设 $f(x)$是周期为 2π 的可积函数．且满足条件：

（1）在$[-\pi,\pi]$上，$f(x)$连续或只有有限个第一类间断点；

（2）在$[-\pi,\pi]$上，$f(x)$只有有限个单调区间，

则 $f(x)$的以 2π 为周期的傅里叶级数收敛，且

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

注　在 $f(x)$的连续点处，$S(x)$与 $f(x)$的值相等；在 $f(x)$的第一类间断点处．$S(x)$的值等于在

$f(x)$在此点的左、右极限的平均值.

2. 周期为 $2l$ 的傅里叶级数

定义 7.14 设函数 $f(x)$是周期为 $2l$ 的周期函数, 且在$[-l,l]$上可积, 则称

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

为 $f(x)$的以 $2l$ 为周期的傅里叶系数; 称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

为 $f(x)$的以 $2l$ 为周期的傅里叶级数. 记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

注 周期为 $2l$ 的傅里叶级数的收敛性结论与周期为 2π 的傅里叶级数一样.

3. 只在$[0,l]$上有定义的函数的傅里叶级数展开

定义在$[0,l]$上的函数可以有多种方式展开成三角级数. 但常用的方式只有三种, 即周期奇延拓、周期偶延拓、周期延拓. 三种延拓方式得到的三角级数展开式分别为:

(1) 正弦级数展开

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad x\in[0,l],$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

(2) 余弦级数展开

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad x\in[0,l],$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

(3) 三角级数展开

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{l}x\right),\quad x\in[0,l],$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{2n\pi}{l}x\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2n\pi}{l}x\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

·例 题 详 解·

例 7.1 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$的和为________.

[答案] $\frac{1}{2}$.

[提示] 本题考查了级数和的概念以及利用部分和的极限求级数和的值的方法.

[解] 因为 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$, 所以

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$, 即原级数的和为$\frac{1}{2}$.

例 7.2 数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ 的和为________.

[答案] $\cos 1$.

[提示] 本题考查了求级数和的另一常用方法，即将数项级数看成是一个函数项级数在某点取值时的情况，求函数项级数的和函数在此点的值.

[解] 由于 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}(-\infty<x<+\infty)$，令 $x=1$ 便得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1$.

例 7.3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{2n}$ 在 $x=2$ 处条件收敛，则其收敛域为________.

[答案] $[0,2]$.

[提示] 本题主要考查了幂级数收敛半径和收敛域的概念.

[解] 根据题意，利用收敛半径的定义可知 $x=2$ 是收敛区间的端点．所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{2n}$ 的收敛半径为 1．又因为在 $x=0$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 条件收敛.因此原级数的收敛域是$[0,2]$.

例 7.4 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$ 的收敛半径为________.

[答案] $\sqrt{3}$.

[提示] 本题主要考查了利用收敛半径概念和正项级数的比值判别法求幂级数收敛半径的方法.

[解] 因为幂级数缺奇次方项，不能直接用收敛半径的计算公式.

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}x^{2(n+1)}\frac{2^n+(-3)^n}{nx^{2n}}\right|=\frac{1}{3}x^2,$$

所以，根据比值判别法．当 $|x|<\sqrt{3}$ 时，原级数绝对收敛．当 $|x|>\sqrt{3}$ 时．原级数发散．由收敛半径的定义便知 $\sqrt{3}$ 就是该级数的收敛半径.

例 7.5 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{1}{2^n}\right)x^n$ 的收敛域为________.

[答案] $[-1,1]$.

[提示] 本题主要考查了幂级数收敛域的概念、收敛半径的计算以及幂级数的加法运算.

[解] 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}}=1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$，所以幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}x^n$ 的收敛半径为 1．收敛域为 $[-1,1]$；幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$ 的收敛半径为 2,收敛域为 $(-2,2)$.

因此级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{1}{2^n}\right)x^n$ 在 $[-1,1]$ 上收敛，在 $(-2,-1)\cup(1,2)$ 内发散．根据阿贝尔定理又知该级数在 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ 也发散．于是该级数的收敛域是 $[-1,1]$.

注 常用的求收敛半径的方法是：(1)收敛半径的定义，例如 7.3 题．(2)收敛半径的计算公式，例如 7.5 题．(3)正项级数的比值判别法或根值判别法及收敛半径的定义，例如 7.4 题．另外根据级数之间的相互关系，也可以求得幂级数的收敛半径，例如积分级数、导级数的收敛半径与原级数的收敛半径的关系等.

例 7.6 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 收敛于________.

[答案] $\frac{\pi^2}{2}$.

[提示] 本题主要考查了傅里叶级数的狄利克雷收敛定理.

[解] 记 $S(x)$ 为函数 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数，根据狄利克雷收敛定理．有

$$S(\pi)=\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(\pi+0)]=\frac{1}{2}[(1+\pi^2)+(-1)]=\frac{\pi^2}{2}.$$

例 7.7　设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cos nx\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，则 $a_2=$________.

[答案]　1.

[提示]　本题主要考查了将函数展开成余弦级数的有关内容.

[解]　由于 a_n 是 x^2 在 $[-\pi,\pi]$ 上周期为 2π 的傅里叶系数，根据傅里叶系数的计算公式，有

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos 2x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}x\cos 2x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x \\ &= 1. \end{aligned}$$

[典型错误]　常见错误主要是定积分的计算不正确. 傅里叶系数的公式记错也占了一定比例，如写成 $a_2=\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos 2x\mathrm{d}x$ 等. 对题意理解不确切也影响了本题的得分. 如有的考生就只填上了公式 $a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos 2x\mathrm{d}x$ 或 $a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos 2x\mathrm{d}x$.

例 7.8　设常数 $a>0$，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_{2n-1}}}{\sqrt{n^2+a}}$

(A) 发散.　(B) 条件收敛.　(C) 绝对收敛.　(D) 敛散性与 a 的值有关.

[答案]　(C).

[提示]　本题主要考查了正项级数收敛的充分必要条件和比较判别法、收敛级数的加法运算和绝对值判别法.

[解]　因为 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k-1}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{2n-1} a_k$，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛. 又因为

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt{a_{2n-1}}}{\sqrt{n^2+a}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(a_{2n-1}+\frac{1}{n^2+a}\right).$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a}$ 收敛，所以原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_{2n-1}}}{\sqrt{n^2+a}}$ 绝对收敛.

例 7.9　设 $a_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(n=1,2,3,\cdots)$，则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

[答案]　(C).

[提示]　本题主要考查了交错级数的莱布尼茨判别法、常见的等价无穷小量及正项级数的比阶判别法.

[解]　因为 $a_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是满足莱布尼茨条件的交错级数. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 因为 $a_n^2=\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 在 $n\to\infty$ 时与 $\frac{1}{n}$ 是等价无穷小量. 且调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散.

例 7.10　设 $0<a_n<\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$，则下列级数中肯定收敛的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$.　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$.

[答案]　D.

[提示] 本题主要考查了正项级数的比阶判别法和收敛级数的性质.

[解] 因为 $0<a_n<\frac{1}{n}$, 所以 $0<\left|(-1)^n a_n^2\right|<\frac{1}{n^2}$. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$ 绝对收敛.

另外, 取 $a_n=\frac{1}{2n}$, 可以说明不能选(A)及(C); 取 $a_{2n-1}=\frac{1}{(2n-1)^2}$, $a_{2n}=\frac{1}{4n}$, 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n}-a_{2n-1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}\left[1-\frac{4n}{(2n-1)^2}\right]$发散, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散. 总之, 选项(D)正确.

例 7.11 下列命题中正确的是

(A) 若 $u_n<v_n\ (n=1,2,3,\cdots)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

(B) 若 $u_n<v_n\ (n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(D) 若 $w_n<u_n<v_n\ (n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

[答案] (D).

[提示] 本题是一个具有一定难度的综合题. 主要考查了级数和级数收敛的概念、正项级数的比较判别法、收敛级数的运算等内容.

[解] 因为 $w_n<u_n<v_n$, 所以 $0<u_n-w_n<v_n-w_n$. 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(v_n-w_n)$收敛, 因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-w_n)$ 收敛, 于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

因为只有当级数收敛时, 才能比较其和的大小, 所以不能选(A); 选项(B), (C)将正项级数的结论用到了一般级数上, 显然不对. 例如取级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 可以说明(B)不对. 取级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$ 就可以说明(C)不对.

例 7.12 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$. (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$. (C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$. (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查级数的运算和收敛级数的性质.

[解] 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})=u_1+2\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛.

若取 $u_n=\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}$ 发散; 若取 $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散; 若取 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散. 因此选项(A), (B), (C)均不正确.

例 7.13 设 $u_n\neq0\ (n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

(A) 发散. (B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.　　　　　　(D) 收敛性根据所给条件不能确定.

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查了级数收敛的定义及正项级数的比阶判别法.

[解] 已知级数的前 n 项的部分和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{u_k}+\frac{1}{u_{k+1}}\right) \\ &= \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}-\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}, \end{aligned}$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1}$, 即原级数收敛.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right|}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{u_n}+\frac{n}{n+1}\frac{n+1}{u_{n+1}}\right|=2$, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right|$ 发散, 于是原级数条件收敛, 即选项(C)正确.

例 7.14　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, 下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$.

[答案] (B).

[提示] 本题本质上是一个正项级数判敛的简单题, 主要考查了正项级数的比阶判别法和调和级数的收敛性.

[解] 当存在非零常数 λ, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$ 时, 可知 $\{a_n\}$ 与 $\frac{1}{n}$ 在 $n\to\infty$ 时是同阶无穷小, 由于调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. 因此选项(B)正确.

本题中, 利用 $a_n=\frac{1}{n\ln n}$ 可以排除选项(A)和(D). 利用 $a_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 可以排除选项(C).

例 7.15　若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$

(A) 条件收敛.　　(B) 绝对收敛.　　(C) 发散.　　(D) 敛散性不能确定.

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查了幂级数收敛半径的概念及其在收敛区间内的绝对收敛性.

[解] 根据收敛半径的定义, $x=-1$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛区间的一个端点, 所以该级数的收敛半径为 2. 因此幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处绝对收敛, 即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

例 7.16　设函数

$$f(x)=x^2,\ x\in[0,1],$$

而

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, x\in(-\infty,+\infty),$$

其中
$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2\cdots,$$

则 $S(-1)$的值为

(A) -1.　　(B) $-\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) 1.

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查了傅里叶级数的狄利克雷收敛定理.

[解] $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$ 是对函数$f(x)=x^2$, $x\in[0,1]$作偶延拓得到的三角级数展开式，且延拓后得到的函数连续，根据狄利克雷收敛定理，$S(-1)=f(1)=1$.

例 7.17　求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\ln^n 3}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right]$的和.

[提示] 本题是一个简单的概念和计算题. 考查的知识点有级数部分和的定义、级数和的定义及收敛级数的加法运算性质.

[解] 因为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln^k 3}{2^k}=\frac{\ln 3}{2}\frac{1-\frac{\ln^n 3}{2^n}}{1-\frac{\ln 3}{2}},\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\ln^n 3}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right]&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\ln^k 3}{2^k}+\frac{1}{k(k+1)}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 3}{2}\frac{1-\frac{\ln^n 3}{2^n}}{1-\frac{\ln 3}{2}}+1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{\ln 3}{2-\ln 3}+1=\frac{2}{2-\ln 3}.\end{aligned}$$

例 7.18　已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2, \sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$,求级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和.

[提示] 本题是一个简单的概念和性质题. 主要考查了收敛级数的加法和数乘运算的性质.

[解] 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$,所以$\sum_{n=1}^{\infty}2u_{2n-1}=10$.又因为　$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2$.

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2u_{2n-1}-(-1)^{n-1}u_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2u_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=10-2=8.$$

例 7.19　判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$的敛散性.

[提示] 本题主要考查了正项级数的比较判别法和比阶判别法.

[解法 1] 因为$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1,$$

所以$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$与$\frac{1}{n\sqrt{n}}$在$n\to\infty$时是等价无穷小．又因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛．根据比阶判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$收敛．

［解法 2］ 因为

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)<\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛．由比较判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$收敛．

例 7.20 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ $(a>0)$的敛散性．

［提示］ 本题主要考查了正项级数的比值判别法和级数收敛的必要条件．

［解］ 记$u_n=\frac{a^n n!}{n^n}$，则$u_n>0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{\mathrm{e}},$$

所以根据比值判别法，当$a<\mathrm{e}$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ $(a>0)$收敛．当$a>\mathrm{e}$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ $(a>0)$发散．

当$a=\mathrm{e}$时，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$，所以此时比值判别法失效．但由于

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1,\text{（因为数列}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\text{单调递增趋于 e）}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，因而当$a=\mathrm{e}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ $(a>0)$发散．

例 7.21 已知函数$y=y(x)$满足等式$y'=x+y$，且$y(0)=1$．试讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$$

的收敛性．

［提示］ 本题是一个简单的综合题．考查的知识点有函数在零点的泰勒公式、正项级数的比阶判别法、简单微分方程求解．

［解］ 因为$y'=x+y$，所以$y''=1+y'$．由$y(0)=1$，得$y'(0)=1$，$y''(0)=2$．根据泰勒公式，得

$$\begin{aligned}y\left(\frac{1}{n}\right)&=y(0)+y'(0)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}y''(0)\left(\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

所以$\left|y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right|$在$n\to\infty$时与$\frac{1}{n^2}$等价，又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛．因此级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$$

绝对收敛．

注　本题也可先解定解问题$\begin{cases} y'-y=x \\ y(0)=1 \end{cases}$，得到$y(x)=2e^x-x-1$后再用泰勒公式讨论.

例 7.22　求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n-1}$的收敛域.

[提示]　本题主要考查了幂级数收敛半径的概念和利用定义求收敛半径的一般方法.

[解]　此时不能套用收敛半径的计算公式，而要对该级数用比值判别法求其收敛半径.

因为

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{3^{k+1}}x^{2k+1}\Big/\frac{1}{3^k}x^{2k-1}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{x^2}{3}=\frac{x^2}{3}.$$

所以，当$\frac{x^2}{3}<1$，即$|x|<\sqrt{3}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n-1}$绝对收敛；当$\frac{x^2}{3}>1$，即$|x|>\sqrt{3}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n-1}$发散.

根据收敛半径的定义可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n-1}$的收敛半径为$R=\sqrt{3}$.

又当$x=\sqrt{3}$时，$\frac{1}{3^n}\left(\sqrt{3}\right)^{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，级数发散；当$x=-\sqrt{3}$时，一般项为$-\frac{1}{\sqrt{3}}$，级数也发散. 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n-1}$的收敛域为$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

注　还可以将级数变形为$\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n}$，再令$u=x^2$，研究幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}u^n$的收敛半径和收敛域. 最后得到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^{2n-1}$的收敛域.

例 7.23　求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$的收敛域.

[提示]　本题主要考查了幂级数的标准形式及在标准形式下求收敛半径和收敛域的问题.

[解]　因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^{2n}(2x-3)^{2n-1}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}20^{2n}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2n-1}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{10^{2n+2}(2x-3)^{2n+1}}{10^{2n}(2x-3)^{2n-1}}\right|=20^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2,$$

所以，当$20^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2<1$，即$\left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{20}=0.05$时，级数绝对收敛；当$\left|x-\frac{3}{2}\right|>0.05$时，级数发散. 故幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$的收敛区间为$(1.45,1.55)$.

当$\left|x-\frac{3}{2}\right|=0.05$时，原级数的一般项分别是$u_n=-10$和$u_n=10$，所以原级数发散. 因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$的收敛域为$(1.45,1.55)$.

例 7.24　设$a_0,a_1,a_2,\cdots$为一等差数列，且$a_0\neq0$，求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛域.

[提示]　本题是一个简单综合题. 考查的知识点有等差数列、幂级数收敛半径的计算及级数收敛的必要条件等.

[解]　记$a_0,a_1,a_2,\cdots$的公差为d，则

$$a_n=a_0+nd,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_0+(n+1)d}{a_0+nd}\right|=1,$$

因此幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = 1$.

当 $x = \pm 1$ 时，原级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n a_n$. 由于 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n a_n$ 发散，于是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

例 7.25 将函数 $\ln \dfrac{1-x^5}{1-x}$ 展开为 $x=0$ 处的幂级数.

[提示] 本题主要考查了利用间接展开法将函数展开成幂级数的方法. 牵涉到的知识点有常见简单函数的麦克劳林级数及对数函数的运算性质等.

[解] 因为 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, x \in (-1,1]$,

所以

$$\ln \frac{1-x^5}{1-x} = \ln(1-x^5) - \ln(1-x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x^5)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{5n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (-1 \leqslant x < 1).$$

例 7.26 将函数 $f(x) = \arctan \dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

[提示] 本题主要考查了利用间接展开法将函数展开成幂级数的方法，牵涉到的知识点有幂级数的逐项积分性质、常见简单函数的麦克劳林级数及简单幂级数在指定点的值等.

[解] 因为 $f'(x) = -\dfrac{2}{1+4x^2} = -2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}, x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, 且

$$f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

所以

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - 2\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n t^{2n}\right] dt$$

$$= \frac{\pi}{4} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，函数 $f(x)$ 在 $x = \dfrac{1}{2}$ 处连续，所以

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

令 $x = \dfrac{1}{2}$，得

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

由于 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, 所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

注　级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和也可用其他方式求得，如：

考虑 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$，$x\in[-1,1]$，则

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-1,1).$$

且 $S(0)=0$. 所以

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x,\quad x\in[-1,1].$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=S(1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

[典型错误]　一部分考生由于基本运算不过关而出现了计算错误，这主要表现在函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 的一阶导数求不对. 也有一部分考生考虑问题不仔细、不完全从而导致结果错误，如漏掉等式 $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ 中的 $f(0)$ 或不考虑展开的范围等.

例 7.27　将函数 $f(x)=\frac{x-1}{4-x}$ 在 $x_0=1$ 点展成幂级数. 并求 $f^{(n)}(1)$ 的值.

[提示]　本题主要考查了利用间接展开法将函数展开成幂级数的方法，涉及到的知识点有常见简单函数的麦克劳林级数、级数的运算性质、泰勒级数的概念及函数展开成幂级数的唯一性.

[解]　将 $f(x)$ 视为 $(x-1)\frac{1}{4-x}$，因此只需将 $\frac{1}{4-x}$ 展成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(x-1)^n$ 便可.

因为

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{3-(x-1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}},$$

且

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\quad |x|<1.$$

所以

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x-1}{3}+\frac{(x-1)^2}{3^2}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{3^n}+\cdots\right],$$

于是

$$f(x)=\frac{x-1}{4-x}=\frac{1}{3}\left[(x-1)+\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(x-1)^3}{3^2}+\cdots+\frac{(x-1)^{n+1}}{3^n}+\cdots\right],\quad |x-1|<3.$$

由于 $f(x)$ 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的系数 $a_n=\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$. 所以

$$f^{(n)}(1)=(n!)a_n=\frac{n!}{3^n}.$$

例 7.28　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(n+1)x^n$ 在收敛区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$. 并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

[提示]　本题考查简单幂级数求和的问题. 考查的知识点有幂级数的逐项积分和逐项求导性质、简单幂

级数的和函数、变上限定积分函数的求导公式.

[解] 利用幂级数在收敛区间内的逐项积分和逐项微分性质，得

$$\int_0^x S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x (-1)^{n+1} n(n+1)x^n dx\right)(|x|<1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x^n)' x^2$$

$$= x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n\right)'$$

$$= x^2\left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{x^2}{(1+x)^2}.$$

将上式两端对上限 x 求导,得

$$S(x)=\frac{2x}{(1+x)^3},\quad |x|<1.$$

令 $x=\frac{1}{2}$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{27}.$$

例 7.29 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ 的和.

[提示] 本题主要考查常用简单函数的麦克劳林级数、幂级数的逐项求导性质及数项级数的线性运算性质.

[解法 1] 由于

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

对上式两边求导，得

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1},$$

所以

$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n,$$

此式两边再求导，得

$$xe^x + e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}.$$

在上式中令 $x=1$ 便得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = 2e$.

[解法 2] 由于 $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

$$=e+e=2e.$$

注 将函数展开成指定点的幂级数是级数部分的一类重要问题. 一般地都是利用几个简单函数的麦克劳林级数作间接展开，在展开过程中会用到幂级数的有关性质，如线性运算性质及逐项积分和逐项求导的性质等. 求数项级数的和一般原则是将此数项级数看成是某个函数项级数在一点的值. 先求函数项级数的和函数，

再求和函数在指定点的值.

例 7.30　设 $f(x)$是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$，写出 $f(x)$的傅里叶级数与其和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

[提示]　本题主要考查傅里叶级数的概念、傅里叶系数的计算、傅里叶级数收敛的狄利克雷定理.

[解]　根据傅里叶系数的计算公式，得

$$\begin{aligned}a_n &= \int_0^2 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\quad (n=1,2,3,\cdots),\end{aligned}$$

$$a_0 = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}b_n &= \int_0^2 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\quad (n=1,2,3,\cdots).\end{aligned}$$

所以 $f(x)$的傅里叶级数为

$$\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\cos n\pi x+(-1)^{n+1}\sin n\pi x\right].$$

其和函数的周期为 2，且

$$S(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 0, & 1<x<2.\end{cases}$$

令 $x=0$，得

$$S(0)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\right]=\frac{1}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\text{，且 } S(0)=0,$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

例 7.31　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

[提示]　本题考查的知识点有绝对收敛的概念、正项级数的比较判别法、收敛数列的有界性.

[证明]　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，所以数列$\{b_n\}$有界，即存在 $M>0$，使得对任意的 n，有

$$|b_n|\leqslant M.$$

于是

$$|a_nb_n|\leqslant M|a_n|,$$

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

例 7.32　已知 $a_n>0$，且 $a_{n+1}\leqslant a_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，证明级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛.

[提示] 本题考查的知识点主要有数列的单调有界有极限定理、交错级数的莱布尼茨判别法、数列极限的保序性质、几何级数的收敛性结论和正项级数的比较判别法.

[证明] 因为 $0<a_{n+1}\leqslant a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，记其值为 A.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，根据莱布尼茨判别法可知 $A>0$. 所以存在 $N>0$. 使得当 $n\geqslant N$ 时，有 $a_n>\dfrac{A}{2}$，故当$n\geqslant N$时，$\dfrac{1}{(1+a_n)^n}<\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{A}{2}\right)^n}$.

利用级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{A}{2}\right)^n}$ 的收敛性及比较判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛.

例 7.33 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，证明对任意的常数 $a>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^a}$ 收敛.

[提示] 本题考查的知识点有定积分的换元积分公式和比较定理、p 级数的收敛性结论和正项级数的比较判别法.

[证明] 令 $\tan x=t$，得

$$0<a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1},$$

所以

$$0<\frac{a^n}{n^a}<\frac{1}{(n+1)n^a}<\frac{1}{n^{1+a}}.$$

由于当 $a>0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+a}}$ 收敛，根据比较判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^a}$ 收敛.

例 7.34 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$，证明

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}.$$

[提示] 本题考查的知识点有幂级数的逐项求导性质、函数恒为常数的充分必要条件、函数的单侧极限.

[证明] 因为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为$[-1,1]$，所以函数 $f(x)$的定义域是$[-1,1]$. 函数 $f(1-x)$定义域是$[0,2]$.

令 $F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)$，则其定义域为$(0,1)$. 根据幂级数的可导性及逐项求导公式，得

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=-\frac{1}{x}\ln(1-x),$$

$$\begin{aligned}f'(1-x)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n^2}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}\\&=\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}=\frac{1}{1-x}\ln x,\end{aligned}$$

又

$$[\ln x\ln(1-x)]'=\frac{1}{x}\ln(1-x)-\frac{1}{1-x}\ln x,$$

所以

$$F'(x)=f'(x)+f'(1-x)+\left(\ln x\ln(1-x)\right)'=0,\ x\in(0,1),$$

于是
$$F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)\equiv C,\ x\in(0,1).$$

在上式两端令 $x\to1^-$ 取极限，得

$$\begin{aligned}C&=\lim_{x\to1^-}F(x)\\&=f(1)+f(0)+\lim_{x\to1^-}\ln[1+(x-1)]\ln(1-x)\\&=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\end{aligned}$$

所以
$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6},\ x\in(0,1).$$

八、常微分方程

·考试内容与要求·

考试内容

常微分方程的基本概念　变量可分离的微分方程　齐次微分方程　一阶线性微分方程　伯努利(Bernoulli)方程　全微分方程　可用简单的变量代换求解的某些微分方程　可降阶的高阶微分方程　线性微分方程　解的性质及解的结构定理　二阶常系数齐次线性微分方程　高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程　简单的二阶常系数非齐次线性微分方程　欧拉(Euler)方程　微分方程的简单应用

考试要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.
2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法.
3. 会解齐次微分方程、伯努利方程和全微分方程，会用简单的变量代换解某些微分方程.
4. 会用降阶法解下列微分方程：$y^{(n)}=f(x),y''=f(x,y')$和 $y''=f(y,y')$.
5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构.
6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.
7. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.
8. 会解欧拉方程.
9. 会用微分方程解决一些简单的应用问题.

·考试内容解析·

(一) 常微分方程的有关概念

含有一元未知函数及其导数的方程称为常微分方程，简称微分方程．微分方程中含有的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶．若记自变量为 x，未知函数为 $y=y(x)$，则 n 阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0\ .$$

若函数$f(x)$在 I 上存在 n 阶导数，且满足方程

$$F(x,f(x),f'(x),\cdots,f^{(n)}(x))=0\quad(x\in I),$$

则称$f(x)$是微分方程$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 在 I 上的一个解．n 阶微分方程的含有 n 个相互独立的任意常数的解称为它的通解，不含有任意常数的解称为它的特解，由通解确定特解的条件称为定解条件．一般地，我们所考虑的定解条件都是所谓的初始条件．例如，一阶微分方程的初始条件为$y(x_0)=y_0$；二阶微分方程的初始条件为$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y_0'$ 等.

微分方程的解$y=y(x)$所表示的曲线称为微分方程的积分曲线.