$\dfrac{\varphi(y)+y^2}{2x^2+y^4}$. 因 $c'(x)$仅与 x 有关，知 $\varphi(y)+y^2=0$，故 $\varphi(y)=-y^2$.

[典型错误] (1)对于(Ⅰ)证明．绝大多数学生都未能正确添加辅助曲线来证明结论，而是采取了挖去奇点的方法，当然证明不下去．说明他们在学习这一部分知识时，只死记某一方法，而未掌握思想；(2)考生能用$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$导出关于$\varphi(y)$的方程，但在求解时未注意正确地确定积分中的常数 C.

七、无穷级数(数学二不要求)

·考试内容与要求·

考试内容

常数项级数的收敛与发散的概念　收敛级数的和的概念　级数的基本性质与收敛的必要条件　几何级数与 p 级数及其收敛性　正项级数收敛性的判别法　交错级数与莱布尼茨定理　任意项级数的绝对收敛与条件收敛　函数项级数的收敛域与和函数的概念　幂级数及其收敛半径、收敛区间(指开区间)和收敛域　幂级数的和函数　幂级数在其收敛区间内的基本性质　简单幂级数的和函数的求法　初等函数的幂级数展开式　函数的傅里叶(Fourier)系数与傅里叶级数　狄利克雷(Dirichlet)定理　函数在$[-l,l]$上的傅里叶级数　函数在$[0,l]$上的正弦级数和余弦级数

考试要求

1．理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握级数的基本性质及收敛的必要条件．

2．掌握几何级数与 p 级数的收敛与发散的条件．

3．掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法，会用根值判别法．

4．掌握交错级数的莱布尼茨判别法．

5．了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系．

6．了解函数项级数的收敛域及和函数的概念．

7．理解幂级数收敛半径的概念，掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法．

8．了解幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)，会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和．

9．了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件．

10．掌握 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$及$(1+x)^{\alpha}$ 的麦克劳林展开式，会用它们将一些简单函数间接展开成幂级数．

11．了解傅里叶级数的概念和狄里克雷收敛定理，会将定义在$[-l,l]$上的函数展开为傅里叶级数，会将定义在$[0,l]$上的函数展开为正弦级数与余弦级数，会写出傅里叶级数的和的表达式．

·考试内容解析·

(一) 数项级数

1．数项级数的概念和性质

(1) 基本概念

定义 7.1　设$\{u_n\}$是一个数列，则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots \tag{7.1}$$

为一个数项级数，简称级数，u_n 称为数项级数(7.1)的通项．$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ 称为数项级数(7.1)的前 n 项部分和．

定义 7.2　若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$有极限，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 称为此级数

的和，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$．当 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在时，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散．

利用收敛定义，易知当 $|q|<1$ 时，几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛，和为 $\frac{1}{1-q}$；当 $|q|\geqslant 1$ 时，几何级数发散．

定理 7.1 （级数收敛的必要条件） 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$．

(2) 收敛级数的性质

1° 数乘　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，α 是任意实数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$．

2° 加法　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n .$$

注　由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，得不到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛．例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$．

3° 改变级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的任意有限项的值不影响其敛散性．

4° 重组　收敛级数加括号后所形成的级数仍收敛，且和的值不变．

注　也就是说，由加括号后所形成的级数发散就能推出原级数发散．此性质类似于有限个数的加法所满足的结合律．注意此性质的反面并不成立，即一个级数加括号后所形成的级数收敛并不能保证原级数收敛．

2．正项级数

(1) 正项级数概念与特点

定义 7.3　通项非负的级数称为正项级数．

正项级数的特点　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 是一单调递增数列．

定理 7.2 （正项级数收敛的充分必要条件） 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界．

当 $p>1$ 时，p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，p 级数发散．

(2) 正项级数的判别法

定理 7.3 （比较判别法） 若存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $0\leqslant u_n\leqslant v_n$，则

(1) 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散．

定理 7.4 （比阶判别法） 设 $u_n\geqslant 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n = C$，则

(1) 当 $0\leqslant C<+\infty$，且 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $0<C\leqslant+\infty$，且 $p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散．

注　当 $u_n\geqslant 0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性可以由无穷小量 u_n $(n\to\infty)$ 的阶来判断．

定理 7.5 （比值判别法，D'Alembert 判别法） 设 $u_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = C$，则

(1) 当 $C<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $C>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，且 $\lim_{n\to\infty} u_n=+\infty$；

(3) 当 $C=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性无法判断.

定理 7.6 （根值判别法，Cauchy 根值判别法） 设 $u_n>0$，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=C$，则

(1) 当 $C<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $C>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，且 $\lim_{n\to\infty} u_n=+\infty$；

(3) 当 $C=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性无法判断.

3. 交错级数

定义 7.4 设 $u_n>0$，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 为交错级数.

定理 7.7 （莱布尼茨(Leibniz)判别法） 若 $u_n>0$ $(n=1,2,3,\cdots)$满足

(1) 数列 $\{u_n\}$ 单调递减，即 $u_n\geqslant u_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$，

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛，且 $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_k\right|\leqslant u_{n+1}$.

定理 7.7 中的两个条件又称为莱布尼茨条件.

4. 任意项级数

(1) 绝对收敛与条件收敛

定义 7.5 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

注 绝对收敛级数可以重排，即绝对收敛级数重排后所得级数的敛散性与和不变. 这类似于有限个数加法的交换律.

(2) 任意项级数的判别法

定理 7.8 （绝对值判别法） 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 即绝对收敛的级数一定收敛.

（二）幂级数

1. 函数项级数的有关概念

定义 7.6 设函数 $u_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$都在 D 上有定义，则称表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots$$

为定义在 D 上的一个函数项级数，$u_n(x)$称为通项，$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 称为部分和函数.

定义 7.7 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在 D 上的一个函数项级数，$x_0\in D$. 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛，则称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一个收敛点. 所有收敛点构成的集合称为级数的收敛域.

定义 7.8 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 I，则任给 $x \in I$，存在唯一的实数 $S(x)$，使得 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 成立．定义域为 I 的函数 $S(x)$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数．

注 求函数项级数的收敛域时，主要是利用收敛域的定义及有关的数项级数的判别法．

2．幂级数的有关概念

(1) 幂级数的定义

定义 7.9 设 $\{a_n\}(n=0,1,2,3,\cdots)$ 是一实数列，则称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的函数项级数为 x_0 处的幂级数．

$x_0=0$ 时的幂级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$．

(2) 幂级数的收敛半径

定理 7.9 （阿贝尔(Abel)定理） 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处收敛，则当 $|x|<|x_0|$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛．

推论 7.1 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_1 处发散，则当 $|x|>|x_1|$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散．

推论 7.2 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0 \neq 0$ 处收敛，在 x_1 处发散，则存在唯一的实数 $R>0$，使得

(1) 当 $|x|<R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；

(2) 当 $|x|>R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散．

定义 7.10 若 $R \geqslant 0$ 满足条件：

(1) 当 $|x|<R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；

(2) 当 $|x|>R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散，

则称 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径，开区间 $(-R,R)$ 称为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间．

推论 7.2 说明，在 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 既有非零收敛点，又有发散点时，它的收敛半径是存在且唯一的．

当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 没有非零收敛点时，规定其收敛半径为零；当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 没有发散点时，规定其收敛半径为 $+\infty$．另外，由收敛半径的定义还可以知道，使得幂级数条件收敛的点只能是其收敛区间的端点．

(3) 收敛半径的求法

根据收敛半径的定义，我们一般用正项级数的比值判别法或根值判别法来求幂级数收敛半径的值．

例如，对于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若 $a_n \neq 0$（即不缺项），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=\rho|x|$，所以，当 $\rho|x|<1$，即 $|x|<\dfrac{1}{\rho}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛，当 $\rho|x|>1$，即 $|x|>\dfrac{1}{\rho}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散．因此，由收敛半径的定义便得 $R=\dfrac{1}{\rho}$．特别地，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 时，$R=+\infty$；当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$ 时，$R=0$．

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$，若 $a_n \neq 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{2(n+1)}}{a_n x^{2n}}\right|=\rho x^2$，所以，当 $\rho x^2<1$，

即 $|x|<\frac{1}{\sqrt{\rho}}$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 绝对收敛，当 $\rho x^2>1$，即 $|x|>\frac{1}{\sqrt{\rho}}$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 发散．因此，根据收敛半径的定义便得 $R=\frac{1}{\sqrt{\rho}}$．特别地，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 时，$R=+\infty$；当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$时，$R=0$．

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，上述方法可以写成以下定理．

定理 7.10 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的系数 a_n 满足 $a_n\neq0$．且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$．则其收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$．

类似地还有以下定理．

定理 7.11 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的系数 a_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则其收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$．

注 需要注意的是，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 存在(或是无穷大)仅仅是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$ 的一个充分条件．因此，由幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，并不能保证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R}$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$．

3．幂级数的性质

(1) 加法　若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R_1，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径为 R_2．则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 $R=\min\{R_1,R_2\}$，且

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\ x\in(-R,R).$$

(2) 和函数的连续性　幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$在其收敛域 I 上连续．即任给 $x_0\in I$，有

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0}a_nx^n\right).$$

(3) 可积性与逐项积分公式　幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$在其收敛域 I 上可积．且可逐项积分，即任给 $x\in I$，有

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_nt^n\mathrm{d}t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

其中，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$称为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的积分级数，若记 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径为 R_1，则 $R\leqslant R_1$．

(4) 可导性与逐项求导公式　幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$在其收敛区间$(-R,R)$内可导，且可逐项求导，即任给 $x\in(-R,R)$，有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

其中，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$称为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的导级数，若记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径为 R_2，则 $R\leqslant R_2$．

由性质(3)与(4)易知，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径相等．即 $R=R_1=R_2$．

4．函数展开成幂级数

(1) 概念

定义 7.11 设函数 $f(x)$在区间 D 上有定义，$x_0\in D$，若

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

对任意的 $x\in D$ 都成立，则称 $f(x)$在区间 D 上能展开成x_0 处的幂级数.

由幂级数的性质易知，若 $f(x)$在区间 D 上能展开成x_0 处的幂级数．则 $f(x)$在区间 D 内存在任意阶导数.

(2) 展开形式的唯一性

定理 7.12 若函数 $f(x)$在区间 D 上能展开成x_0 处的幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.$$

则其展开系数为

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

注 展开形式的唯一性是能利用间接展开法将函数展开成幂级数的主要理论根据.

(3) 泰勒级数与麦克劳林级数

定义 7.12 若 $f(x)$在 x_0 处有定义，且在 x_0 处的各阶导数 $f^{(n)}(x_0)(n=1,2,3,\cdots)$都存在，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$在 x_0 处的泰勒(Taylor)级数．$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=0,1,2,\cdots)$称为 $f(x)$在 x_0 处的泰勒系数．特别地，$x_0=0$ 处的泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为函数$f(x)$的麦克劳林(Maclaurin)级数.

定理 7.13 （函数展开成泰勒级数的充要条件） 函数 $f(x)$在 $x_0\in D$ 处的泰勒级数在D 上收敛到$f(x)$的充分必要条件是：$f(x)$在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

的余项 $R_n(x)$在 D 上收敛到零，即对任意的 $x\in D$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

定理 7.14 函数 $f(x)$在 $x_0\in D$ 处的泰勒级数在D 上收敛到$f(x)$的一个充分条件是：$f(x)$的各阶导数 $f^{(n)}(x)(n=1,2,3,\cdots)$在 D 上一致有界．即存在 $M>0$，使得$|f^{(n)}(x)|\leqslant M$ 对任意的$n\in\mathbf{N}_+$和任意的 $x\in D$ 都成立.

(4) 直接展开法

直接展开法指的是：利用泰勒级数的定义及泰勒级数收敛的充要条件，将函数在某个区间上直接展开成指定点的泰勒级数的方法.

由直接展开法易知函数 e^x，$\ln(1+x)$，$\cos x$，$\sin x$，$(1+x)^a$ 的麦克劳林级数展开式为：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\quad x\in(-1,1).$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n,$$

其中．当 $a\leqslant-1$ 时，$x\in(-1,1)$；当 $-1<a<0$ 时，$x\in(-1,1]$；当 $a>0$ 时，$x\in[-1,1]$.

特别地，当 $\alpha=-1$ 时，有

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1).$$

(5) 间接展开法

间接展开法指的是：通过一定运算将函数转化为其他函数，进而利用新函数的幂级数展开将原来函数展开为幂级数的方法．所用的运算主要是加法运算，数乘运算，(逐项)积分运算和(逐项)求导运算．利用的幂级数展开公式主要是一些简单函数的麦克劳林展开公式，上述几个简单函数就是常用的几个．间接展开法是将函数展开成幂级数的主要方法．

5．简单幂级数的和函数及简单数项级数求和

求简单幂级数的和函数的问题恰好是将简单函数展开成幂级数问题的反面．下面通过几个具体例子来说明此类问题的求解方法．

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数 $S(x)$．

令

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

则 $S_1(x)$的定义域为$(-1,1)$，且 $S(x)=xS_1(x)$．任给 $x\in(-1,1)$，由逐项积分公式得，

$$\int_0^x S_1(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}, \quad x\in(-1,1).$$

因此，

$$S_1(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}, \quad x\in(-1,1),$$

所以，

$$S(x)=xS_1(x)=\frac{x}{(1-x)^2}, \quad x\in(-1,1).$$

(2) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$ 的和函数．

令

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

则 $S_1(x)$的定义域为$[-1,1)$，且 $S(x)=xS_1(x)$．任给 $x\in(-1,1)$，由逐项求导公式得，

$$S'_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}, \quad x\in(-1,1).$$

因此，

$$S_1(x)=S_1(x)-S_1(0)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x), \quad x\in(-1,1).$$

所以，

$$S(x)=xS_1(x)=-x\ln(1-x), \quad x\in(-1,1).$$

由 $S(x)\in C[-1,1)$得，$S(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}S(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}[-x\ln(1-x)]=\ln 2$.

(3) 求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和．

考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，则其收敛域为$[-1,1]$．若记其和函数为 $S(x)$，则

$$S(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

由于

$$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)\,dt$$

$$=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x,x\in(-1,1).$$

又因为 $S(x)\in C[-1,1]$，所以

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\arctan x=\frac{\pi}{4}.$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

（三）傅里叶级数

1. 周期为 2π 的傅里叶级数

(1) 概念

定义 7.13 设函数 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，且在$[-\pi,\pi]$上可积，则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

为 $f(x)$的傅里叶系数；称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为 $f(x)$的以 2π 为周期的傅里叶级数．记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

注 根据周期函数的性质，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos nx\,dx$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\sin nx\,dx$.

注 根据奇函数和偶函数的性质．当 $f(x)$是周期为 2π 的可积奇函数时，$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$，$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\ (n=1,2,3,\cdots)$，此时 $f(x)$的以 2π 为周期的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

称为正弦级数．

类似地，当 $f(x)$是周期为 2π 的可积偶函数时，其以 2π 为周期的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

称为余弦级数．其中 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$.

(2) 傅里叶级数的收敛性

定理 7.15 （狄里克雷(Dirichlet)收敛定理） 设 $f(x)$是周期为 2π 的可积函数，且满足条件：

(1) 在$[-\pi,\pi]$上，$f(x)$连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 在$[-\pi,\pi]$上，$f(x)$只有有限个单调区间，

则 $f(x)$的以 2π 为周期的傅里叶级数收敛，且

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

注 在 $f(x)$的连续点处，$S(x)$与 $f(x)$的值相等；在 $f(x)$的第一类间断点处，$S(x)$的值等于在

$f(x)$在此点的左、右极限的平均值.

2. 周期为 $2l$ 的傅里叶级数

定义 7.14　设函数 $f(x)$是周期为 $2l$ 的周期函数，且在$[-l,l]$上可积，则称

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

为 $f(x)$的以 $2l$ 为周期的傅里叶系数；称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

为 $f(x)$的以 $2l$ 为周期的傅里叶级数. 记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

注　周期为 $2l$ 的傅里叶级数的收敛性结论与周期为 2π 的傅里叶级数一样.

3. 只在$[0,l]$上有定义的函数的傅里叶级数展开

定义在$[0,l]$上的函数可以有多种方式展开成三角级数. 但常用的方式只有三种，即周期奇延拓、周期偶延拓、周期延拓. 三种延拓方式得到的三角级数展开式分别为：

(1) 正弦级数展开

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad x\in[0,l],$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

(2) 余弦级数展开

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad x\in[0,l],$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

(3) 三角级数展开

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{l}x\right),\quad x\in[0,l],$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{2n\pi}{l}x\,dx\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{2n\pi}{l}x\,dx\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

· 例 题 详 解 ·

例 7.1　数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$的和为________.

[答案]　$\frac{1}{2}$.

[提示]　本题考查了级数和的概念以及利用部分和的极限求级数和的值的方法.

[解]　因为 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}$，即原级数的和为$\dfrac{1}{2}$.

例 7.2　数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ 的和为________.

[答案] $\cos 1$.

[提示] 本题考查了求级数和的另一常用方法，即将数项级数看成是一个函数项级数在某点取值时的情况，求函数项级数的和函数在此点的值.

[解] 由于 $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}(-\infty<x<+\infty)$，令 $x=1$ 便得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1$.

例 7.3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{2n}$ 在 $x=2$ 处条件收敛，则其收敛域为________.

[答案] $[0,2]$.

[提示] 本题主要考查了幂级数收敛半径和收敛域的概念.

[解] 根据题意，利用收敛半径的定义可知 $x=2$ 是收敛区间的端点. 所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{2n}$ 的收敛半径为 1. 又因为在 $x=0$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 条件收敛.因此原级数的收敛域是$[0,2]$.

例 7.4 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n}$的收敛半径为________.

[答案] $\sqrt{3}$.

[提示] 本题主要考查了利用收敛半径概念和正项级数的比值判别法求幂级数收敛半径的方法.

[解] 因为幂级数缺奇次方项，不能直接用收敛半径的计算公式.

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}x^{2(n+1)}\frac{2^n+(-3)^n}{nx^{2n}}\right|=\frac{1}{3}x^2,$$

所以，根据比值判别法，当 $|x|<\sqrt{3}$时，原级数绝对收敛. 当 $|x|>\sqrt{3}$时，原级数发散. 由收敛半径的定义便知$\sqrt{3}$就是该级数的收敛半径.

例 7.5 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{1}{2^n}\right)x^n$ 的收敛域为________.

[答案] $[-1,1]$.

[提示] 本题主要考查了幂级数收敛域的概念、收敛半径的计算以及幂级数的加法运算.

[解] 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n+1}}=1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$，所以幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}x^n$ 的收敛半径为 1. 收敛域为$[-1,1]$；幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$ 的收敛半径为 2,收敛域为$(-2,2)$.

因此级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{1}{2^n}\right)x^n$ 在$[-1,1]$上收敛，在$(-2,-1)\cup(1,2)$内发散. 根据阿贝尔定理又知该级数在$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$也发散. 于是该级数的收敛域是$[-1,1]$.

注 常用的求收敛半径的方法是：(1)收敛半径的定义，例如 7.3 题. (2)收敛半径的计算公式，例如 7.5 题. (3)正项级数的比值判别法或根值判别法及收敛半径的定义，例如 7.4 题. 另外根据级数之间的相互关系，也可以求得幂级数的收敛半径，例如积分级数、导级数的收敛半径与原级数的收敛半径的关系等.

例 7.6 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 收敛于________.

[答案] $\frac{\pi^2}{2}$.

[提示] 本题主要考查了傅里叶级数的狄利克雷收敛定理.

[解] 记 $S(x)$为函数 $f(x)$以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数，根据狄利克雷收敛定理，有

$$S(\pi)=\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(\pi+0)]=\frac{1}{2}[(1+\pi^2)+(-1)]=\frac{\pi^2}{2}.$$

例 7.7 设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\cos nx\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，则 $a_2=$ ________.

[答案] 1.

[提示] 本题主要考查了将函数展开成余弦级数的有关内容.

[解] 由于 a_n 是 x^2 在 $[-\pi,\pi]$ 上周期为 2π 的傅里叶系数，根据傅里叶系数的计算公式，有

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}x\cos 2x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= 1. \end{aligned}$$

[典型错误] 常见错误主要是定积分的计算不正确. 傅里叶系数的公式记错也占了一定比例，如写成 $a_2=\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos 2x\mathrm{d}x$ 等. 对题意理解不确切也影响了本题的得分. 如有的考生就只填上了公式 $a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos 2x\mathrm{d}x$ 或 $a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos 2x\mathrm{d}x$.

例 7.8 设常数 $a>0$，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_{2n-1}}}{\sqrt{n^2+a}}$

(A) 发散. (B) 条件收敛. (C) 绝对收敛. (D) 敛散性与 a 的值有关.

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查了正项级数收敛的充分必要条件和比较判别法、收敛级数的加法运算和绝对值判别法.

[解] 因为 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k-1}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{2n-1} a_k$，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛. 又因为

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt{a_{2n-1}}}{\sqrt{n^2+a}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(a_{2n-1}+\frac{1}{n^2+a}\right).$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a}$ 收敛，所以原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_{2n-1}}}{\sqrt{n^2+a}}$ 绝对收敛.

例 7.9 设 $a_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(n=1,2,3,\cdots)$，则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都收敛. (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散. (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查了交错级数的莱布尼茨判别法、常见的等价无穷小量及正项级数的比阶判别法.

[解] 因为 $a_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是满足莱布尼茨条件的交错级数. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 因为 $a_n^2=\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 在 $n\to\infty$ 时与 $\frac{1}{n}$ 是等价无穷小量. 且调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散.

例 7.10 设 $0<a_n<\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$，则下列级数中肯定收敛的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. (C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$. (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$.

[答案] D.

[提示] 本题主要考查了正项级数的比阶判别法和收敛级数的性质.

[解] 因为 $0<a_n<\frac{1}{n}$, 所以 $0<\left|(-1)^n a_n^2\right|<\frac{1}{n^2}$. 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$ 绝对收敛.

另外, 取 $a_n=\frac{1}{2n}$, 可以说明不能选(A)及(C); 取 $a_{2n-1}=\frac{1}{(2n-1)^2}$, $a_{2n}=\frac{1}{4n}$, 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n}-a_{2n-1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}\left[1-\frac{4n}{(2n-1)^2}\right]$ 发散, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散. 总之, 选项(D)正确.

例 7.11 下列命题中正确的是

(A) 若 $u_n<v_n\ (n=1,2,3,\cdots)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

(B) 若 $u_n<v_n\ (n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(D) 若 $w_n<u_n<v_n\ (n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

[答案] (D).

[提示] 本题是一个具有一定难度的综合题. 主要考查了级数和级数收敛的概念、正项级数的比较判别法、收敛级数的运算等内容.

[解] 因为 $w_n<u_n<v_n$, 所以 $0<u_n-w_n<v_n-w_n$. 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(v_n-w_n)$ 收敛, 因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-w_n)$ 收敛, 于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

因为只有当级数收敛时, 才能比较其和的大小, 所以不能选(A); 选项(B), (C)将正项级数的结论用到了一般级数上, 显然不对. 例如取级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 可以说明(B)不对. 取级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$ 就可以说明(C)不对.

例 7.12 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$.　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$.　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$.　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查级数的运算和收敛级数的性质.

[解] 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})=u_1+2\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 收敛.

若取 $u_n=\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}$ 发散; 若取 $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散; 若取 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. 因此选项(A), (B), (C)均不正确.

例 7.13 设 $u_n\neq0\ (n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

(A) 发散.　(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.　　　　　(D) 收敛性根据所给条件不能确定.

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查了级数收敛的定义及正项级数的比阶判别法.

[解] 已知级数的前 n 项的部分和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{k+1}}\right) \\ &= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} - \cdots + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{u_1} + (-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}, \end{aligned}$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n} = 1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n} = 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{u_1}$，即原级数收敛.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right|}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{u_n} + \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{u_{n+1}}\right| = 2$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right|$ 发散，于是原级数条件收敛，即选项(C)正确.

例 7.14 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$.

[答案] (B).

[提示] 本题本质上是一个正项级数判敛的简单题，主要考查了正项级数的比阶判别法和调和级数的收敛性.

[解] 当存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$ 时，可知 $\{a_n\}$ 与 $\frac{1}{n}$ 在 $n\to\infty$ 时是同阶无穷小，由于调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 因此选项(B)正确.

本题中，利用 $a_n = \frac{1}{n\ln n}$ 可以排除选项(A)和(D)，利用 $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 可以排除选项(C).

例 7.15 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 x = −1 处条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

(A) 条件收敛.　　(B) 绝对收敛.　　(C) 发散.　　(D) 敛散性不能确定.

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查了幂级数收敛半径的概念及其在收敛区间内的绝对收敛性.

[解] 根据收敛半径的定义，$x = -1$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛区间的一个端点，所以该级数的收敛半径为 2. 因此幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = 2$ 处绝对收敛，即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

例 7.16 设函数

$$f(x)=x^2,\ x\in[0,1],$$

而

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, x\in(-\infty,+\infty),$$

其中
$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2\cdots,$$

则 $S(-1)$的值为

(A) -1. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查了傅里叶级数的狄利克雷收敛定理.

[解] $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$ 是对函数 $f(x)=x^2$, $x\in[0,1]$作偶延拓得到的三角级数展开式，且延拓后得到的函数连续，根据狄利克雷收敛定理，$S(-1)=f(1)=1$.

例 7.17 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\ln^n 3}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right]$ 的和.

[提示] 本题是一个简单的概念和计算题. 考查的知识点有级数部分和的定义、级数和的定义及收敛级数的加法运算性质.

[解] 因为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln^k 3}{2^k}=\frac{\ln 3}{2}\frac{1-\frac{\ln^n 3}{2^n}}{1-\frac{\ln 3}{2}},\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\ln^n 3}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right]&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\ln^k 3}{2^k}+\frac{1}{k(k+1)}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 3}{2}\frac{1-\frac{\ln^n 3}{2^n}}{1-\frac{\ln 3}{2}}+1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{\ln 3}{2-\ln 3}+1=\frac{2}{2-\ln 3}.\end{aligned}$$

例 7.18 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$,求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和.

[提示] 本题是一个简单的概念和性质题. 主要考查了收敛级数的加法和数乘运算的性质.

[解] 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2u_{2n-1}=10$.又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2$.

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2u_{2n-1}-(-1)^{n-1}u_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2u_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=10-2=8.$$

例 7.19 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$的敛散性.

[提示] 本题主要考查了正项级数的比较判别法和比阶判别法.

[解法 1] 因为$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1,$$

所以$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$与$\frac{1}{n\sqrt{n}}$在$n\to\infty$时是等价无穷小．又因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛．根据比阶判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$收敛．

［解法 2］ 因为

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)<\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛．由比较判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$收敛．

例 7.20 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ $(a>0)$的敛散性．

［提示］ 本题主要考查了正项级数的比值判别法和级数收敛的必要条件．

［解］ 记$u_n=\frac{a^n n!}{n^n}$，则$u_n>0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{\mathrm{e}},$$

所以根据比值判别法，当$a<\mathrm{e}$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ $(a>0)$收敛．当$a>\mathrm{e}$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ $(a>0)$发散．

当$a=\mathrm{e}$时，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$，所以此时比值判别法失效．但由于

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1,\text{（因为数列}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\text{单调递增趋于 e）}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，因而当$a=\mathrm{e}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ $(a>0)$发散．

例 7.21 已知函数$y=y(x)$满足等式$y'=x+y$，且$y(0)=1$．试讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$$

的收敛性．

［提示］ 本题是一个简单的综合题．考查的知识点有函数在零点的泰勒公式、正项级数的比阶判别法、简单微分方程求解．

［解］ 因为$y'=x+y$，所以$y''=1+y'$．由$y(0)=1$，得$y'(0)=1$，$y''(0)=2$．根据泰勒公式，得

$$\begin{aligned}y\left(\frac{1}{n}\right)&=y(0)+y'(0)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}y''(0)\left(\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

所以$\left|y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right|$在$n\to\infty$时与$\frac{1}{n^2}$等价，又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛．因此级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$$

绝对收敛．

注　本题也可先解定解问题$\begin{cases} y' - y = x \\ y(0) = 1 \end{cases}$，得到 $y(x) = 2e^x - x - 1$ 后再用泰勒公式讨论.

例 7.22　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^{2n-1}$ 的收敛域.

[提示]　本题主要考查了幂级数收敛半径的概念和利用定义求收敛半径的一般方法.

[解]　此时不能套用收敛半径的计算公式，而要对该级数用比值判别法求其收敛半径.

因为

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{3^{k+1}} x^{2k+1} \Big/ \frac{1}{3^k} x^{2k-1} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{3} = \frac{x^2}{3}.$$

所以，当$\frac{x^2}{3}<1$，即$|x|<\sqrt{3}$时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^{2n-1}$ 绝对收敛；当$\frac{x^2}{3}>1$，即$|x|>\sqrt{3}$时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^{2n-1}$ 发散.

根据收敛半径的定义可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径为 $R=\sqrt{3}$.

又当 $x=\sqrt{3}$ 时，$\frac{1}{3^n}\left(\sqrt{3}\right)^{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$，级数发散；当 $x=-\sqrt{3}$ 时，一般项为 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$，级数也发散．故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^{2n-1}$ 的收敛域为$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

注　还可以将级数变形为 $\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^{2n}$，再令 $u=x^2$，研究幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} u^n$ 的收敛半径和收敛域，最后得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^{2n-1}$ 的收敛域.

例 7.23　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$ 的收敛域.

[提示]　本题主要考查了幂级数的标准形式及在标准形式下求收敛半径和收敛域的问题.

[解]　因为 $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{2n}(2x-3)^{2n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 20^{2n}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2n-1}$，且

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{10^{2n+2}(2x-3)^{2n+1}}{10^{2n}(2x-3)^{2n-1}} \right| = 20^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2,$$

所以，当 $20^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2<1$，即$\left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{20}=0.05$ 时，级数绝对收敛；当$\left|x-\frac{3}{2}\right|>0.05$ 时，级数发散．故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$ 的收敛区间为$(1.45,1.55)$.

当$\left|x-\frac{3}{2}\right|=0.05$ 时，原级数的一般项分别是 $u_n=-10$ 和 $u_n=10$，所以原级数发散．因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$ 的收敛域为$(1.45,1.55)$.

例 7.24　设$a_0,a_1,a_2,\cdots$为一等差数列，且 $a_0\neq 0$，求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域.

[提示]　本题是一个简单综合题．考查的知识点有等差数列、幂级数收敛半径的计算及级数收敛的必要条件等.

[解]　记$a_0,a_1,a_2,\cdots$的公差为 d，则

$$a_n = a_0 + nd,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_0+(n+1)d}{a_0+nd} \right| = 1,$$

因此幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R=1$.

当 $x=\pm 1$ 时，原级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n a_n$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. 所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n a_n$ 发散，于是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

例 7.25 将函数 $\ln\dfrac{1-x^5}{1-x}$ 展开为 $x=0$ 处的幂级数.

[提示] 本题主要考查了利用间接展开法将函数展开成幂级数的方法、牵涉到的知识点有常见简单函数的麦克劳林级数及对数函数的运算性质等.

[解] 因为 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, x\in(-1,1]$,

所以

$$\begin{aligned}\ln\frac{1-x^5}{1-x} &= \ln(1-x^5)-\ln(1-x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x^5)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}\\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{5n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad(-1\leqslant x<1).\end{aligned}$$

例 7.26 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

[提示] 本题主要考查了利用间接展开法将函数展开成幂级数的方法，牵涉到的知识点有幂级数的逐项积分性质、常见简单函数的麦克劳林级数及简单幂级数在指定点的值等.

[解] 因为 $f'(x)=-\dfrac{2}{1+4x^2}=-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n}, x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，且

$$f(0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

所以

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt\\ &= \frac{\pi}{4}-2\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n t^{2n}\right]dt\\ &= \frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处连续，所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

令 $x=\dfrac{1}{2}$，得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

由于 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

注　级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和也可用其他方式求得，如：

考虑 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$，$x\in[-1,1]$，则

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in(-1,1).$$

且 $S(0)=0$. 所以

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\arctan x,\quad x\in[-1,1].$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=S(1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

[典型错误]　一部分考生由于基本运算不过关而出现了计算错误，这主要表现在函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 的一阶导数求不对. 也有一部分考生考虑问题不仔细、不完全从而导致结果错误，如漏掉等式 $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt$ 中的 $f(0)$ 或不考虑展开的范围等.

例 7.27　将函数 $f(x)=\frac{x-1}{4-x}$ 在 $x_0=1$ 点展成幂级数. 并求 $f^{(n)}(1)$ 的值.

[提示]　本题主要考查了利用间接展开法将函数展开成幂级数的方法，涉及到的知识点有常见简单函数的麦克劳林级数、级数的运算性质、泰勒级数的概念及函数展开成幂级数的唯一性.

[解]　将 $f(x)$ 视为 $(x-1)\frac{1}{4-x}$，因此只需将 $\frac{1}{4-x}$ 展成 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-1)^n$ 便可.

因为

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{3-(x-1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}},$$

且

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\quad |x|<1.$$

所以

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{3}\left[1+\frac{x-1}{3}+\frac{(x-1)^2}{3^2}+\cdots+\frac{(x-1)^n}{3^n}+\cdots\right],$$

于是

$$f(x)=\frac{x-1}{4-x}=\frac{1}{3}\left[(x-1)+\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(x-1)^3}{3^2}+\cdots+\frac{(x-1)^{n+1}}{3^n}+\cdots\right],\quad |x-1|<3.$$

由于 $f(x)$ 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的系数 $a_n=\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$. 所以

$$f^{(n)}(1)=(n!)a_n=\frac{n!}{3^n}.$$

例 7.28　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(n+1)x^n$ 在收敛区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$. 并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

[提示]　本题考查简单幂级数求和的问题. 考查的知识点有幂级数的逐项积分和逐项求导性质、简单幂

级数的和函数、变上限定积分函数的求导公式.

［解］ 利用幂级数在收敛区间内的逐项积分和逐项微分性质，得

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x (-1)^{n+1} n(n+1)x^n\mathrm{d}x\right)(|x|<1)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(x^n)'x^2\\ &= x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n\right)'\\ &= x^2\left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{x^2}{(1+x)^2}.\end{aligned}$$

将上式两端对上限 x 求导，得

$$S(x)=\frac{2x}{(1+x)^3},\quad |x|<1.$$

令 $x=\frac{1}{2}$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{27}.$$

例 7.29 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ 的和.

［提示］ 本题主要考查常用简单函数的麦克劳林级数、幂级数的逐项求导性质及数项级数的线性运算性质.

［解法 1］ 由于
$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$
对上式两边求导，得

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1},$$

所以

$$x\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n,$$

此式两边再求导，得

$$x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}.$$

在上式中令 $x=1$ 便得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = 2\mathrm{e}$.

［解法 2］ 由于 $\mathrm{e}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$，所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\\ &= \mathrm{e}+\mathrm{e} = 2\mathrm{e}.\end{aligned}$$

注 将函数展开成指定点的幂级数是级数部分的一类重要问题．一般地都是利用几个简单函数的麦克劳林级数作间接展开，在展开过程中会用到幂级数的有关性质，如线性运算性质及逐项积分和逐项求导的性质等．求数项级数的和一般原则是将此数项级数看成是某个函数项级数在一点的值．先求函数项级数的和函数，

再求和函数在指定点的值.

例 7.30　设 $f(x)$是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$，写出 $f(x)$的傅里叶级数与其和函数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

[提示]　本题主要考查傅里叶级数的概念、傅里叶系数的计算、傅里叶级数收敛的狄利克雷定理.

[解]　根据傅里叶系数的计算公式，得

$$\begin{aligned}a_n &= \int_0^2 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x\\ &= \frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\quad (n=1,2,3,\cdots),\\ a_0 &= \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2},\\ b_n &= \int_0^2 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x\sin n\pi x\mathrm{d}x\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\quad (n=1,2,3,\cdots).\end{aligned}$$

所以 $f(x)$的傅里叶级数为

$$\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\cos n\pi x+(-1)^{n+1}\sin n\pi x\right].$$

其和函数的周期为 2，且

$$S(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 0, & 1<x<2.\end{cases}$$

令 $x=0$，得

$$S(0)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n\pi}\right]=\frac{1}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}\text{，且 } S(0)=0,$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

例 7.31　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

[提示]　本题考查的知识点有绝对收敛的概念、正项级数的比较判别法、收敛数列的有界性.

[证明]　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，所以数列$\{b_n\}$有界，即存在 $M>0$，使得对任意的 n，有

$$|b_n|\leqslant M.$$

于是

$$|a_nb_n|\leqslant M|a_n|,$$

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

例 7.32　已知 $a_n>0$，且 $a_{n+1}\leqslant a_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 发散，证明级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛.

[提示] 本题考查的知识点主要有数列的单调有界有极限定理、交错级数的莱布尼茨判别法、数列极限的保序性质、几何级数的收敛性结论和正项级数的比较判别法.

[证明] 因为 $0<a_{n+1}\leqslant a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，记其值为 A.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，根据莱布尼茨判别法可知 $A>0$. 所以存在 $N>0$. 使得当 $n\geqslant N$ 时，有 $a_n>\frac{A}{2}$，故当$n\geqslant N$时，$\frac{1}{(1+a_n)^n}<\frac{1}{\left(1+\frac{A}{2}\right)^n}$.

利用级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{A}{2}\right)^n}$ 的收敛性及比较判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛.

例 7.33 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，证明对任意的常数 $a>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^a}$ 收敛.

[提示] 本题考查的知识点有定积分的换元积分公式和比较定理、p 级数的收敛性结论和正项级数的比较判别法.

[证明] 令 $\tan x=t$，得

$$0<a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1},$$

所以

$$0<\frac{a^n}{n^a}<\frac{1}{(n+1)n^a}<\frac{1}{n^{1+a}}.$$

由于当 $a>0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+a}}$ 收敛，根据比较判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^a}$ 收敛.

例 7.34 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$，证明

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}.$$

[提示] 本题考查的知识点有幂级数的逐项求导性质、函数恒为常数的充分必要条件、函数的单侧极限.

[证明] 因为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域为$[-1,1]$，所以函数 $f(x)$的定义域是$[-1,1]$. 函数 $f(1-x)$定义域是$[0,2]$.

令 $F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)$，则其定义域为$(0,1)$. 根据幂级数的可导性及逐项求导公式，得

$$f'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=-\frac{1}{x}\ln(1-x),$$

$$\begin{aligned}f'(1-x)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n^2}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}\\&=\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}=\frac{1}{1-x}\ln x,\end{aligned}$$

又

$$[\ln x\ln(1-x)]'=\frac{1}{x}\ln(1-x)-\frac{1}{1-x}\ln x,$$

所以