$$F'(x)=f'(x)+f'(1-x)+\left(\ln x\ln(1-x)\right)'=0,\ x\in(0,1),$$

于是
$$F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)\equiv C,\ x\in(0,1).$$

在上式两端令 $x\to1^-$ 取极限，得

$$\begin{aligned}C&=\lim_{x\to1^-}F(x)\\&=f(1)+f(0)+\lim_{x\to1^-}\ln[1+(x-1)]\ln(1-x)\\&=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\end{aligned}$$

所以
$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6},\ x\in(0,1).$$

八、常微分方程

•考试内容与要求•

考试内容

常微分方程的基本概念　变量可分离的微分方程　齐次微分方程　一阶线性微分方程　伯努利(Bernoulli)方程　全微分方程　可用简单的变量代换求解的某些微分方程　可降阶的高阶微分方程　线性微分方程　解的性质及解的结构定理　二阶常系数齐次线性微分方程　高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程　简单的二阶常系数非齐次线性微分方程　欧拉(Euler)方程　微分方程的简单应用

考试要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.
2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法.
3. 会解齐次微分方程、伯努利方程和全微分方程. 会用简单的变量代换解某些微分方程.
4. 会用降阶法解下列微分方程：$y^{(n)}=f(x),y''=f(x,y')$和 $y''=f(y,y')$.
5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构.
6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.
7. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.
8. 会解欧拉方程.
9. 会用微分方程解决一些简单的应用问题.

•考试内容解析•

(一) 常微分方程的有关概念

含有一元未知函数及其导数的方程称为常微分方程，简称微分方程. 微分方程中含有的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶. 若记自变量为 x，未知函数为 $y=y(x)$. 则 n 阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0\ .$$

若函数$f(x)$在 I 上存在 n 阶导数，且满足方程

$$F(x,f(x),f'(x),\cdots,f^{(n)}(x))=0\quad(x\in I),$$

则称$f(x)$是微分方程$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 在 I 上的一个解. n 阶微分方程的含有 n 个相互独立的任意常数的解称为它的通解，不含有任意常数的解称为它的特解，由通解确定特解的条件称为定解条件. 一般地，我们所考虑的定解条件都是所谓的初始条件. 例如，一阶微分方程的初始条件为$y(x_0)=y_0$；二阶微分方程的初始条件为$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y_0'$ 等.

微分方程的解$y=y(x)$所表示的曲线称为微分方程的积分曲线.

(二) 一阶可求解微分方程

1. 变量可分离微分方程

(1) 概念　形如 $y'=f(x)g(y)$ 的一阶微分方程称为变量可分离微分方程.

(2) 解法　当 $g(y)\neq 0$ 时，$y'=f(x)g(y)\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$. 方程 $y'=f(x)g(y)$ 的通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C,$$

其中，C 为任意常数，$\int\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)}$ 表示函数 $\dfrac{1}{g(y)}$ 的一个原函数，$\int f(x)\mathrm{d}x$ 表示函数 $f(x)$ 的一个原函数.

2. 齐次型微分方程

(1) 概念　形如 $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的一阶微分方程称为齐次型微分方程.

(2) 解法　引进新的未知函数 $u=u(x)$ 满足 $u=\dfrac{y}{x}$. 由于 $y'=u+xu'$，所以微分方程 $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 变为 $u'=\dfrac{1}{x}(f(u)-u)$. 这是关于未知函数 u 的一个变量可分离微分方程. 由此方程解得未知函数 $u=u(x)$. 进而得到函数 $y(x)=xu(x)$.

3. 一阶线性微分方程

(1) 概念　形如 $a(x)y'+b(x)y=c(x)$ 的微分方程称为一阶线性微分方程，其标准形式为 $y'+p(x)y=q(x)$. 当右端项 $q(x)$ 恒为零时称其为一阶线性齐次微分方程，否则称其为一阶线性非齐次微分方程.

(2) 一阶线性齐次微分方程的通解

考虑一阶线性齐次微分方程的标准形式 $y'+p(x)y=0$，这是一个变量可分离微分方程，其通解为

$$y=Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

其中 C 是任意常数. $\int p(x)\mathrm{d}x$ 表示 $p(x)$ 的一个原函数.

(3) 一阶线性非齐次微分方程的通解

考虑一阶线性非齐次微分方程的标准形式 $y'+p(x)y=q(x)$，引进新的未知函数 $u=u(x)$，使得 $y=u(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$.

将 $y=u(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$，$y'=(u'-p(x)u)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 代入原微分方程，并整理得

$$u'=q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x},$$

因此 $u(x)=\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$，所以 $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解为

$$y=e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right).$$

上述求解一阶线性非齐次微分方程的方法又称为变动任意常数法.

4. 伯努利(Bernoulli)方程

(1) 概念　形如 $y'+p(x)y=q(x)y^n$ 的一阶微分方程称为伯努利方程. 当 $n=0$ 时，是一阶线性非齐次微分方程；当 $n=1$ 时，是一阶线性齐次微分方程.

(2) 解法　当 $n\neq 0$、$n\neq 1$ 时，引进新的未知函数 $u=u(x)$，使得 $u=y^{1-n}$，则伯努利方程 $y'+p(x)y=q(x)y^n$ 变为

$$u'+(1-n)p(x)u=(1-n)q(x),$$

这是关于未知函数 $u=u(x)$ 的一个一阶线性微分方程.

5. 可降阶微分方程

(1) 方程 $y^{(n)}=f(x)$

利用不定积分运算直接求解.

(2) 方程 $y''=f(x,y')$

这类方程的特点是不显含未知函数 y. 引进新的未知函数 $u=u(x)$, 使得 $u(x)=y'(x)$, 则微分方程 $y''=f(x,y')$变为 $u'=f(x,u)$, 这是关于 $u=u(x)$的一个一阶微分方程.

(3) 方程 $y''=f(y,y')$

这类方程的特点是不显含自变量 x. 引进关于变量 y 的未知函数 $u=u(y)$, 使得$u(y)=y'(x(y))$, 则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=u'u,$$

因此微分方程 $y''=f(y,y')$变为 $uu'=f(y,u)$, 这是一个以 y 为自变量, $u(y)$为未知函数的一阶微分方程.

注 变量代换的思想是求解微方程的一种基本思想. 根据微分方程的特点找到合适的变量代换是用好这种方法的关键. 要注意上述求解齐次微分方程、一阶线性非齐次微分方程、伯努利方程及后两种可降阶微分方程时所作的变量代换.

6. 全微分方程

若存在可微函数$u(x,y)$, 使得 $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, 则称一阶微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

为全微分方程.

$u(x,y)=C$ 是全微分方程的通解, 其中 C 是任意常数.

一般地, 当$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$时, $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 就是全微分方程, 这时, 只要求出了全微分式$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 的一个原函数$u(x,y)$, 也就得到了此方程的通解$u(x,y)=C$.

(三) 线性微分方程的概念和解的性质

1. 线性微分方程的概念

形如 $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$的微分方程称为 n 阶线性微分方程, 其中 $a_k(x)(k=0,1,2,\cdots,n)$都是自变量 x 的函数. 当$a_k(x)(k=0,1,2,\cdots,n)$都是常数时, 又称方程为 **n 阶线性常系数微分方程**. 若右端项函数 $f(x)$恒为零, 则称方程为 **n 阶线性齐次微分方程**. 否则称其为 **n 阶线性非齐次微分方程**.

2. 线性微分方程解的性质

定理 8.1 (线性齐次微分方程解的叠加原理) 若函数$y_1(x)$, $y_2(x)$是线性齐次微分方程

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

的两个解, α、β 是两个任意实数, 则$\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)$也是此微分方程的解.

此定理说明, 线性齐次微分方程的解集合是一个线性空间.

定理 8.2 (线性非齐次微分方程解的叠加原理) 若函数$y_1(x)$, $y_2(x)$是线性非齐次微分方程

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$$

的两个解, α, β 是两个任意实数, 则$\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)$是线性微分方程

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=(\alpha+\beta)f(x)$$

的解.

特别地, 当 $\alpha=1$, $\beta=-1$ 时, $y_1(x)-y_2(x)$就是线性齐次微分方程

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{(n-1)}(x)\ y^{n-1}+\cdots+a_1(x)\ y'+a_0(x)\ y=0$$

的解.

3. 线性微分方程解的结构

定义 8.1 设$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是定义在 I 上的 n 个函数, 若存在不全为零的 n 个常数 k_1, k_2, $\cdots$, k_n, 使得

$$k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)=0$$

在 I 上恒成立, 则称这 n 个函数在I 上**线性相关**, 否则称它们**线性无关**.

特别地，两个函数$y_1(x)$，$y_2(x)$在I上线性相关的充分必要条件是$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\equiv C$在$I$上成立.

定理 8.3 （线性齐次微分方程解的结构） 若函数$y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$是线性齐次微分方程

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

的n个线性无关解，则此微分方程的通解是

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x),$$

其中C_1，C_2，…，C_n是n个任意常数.

此定理说明，n阶线性齐次微分方程的解空间是n维线性空间.

定理 8.4 （线性非齐次微分方程解的结构） 若函数$y^*(x)$是线性非齐次微分方程

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$$

的一个特解，$y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$是相应的线性齐次微分方程

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

的n个线性无关解，则非齐次微分方程的通解是

$$y(x)=y^*(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x),$$

其中C_1，C_2，…，C_n是n个任意常数.

（四）二阶线性常系数微分方程的解法

1. 二阶线性常系数齐次微分方程的特征法

考虑方程

$$y''+ay'+by=0,$$

其中a，b是常数.

一元二次代数方程

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

称为它的特征方程．特征方程的根λ_1、λ_2称为它的特征根.

定理 8.5 设λ_1、λ_2是二阶线性常系数齐次微分方程$y''+ay'+by=0$的两个特征根，则

(1) 当$\lambda_1\neq\lambda_2$，且都是实数时，微分方程的通解是$y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$;

(2) 当$\lambda_1=\lambda_2$时，微分方程的通解是$y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2xe^{\lambda_1x}$;

(3) 当$\lambda_1=\alpha+i\beta$，$\lambda_2=\alpha-i\beta$时，微分方程的通解是

$$y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

注 高阶线性常系数齐次微分方程具有类似的特征解法.

2. 二阶线性常系数非齐次微分方程的待定系数法

(1) 右端项为$f(x)=P_n(x)e^{\mu x}$的方程

考虑微分方程

$$y''+ay'+by=P_n(x)e^{\mu x},$$

其中$P_n(x)$是n次多项式，μ为实数.

设方程$y''+ay'+by=P_n(x)e^{\mu x}$的一个特解形式为

$$y^*(x)=x^kQ_n(x)e^{\mu x},$$

其中$Q_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$为$n$次多项式的一般形式，$k$的取值方式为：当$\mu$不是$y''+ay'+by=0$的特征根时，$k=0$；当$\mu$是$y''+ay'+by=0$的单特征根时，$k=1$；当$\mu$是$y''+ay'+by=0$的重特征根时，$k=2$.

将$y^*(x)=x^kQ_n(x)e^{\mu x}$代入微分方程

$$y''+ay'+by=P_n(x)e^{\mu x},$$

就可求出待定系数a_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$.

若记齐次微分方程

$$y''+ay'+by=0$$

的通解为$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$，则微分方程

$$y''+ay'+by=P_n(x)e^{\mu x}$$

的通解为

$$y(x)=y^*(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$$

(2) 右端项为$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 的方程

考虑微分方程

$$y''+ay'+by=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

其中$P_n(x)$是 n 次多项式，α，β 为实数.

设方程$y''+ay'+by=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 的一个特解形式为

$$y^*(x)=x^ke^{\alpha x}[Q_n(x)\cos\beta x+W_n(x)\sin\beta x],$$

其中

$$Q_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$W_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

为 n 次多项式的一般形式，k 的取值方式为：当 $\alpha\pm i\beta$ 不是 $y''+ay'+by=0$ 的特征根时，$k=0$；当 $\alpha\pm i\beta$ 是 $y''+ay'+by=0$ 的特征根时，$k=1$.

将$y^*(x)=x^ke^{\alpha x}[Q_n(x)\cos\beta x+W_n(x)\sin\beta x]$代入方程

$$y''+ay'+by=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

就可求出待定系数 a_k，b_k $(k=0,1,2,\cdots,n)$.

类似地，方程$y''+ay'+by=P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 也有一个形如

$$y^*(x)=x^ke^{\alpha x}[Q_n(x)\cos\beta x+W_n(x)\sin\beta x]$$

的特解，其中 k 的取值方式与上面一样.

3. 欧拉(Euler)方程

形如

$$x^2y''+axy'+by=f(x)$$

的微分方程称为 2 阶欧拉方程，其中 a，b 是常数.

当 $x>0$ 时，作变量代换 $x=e^t$，引进运算 $D=\frac{d}{dt}$，$D^2=\frac{d^2}{dt^2}$，使得 $Dy=\frac{dy}{dt}$，$D^2y=\frac{d^2y}{dt^2}$. 则

$$xy'=Dy,\ x^2y''=D(D-1)y.$$

因此欧拉方程变为

$$D(D-1)y+aDy+by=f(e^t),$$

即

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a-1)\frac{dy}{dt}+by=f(e^t).$$

这是一个以 t 为自变量，y 为未知函数的 2 阶线性常系数微分方程.

当 $x<0$ 时，通过变量代换 $x=-e^t$，可类似求解.

·例题详解·

例 8.1 微分方程 $y'+y\tan x-\cos x=0$ 的通解为________.

［答案］ $y=(x+C)\cos x$.

［提示］ 本题主要考查了一阶线性微分方程的通解公式.

［解］ 原方程是个一阶线性非齐次微分方程，其标准形式为 $y'+y\tan x=\cos x$，根据通解公式，通解为

$$y=e^{-\int\tan x dx}\left(C+\int\cos x\cdot e^{\int\tan x dx}dx\right)=(x+C)\cos x.$$

例 8.2　过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$且满足关系式 $y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为________.

[答案]　$y\arcsin x=x-\frac{1}{2}$.

[提示]　本题主要考查了微分方程的初值问题、积分曲线的概念及一阶线性微分方程的通解公式.

[解]　原微分方程的标准形式为 $y'+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}=\frac{1}{\arcsin x}$. 根据通解公式. 此方程的通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx}\left(C+\int\frac{1}{\arcsin x}e^{\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}dx}dx\right)=\frac{1}{\arcsin x}(C+x).$$

由 $y\left(\frac{1}{2}\right)=0$，得 $C=-\frac{1}{2}$，所以曲线方程为 $y\arcsin x=x-\frac{1}{2}$.

例 8.3　微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为________.

[答案]　$y=C_1+\frac{C_2}{x^2}$.

[提示]　本题主要考查了二阶可降阶微分方程的解法.

[解]　将原方程看成是关于 y'的一阶线性齐次方程$(y')'+\frac{3}{x}y'=0$,得

$$y'=Ce^{-\int\frac{3}{x}dx}=\frac{C}{x^3},$$

所以$y=-\frac{C}{2}\frac{1}{x^2}+C_1=C_1+\frac{C_2}{x^2}$.

例 8.4　设$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$是线性微分方程$y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$的三个特解，且$\frac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_1(x)}\neq C$. 则该微分方程的通解为________.

[答案]　$y=C_1(y_2(x)-y_1(x))+C_2((y_3(x)-y_1(x))+y_1(x)$.

[提示]　本题主要考查了二阶线性微分方程解的性质和解的结构.

[解]　根据线性微分方程解的叠加原理及题中条件易知，$y_2(x)-y_1(x)$,$y_3(x)-y_1(x)$是原方程对应的线性齐次微分方程的两个线性无关解，根据线性非齐次微分方程解的结构便知原方程的通解为$y=C_1[y_2(x)-y_1(x)]+C_2[(y_3(x)-y_1(x)]+y_1(x)$.

例 8.5　微分方程$y''-2y'+2y=e^x$ 的通解为________.

[答案]　$y=e^x(1+C_1\cos x+C_2\sin x)$.

[提示]　本题考查了二阶线性常系数齐次微分方程的特征解法和求解二阶线性常系数非齐次微分方程的待定系数法.

[解]　原方程对应的齐次方程的特征根为 $\lambda_1=1+i$, $\lambda_2=1-i$，所以齐次方程的通解为$e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

原方程的一个特解形式为 $y^*=Ae^x$，代入原方程，得 $A=1$，故所求通解为

$$y=e^x(1+C_1\cos x+C_2\sin x).$$

例 8.6　微分方程 $y''-4y=e^{2x}$的通解为________.

[答案]　$y=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$.

[提示]　本题考查了二阶线性常系数齐次微分方程的特征解法和求解二阶线性常系数非齐次微分方程的待定系数法.

[解]　原微分方程对应的齐次方程的特征根为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$，所以齐次方程的通解为 $C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$.
原微分方程的一个特解形式为 $y^*=Axe^{2x}$，代入原方程，得 $A=\frac{1}{4}$，故所求通解为

$$y=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}.$$

例 8.7 函数$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$满足的二阶线性常系数齐次微分方程为________.

[答案] $y''-2y'+2y=0$.

[提示] 本题是一个简单的综合题，主要考查了微分方程的概念、通解的概念、二阶线性常系数齐次微分方程的特征方程及特征根的概念.

[解法 1] 根据通解形式，所求二阶线性常系数齐次微分方程的特征方程的两个根分别为$\lambda_1=1+i$，$\lambda_2=1-i$，所以特征方程为

$$(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)=\lambda^2-2\lambda+2=0,$$

因此，所求的二阶线性常系数齐次微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

[解法 2] 因为

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

所以

$$y'=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^x(-C_1\sin x+C_2\cos x),$$

$$y''=2e^x(-C_1\sin x+C_2\cos x).$$

消去任意常数 C_1，C_2 得 $y''-2y'+2y=0$. 这就是所求的二阶线性常系数齐次微分方程.

[典型错误] 错写成 $y''-2y'+2=0$. 原因是对特征方程概念不清，或者是粗心.

例 8.8 欧拉方程$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+2y=0(x>0)$的通解为________.

[答案] $y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}$.

[提示] 本题主要考查了求解二阶欧拉方程的变量代换法.

[解] 令 $x=e^t$，则

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}e^t=x\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}+x^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

所以原方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+4\frac{dy}{dt}+2y=0.$$

即$\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+2y=0$. 此微分方程的通解为 $y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$，所以原微分方程的通解是 $y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}$.

[典型错误] 大多数考生不会做，不知如何下手.

例 8.9 若连续函数$f(x)$满足关系式$f(x)=\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$，则 $f(x)=$________.

[答案] $e^{2x}\ln 2$.

[提示] 本题是一个简单综合题，考查了变限定积分函数的可导性及求导公式、一阶微分方程的特解的求法等.

[解] 由条件知函数$f(x)$可导. 在$f(x)=\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$两端关于 x 求导得

$$f'(x)=2f(x),$$

解得$f(x)=Ce^{2x}$. 又因为$f(0)=\ln 2$，所以 $C=\ln 2$，因此$f(x)=e^{2x}\ln 2$.

例 8.10 设曲线积分$\int_L[f(x)-e^x]\sin y\,dx-f(x)\cos y\,dy$与路径无关，其中$f(x)$具有一阶连续导数，且$f(0)=0$，则$f(x)$等于

(A) $\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)$.　　(B) $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.　　(C) $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-1$.　　(D) $1-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查了曲线积分与路径无关的充分必要条件及一阶线性微分方程初值问题的解法.

[解] 根据题意可得

$$-f'(x)\cos y=[f(x)-e^x]\cos y,$$

解此方程得$f(x)=\frac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$.

由$f(0)=0$，得 $C=-\frac{1}{2}$，所以$f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，即选项(B)正确.

例 8.11 设函数$y_1(x)$，$y_2(x)$是微分方程$y'+p(x)y=0$的两个不同特解，则该方程的通解为

(A) $y=C_1y_1+C_2y_2$. (B) $y=y_1+Cy_2$. (C) $y=y_1+C(y_1+y_2)$. (D) $y=C(y_2-y_1)$.

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查一阶线性齐次微分方程解的性质、解的结构及微分方程通解的概念.

[解] 因为$y_1(x)$，$y_2(x)$是微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的两个不同特解，所以 y_2-y_1 是该方程的一个非零特解．根据解的结构，其通解为 $y=C(y_2-y_1)$，即选项(D)正确.

此外，根据通解定义，选项(A)中有两个任意常数，故其不对．当 $y_2\equiv0$ 时，选项(B)不对．当 $y_2=-y_1$ 时，选项(C)不对.

例 8.12 设函数 $y=f(x)$是微分方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解．若$f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，则函数$f(x)$在点 x_0.

(A) 取到极大值. (B) 取到极小值.

(C) 某个邻域内单调增加. (D) 某个领域内单调减少.

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查了一元函数极值点的充分条件.

[解法] 根据题意，因为

$$f(x_0)>0,f'(x_0)=0,$$

且

$$f''(x_0)-2f'(x_0)+4f(x_0)=0.$$

所以$f''(x_0)=-4f(x_0)<0$，故 x_0 是函数 $f(x)$的一个极大值点.

因此选项(A)正确.

例 8.13 微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式

(A) ae^x+b. (B) axe^x+b. (C) ae^x+bx. (D) axe^x+bx.

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查了二阶线性常系数非齐次微分方程的待定系数法.

[解] 原方程对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的两个特征根分别为 1，-1．所以 $y''-y=e^x$ 的一个特解形式为 axe^x，$y''-y=1$ 的一个特解形式为 b．根据叠加原理，原方程的一个特解形式为 axe^x+b.

因此选项(B)正确．其他选项经检验不满足方程.

例 8.14 具有特解$y_1=e^{-x}$，$y_2=2xe^{-x}$，$y_3=3e^x$ 的三阶线性常系数齐次微分方程是

(A) $y'''-y''-y'+y=0$. (B) $y'''+y''-y'-y=0$.

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$. (D) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查了三阶线性常系数齐次微分方程的特征方程、特征根的概念及其特征解法.

[解] 根据题意，1，-1 是所求微分方程的特征方程的两个根，且 -1 是重根，所以特征方程为$(\lambda-1)(\lambda+1)^2=\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$，从而所求的微分方程为 $y'''+y''-y'-y=0$.

因此选项(B)正确.

例 8.15 已知函数 $y=\frac{x}{\ln x}$是微分方程$y'=\frac{y}{x}+g\left(\frac{x}{y}\right)$的解，则 $g\left(\frac{x}{y}\right)$的表达式为

(A) $-\frac{y^2}{x^2}$. (B) $\frac{y^2}{x^2}$. (C) $-\frac{x^2}{y^2}$. (D) $\frac{x^2}{y^2}$.

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查了微分方程解的概念、复合函数的概念和运算.

[解] 将$y=\frac{x}{\ln x}$, $y'=\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln^2 x}$代入$y'=\frac{y}{x}+g\left(\frac{x}{y}\right)$, 得$g(\ln x)=-\frac{1}{\ln^2 x}$, 所以$g(u)=-\frac{1}{u^2}$. 从而$g\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y^2}{x^2}$.

因此选项(A)正确.

例 8.16 设二阶线性常系数齐次微分方程 $y''+by'+y=0$ 的每一个解$y(x)$都在区间$(0,+\infty)$内有界, 则实数 b 的取值范围是

(A) $b\geqslant 0$.　　(B) $b\leqslant 0$.　　(C) $b\leqslant 4$.　　(D) $b\geqslant 4$.

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查了二阶线性常系数齐次微分方程特征解法、通解概念及指数函数的性质.

[解] 当 $b\neq\pm 2$ 时, 原方程的通解为$y(x)=C_1e^{-\frac{b-\sqrt{b^2-4}}{2}x}+C_2e^{-\frac{b-\sqrt{b^2-4}}{2}x}$.
当 $b^2-4>0$ 时, 要想使得 $y(x)$在区间$(0,+\infty)$内有界, 只需要

$$b+\sqrt{b^2-4}\geqslant 0, \ b-\sqrt{b^2-4}\geqslant 0.$$

即只需要 $b>2$;
当 $b^2-4<0$ 时, 要想使得 $y(x)$在区间$(0,+\infty)$内有界, 只需要 $b+\sqrt{b^2-4}$与 $b-\sqrt{b^2-4}$的实部大于或等于零, 即只需要 $0\leqslant b<2$.
当 $b=2$ 时, 原方程的解$y(x)=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$在区间$(0,+\infty)$内有界.
当 $b=-2$ 时, 原方程的解$y(x)=C_1e^{x}+C_2xe^{x}(C_1^2+C_2^2\neq 0)$在区间$(0,+\infty)$内无界.
综上所述, 当且仅当 $b\geqslant 0$ 时, 才能保证方程$y''+by'+y=0$ 的每一个解$y(x)$都在区间$(0,+\infty)$内有界.

因此选项(A)正确.

例 8.17 求解微分方程 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=y^2e^y\mathrm{d}y$.

[提示] 本题主要考查了微分方程的概念、函数概念、微分方程通解的概念及一阶线性微分方程的解法.

[解] 在原方程两端同乘以$-\frac{1}{y\mathrm{d}y}$, 得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{x}{y}=-ye^y,$$

将 y 看成自变量, x 看成是的y 函数, 这是一个关于未知函数 $x=x(y)$的一阶线性微分方程, 其通解为

$$x=e^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(C-\int ye^ye^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right)=Cy-ye^y,$$

其中 C 是任意常数.

例 8.18 求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

[提示] 本题主要考查了微分方程初值问题的概念、齐次型方程与伯努利方程的解法.

[解法 1] 将原方程变形, 得

$$y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x},$$

这是一个齐次型方程. 令 $y=xu$, 代入上式, 得

$$xu'=u^2-2u.$$

分离变量, 得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2-2u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

积分, 得

$$\frac{u-2}{u}=Cx^2,$$

即

$$\frac{y-2x}{y}=Cx^2.$$

因为$y(1)=1$. 所以 $C=-1$. 于是所求特解为 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

[解法 2] 将原方程变形. 得

$$\frac{x^2y'}{y^2}+\frac{x}{y}=1,$$

令 $u=\dfrac{1}{y}$，得

$$-u'+\frac{1}{x}u=\frac{1}{x^2}.$$

这是关于未知函数 $u(x)$的一个一阶线性非齐次微分方程. 其通解为

$$u=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[C+\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}dx\right]=Cx+\frac{1}{2x},$$

即

$$y=\frac{2x}{1+2Cx^2}.$$

因为$y(1)=1$. 所以 $C=\dfrac{1}{2}$. 于是所求特解为 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

例 8.19 设 $y=e^x$ 是微分方程$xy'+p(x)y=x$ 的一个解. 求此微分方程满足条件$y(\ln 2)=0$ 的特解.

[提示] 本题主要考查了微分方程解的概念、一阶线性微分方程解的结构及其初值问题的解法.

[解] 将 $y=e^x$ 代入原方程，得

$$xe^x+p(x)e^x=x,$$

解得

$$p(x)=xe^{-x}-x.$$

所以原方程为

$$xy'+(xe^{-x}-x)y=x,$$

解与此方程对应的齐次方程$xy'+(xe^{-x}-x)y=0$，得

$$y=Ce^{x+e^{-x}}.$$

所以原方程的通解为

$$y=e^x+Ce^{x+e^{-x}}.$$

由$y(\ln 2)=0$. 得 $C=-e^{-\frac{1}{2}}$，从而所求的特解为 $y=e^x-e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}$.

例 8.20 求微分方程$\dfrac{1}{\sqrt{y}}y'-\dfrac{4x}{x^2+1}\sqrt{y}=x$ 的通解.

[提示] 本题主要考查了伯努利方程的解法.

[解] 将原方程化为

$$2(\sqrt{y})'-\frac{4x}{x^2+1}\sqrt{y}=x,$$

令 $z=\sqrt{y}$. 得

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}z=\frac{x}{2}.$$

这是一个关于未知函数$z(x)$的一阶线性微分方程. 其通解为

$$z=\frac{1}{4}(x^2+1)[C+\ln(x^2+1)],$$

所以原微分方程的通解为

$$y=z^2=\frac{1}{16}\{(x^2+1)[C+\ln(x^2+1)]\}^2 .$$

例 8.21 求微分方程$(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$ 的通解.

[提示] 本题主要考查了微分方程通解的概念、齐次型方程的解法、全微分方程的概念及解法.

[解法 1] 将 y 看成自变量，则 $x=x(y)$是 y 的函数. 由于原方程是齐次型方程，令$u(y)=\frac{x}{y}$. 原微分方程化为

$$yu'=-\frac{e^u+u}{e^u+1},$$

这是一个变量可分离的方程，解得

$$y(e^u+u)=C .$$

所以原方程的通解为

$$ye^{\frac{x}{y}}+x=C.$$

[解法 2] 记$P(x,y)=1+e^{\frac{x}{y}}$, $Q(x,y)=e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)$, 则$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. 所以，当 $y>0$ 时，原微分方程是一个全微分方程. 令

$$u(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy.$$

由于此曲线积分与路径无关，所以 $u(x,y)$就是全微分式$(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy$ 的一个原函数，且

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,1)}^{(x,y)}(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy\\&=\int_1^y e^{\frac{0}{y}}\left(1-\frac{0}{y}\right)dy+\int_0^x(1+e^{\frac{x}{y}})dx\\&=y-1+x+y(e^{\frac{x}{y}}-1)\\&=ye^{\frac{x}{y}}+x-1 .\end{aligned}$$

所以原方程的通解为

$$ye^{\frac{x}{y}}+x=C .$$

例 8.22 设 μ 为实数. 求微分方程 $y''+\mu y=0$ 的通解.

[提示] 本题主要考查二阶线性常系数齐次微分方程的特征解法.

[解] 原微分方程的特征方程为 $\lambda^2+\mu=0$, 所以，

(1) 当 $\mu>0$ 时，特征方程有一对复根 $\lambda=\pm i\sqrt{\mu}$，原微分方程有两个线性无关解 $\cos\sqrt{\mu}x$, $\sin\sqrt{\mu}x$，因此它的通解为

$$y=C_1\cos\sqrt{\mu}x+C_2\sin\sqrt{\mu}x\quad(C_1,C_2\in R).$$

(2) 当 $\mu=0$ 时，特征方程有一个二重根 $\lambda=0$，原微分方程有两个线性无关解 1, x, 于是它的通解为

$$y=C_1+C_2x.$$

(3) 当 $\mu<0$ 时，特征方程有两个单重实根 $\lambda=\pm\sqrt{-\mu}$, 原微分方程有两个线性无关解 $e^{\sqrt{-\mu}x}$, $e^{-\sqrt{-\mu}x}$，所以它的通解为

$$y=C_1e^{\sqrt{-\mu}x}+C_2e^{-\sqrt{-\mu}x}\quad(C_1,C_2\in R).$$

例 8.23 求微分方程 $y''+y'=2x^2+1$ 的通解.

[提示] 本题主要考查二阶线性常系数微分方程和二阶可降阶方程的解法.

[解法 1] 将方程写作 $y''+y'=(2x^2+1)e^{0x}$. 因为 $\lambda=0$ 是特征方程 $\lambda^2+\lambda=0$ 的单根，所以原方程一个特解形式为

$$y^*(x)=ax^3+bx^2+cx.$$

将此解代入原方程，得

$$3ax^2+(2b+6a)x+(c+2b)=2x^2+1.$$

比较两端同次项的系数，有

$$3a=2,\ 2b+6a=0,\ c+2b=1.$$

解上述方程组，得

$$a=\frac{2}{3},\ b=-2,\ c=5.$$

从而得到原方程的一个特解

$$y^*(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x.$$

又因为相应齐次微分方程 $y''+y'=0$ 的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-x}.$$

所以原方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x.$$

[解法 2] 在方程 $y''+y'=2x^2+1$ 两端积分，得

$$y'+y=\frac{2}{3}x^3+x+C_1.$$

这是一个一阶线性微分方程，其通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-x}\left(C_2+\int\left(\frac{2}{3}x^3+x+C_1\right)e^x\mathrm{d}x\right) \\ &= C_1+C_2e^{-x}+\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x-5 \\ &= C_1+C_2e^{-x}+\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x. \end{aligned}$$

例 8.24 求解微分方程 $y''-2y'+y=4xe^x$.

[提示] 本题主要考查二阶线性常系数齐次微分方程的特征解法、二阶线性常系数非齐次微分方程的待定系数法及其解的结构.

[解] 因为 $\lambda=1$ 是微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的特征方程 $\lambda^2-2\lambda+1=0$ 的重根，所以原方程的一个待定特解为

$$y^*=x^2(ax+b)e^x.$$

将此解代入原微分方程 $y''-2y'+y=4xe^x$，得

$$(6ax+2b)e^x=4xe^x.$$

比较两端系数，得 $a=\frac{2}{3}$，$b=0$. 于是得到原方程的一个特解

$$y^*=\frac{2}{3}x^3e^x.$$

又因为相应齐次方程 $y''-2y'+y=0$ 的通解是

$$y=(C_1+C_2x)e^x.$$

所以原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{2}{3}x^3e^x.$$

例 8.25 求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

[提示] 本题主要考查二阶线性常系数齐次微分方程的特征解法、二阶线性常系数非齐次微分方程的待定系数法及其解的性质和解的结构.

[解] 原方程所对应齐次方程 $y''+y=0$ 的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

设非齐次方程 $y''+y=x$ 的一个特解为

$$y_1=Ax+B,$$

代入此方程，得 $A=1$，$B=0$. 所以 $y_1=x$.

设非齐次方程 $y''+y=\cos x$ 的一个特解为

$$y_2=Ex\cos x+Dx\sin x.$$

代入该方程，得 $E=0$，$D=\frac{1}{2}$. 所以 $y_2=\frac{1}{2}x\sin x$.

因为 y_1+y_2 为原方程 $y''+y=x+\cos x$ 的一个特解，所以原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x.$$

例 8.26 求解微分方程 $yy''-(y')^2=y^2\ln y$.

[提示] 本题主要考查二阶可降阶方程的解法、求解微分方程的简单变量代换法.

[解] 因为原微分方程不显含自变量 x，所以这是一个可降阶微分方程.
令 $u(y)=y'(x)$，则 $y''(x)=u'(y)y'(x)=u'u$，代入原方程 $yy''-(y')^2=y^2\ln y$，得

$$yuu'-u^2=y^2\ln y.$$

再令 $p(y)=u^2(y)$，则有

$$p'-\frac{2}{y}p=2y\ln y.$$

这是一个未知函数 $p(y)$一阶线性微分方程，解得

$$p=y^2(C+\ln^2y).$$

所以

$$u=\sqrt{y^2(C+\ln^2y)}.$$

故

$$y'=\sqrt{y^2(C+\ln^2y)}.$$

这是一个关于未知函数 $y(x)$变量可分离方程，解得

$$\ln(\ln y+\sqrt{C+\ln^2y})=x+C_1.$$

这就是原微分方程的通解.

注 方程 $yuu'-u^2=y^2\ln y$ 是一个伯努利方程，可用伯努利方程的一般解法求解.

例 8.27 求解微分方程 $xy''-y'=x^2$.

[提示] 本题主要考查二阶可降阶方程的解法及求解微分方程的简单变量代换法.

[解法 1] 令 $u(x)=y'(x)$，则原方程化为

$$u'-\frac{1}{x}u=x,$$

这是一个关于未知函数 $u(x)$的一阶线性微分方程，解得

$$u=x(C_1+x).$$

因此 $y'=x(C_1+x)$. 所以原微分方程的通解为

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2=\frac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

[解法 2] 令 $p(x)=\frac{y'(x)}{x}$，则原方程 $xy''-y'=x^2$ 化为 $p'=1$，所以 $p=x+C_1$. 由 $y'=xp=x(x+C_1)$得

$$y=\frac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2.$$

例 8.28 求解微分方程 $x^2y''-2xy'+2y=x^3\ln x$.

[提示] 本题主要考查二阶欧拉方程的解法.

[解] 原方程为二阶欧拉方程. 令 $x=e^t$，得

$$xy'=\frac{dy}{dt},\quad x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}.$$

所以原微分方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=e^{3t}t,$$

其中 t 是自变量.

这是一个二阶线性常系数非齐次方程，解得

$$y=C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)e^{3t}.$$

所以原微分方程的通解为

$$y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{2}x^3\left(\ln x-\frac{3}{2}\right).$$

其中 C_1，C_2 是任意常数.

例 8.29 求解定解问题 $\begin{cases} y''+2x(y')^2=0, \\ y(0)=1,\ y'(0)=0. \end{cases}$

[提示] 本题主要考查二阶可降阶方程初值问题的解法.

[解] 令 $u(x)=y'(x)$，则原方程化为

$$u'+2xu^2=0.$$

这是一个关于未知函数 $u(x)$的变量可分离方程，解得

$$u=\frac{1}{x^2+C}，或 u\equiv 0.$$

根据 $u(0)=y'(0)=0$. 得 $u\equiv 0$.

由 $y'(x)=u(x)\equiv 0$. 得 $y=C_1$. 因为 $y(0)=1$，所以 $C_1=1$. 故原定解问题的解为

$$y=1.$$

[典型错误] 在求解变量可分离微分方程 $u'+2xu^2=0$ 时，容易丢掉解 $u\equiv 0$. 从而得不到原定解问题的解.

例 8.30 设函数 $y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$. $x=x(y)$是 $y=y(x)$的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$所满足的微分方程$\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{3}{2}$的解.

[提示] 本题主要考查基本运算能力和综合运用知识的能力，包含的知识点有反函数的求导法、二阶线性常系数非齐次微分方程的求解等.

[解] (1) 因为 $x(y(x))=x$，所以

$$\frac{dx}{dy}y'=1,$$

从而

$$\frac{d^2x}{dy^2}(y')^2+\frac{dx}{dy}y''=0.$$

故

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'},\quad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

代入原方程，得

$$y''-y=\sin x.$$

(2) 方程 $y''-y=\sin x$ 对应的齐次方程$y''-y=0$ 的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

设方程 $y'' - y = \sin x$ 的特解为

$$y^* = A\cos x + B\sin x,$$

代入得 $A=0$，$B=-\frac{1}{2}$，故 $y^* = -\frac{1}{2}\sin x$，从而 $y''-y=\sin x$ 的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1$，$C_2=-1$，故所求初值问题的解为

$$y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x.$$

［典型错误］ 本题出现的主要错误是求不对反函数的二阶导数．象 $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^2}$ 和 $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{y''}{(y')^3}$ 是最常见的两种错误形式．其他常见错误包括反函数一阶导数计算出错 $\left(\text{如}\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y'}\right)$，特征根计算出错(如 $\lambda=\pm i$ 和 $\lambda_1=0,\lambda_2=1$ 等)，待定系数计算出错等．

例 8.31 已知函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上可导，且对任意的 $x>0$，曲线 $y=f(x)$上点$(x,f(x))$处的切线在 y 上的截距等于$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$，求函数 $f(x)$的一般表达式．

［提示］ 本题主要考查导数的几何意义、变限定积分函数的性质以及二阶可降阶方程的解法．

［解］ 曲线 $y=f(x)$在点$(x,f(x))$处的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X-x),$$

其中(X,Y)是切线上的点．

令 $X=0$，得切线在 y 上的截距 $Y=f(x)-xf'(x)$．根据题意，得

$$f(x) - xf'(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt,$$

即

$$x[f(x)-xf'(x)] = \int_0^x f(t)\,dt.$$

在上式两端关于 x 求导，并整理得 $xf''(x)+f'(x)=0$，解得 $f'(x)=\frac{C_1}{x}$．从而 $f(x)=C_1\ln x + C_2$．

例 8.32 设函数 $f(u)$具有二阶连续导数，且 $z=f(e^x\sin y)$满足方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，求函数 $f(u)$的表达式．

［提示］ 本题主要考查复合函数二阶导数的求法及二阶线性常系数齐次微分方程的特征解法．

［解］

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'(u)e^x\sin y + f''(u)e^{2x}\sin^2 y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^x\cos y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -f'(u)e^x\sin y + f''(u)e^{2x}\cos^2 y,$$

代入$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，得 $f''(u)-f(u)=0$，此方程的通解为

$$f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u},$$

其中 C_1，C_2 是任意常数．

例 8.33 (1) 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$；

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数．

［提示］ 本题主要考查了幂级数的运算和逐项求导公式及二阶线性常系数微分方程的解法．

[解] (1) 因为 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$.

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty),$$

所以

$$y''+y'+y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x.$$

(2) 齐次微分方程 $y''+y'+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda+1=0$, 特征根为

$$\lambda_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \lambda_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

该齐次微分方程的通解是 $$e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$$

设非齐次微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 的特解为 $y^*=Ae^x$, 代入该非齐次方程得 $A=\frac{1}{3}$, 于是 $y^*=\frac{1}{3}e^x$. 因此该非齐次微分方程的通解为

$$y=\frac{1}{3}e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$$

根据 $y(0)=1$ 及 $y'(0)=0$ 得

$$\begin{cases}C_1+\frac{1}{3}=1,\\-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3}=0.\end{cases}$$

解得 $C_1=\frac{2}{3}$, $C_2=0$. 从而幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为

$$y=\frac{1}{3}e^x+\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\ (-\infty<x<+\infty).$$

例 8.34 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, $f(0)=1$. 且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,dt=0,$$

求 $f'(x)$. 并证明 $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1\ (x\geqslant 0)$.

[提示] 本题主要考查变量可分离方程的解法、导数符号与函数单调性之间的关系、定积分的性质等.

[解] 根据条件, 得

$$(x+1)[f'(x)+f(x)]-\int_0^x f(t)\,dt=0,$$

根据变限定积分函数的性质及 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 由上式便知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶导数存在, 所以

$$f''(x)+\left(1+\frac{1}{x+1}\right)f'(x)=0,$$

这是 $f'(x)$ 满足的一个一阶线性齐次方程, 解得

$$f'(x)=\frac{Ce^{-x}}{x+1},$$

由于 $f'(0)=-f(0)=-1$, 所以 $C=-1$, 故

$$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{x+1}.$$

当 $x\geqslant 0$ 时, 因为 $f'(x)=-\frac{e^{-x}}{x+1}<0$, 所以 $f(x)\leqslant f(0)=1$. 又 $x\geqslant 0$ 时, $\left(f(x)-e^{-x}\right)'=-\frac{e^{-x}}{x+1}+e^{-x}=\frac{xe^{-x}}{x+1}\geqslant 0$, 所以 $f(x)-e^{-x}\geqslant f(0)-e^0=0$.

故

$$e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1\ (x\geqslant 0).$$

注 1 不等式的左端也可如下证明：

当 $x\geqslant 0$ 时，由于 $\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt\leqslant\int_0^x e^{-t}dt=1-e^{-x}$，且

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt=-\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt,$$

所以 $f(x)-1\geqslant e^{-x}-1$，即 $f(x)\geqslant e^{-x}$.

注 2 证明不等式时，只需要知道导数的符号及函数在某点上的值，并不要求一定知道函数的表达式.

[典型错误] 试图利用 $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt=-\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt$ 求出函数 $f(x)$ 的表达式，进而证明有关的不等式是本题最常见的错误.

例 8.35 设 $p(x)$ 为连续函数，证明方程 $y'+p(x)y=0$ 的所有积分曲线上横坐标相同的点的切线交于同一点.

[提示] 本题主要考查积分曲线的概念、导数的几何意义及一阶线性齐次微分方程解的结构.

[证明] 记 $y=y_1(x)$ 为方程 $y'+p(x)y=0$ 的一条积分曲线. 则方程 $y'+p(x)y=0$ 的任意一条积分曲线可记作 $y=Cy_1(x)$.

曲线 $y=y_1(x)$ 在点 $(x_0,y_1(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-y_1(x_0)=y_1'(x_0)(x-x_0).$$

曲线 $y=Cy_1(x)$ 在点 $(x_0,Cy_1(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-Cy_1(x_0)=Cy_1'(x_0)(x-x_0).$$

求解方程组

$$\begin{cases} y-y_1(x_0)=y_1'(x_0)(x-x_0), \\ y-Cy_1(x_0)=Cy_1'(x_0)(x-x_0), \end{cases}$$

得

$$x=x_0-\frac{y_1(x_0)}{y_1'(x_0)},\ y=0.$$

所以，任意一条积分曲线 $y=Cy_1(x)$ 与积分曲线 $y=y_1(x)$ 在横坐标为 x_0 的点处的切线相交于与 C 无关的一点 $\left(x_0-\frac{y_1(x_0)}{y_1'(x_0)},\ 0\right)$，即方程 $y'+p(x)y=0$ 的所有积分曲线上横坐标相同的点的切线交于同一点.

例 8.36 设 $a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续有界，证明微分方程 $y'+ay=f(x)$ 的解在 $[0,+\infty)$ 上有界.

[提示] 本题主要考查一阶线性微分方程的通解公式、函数有界性的概念、定积分的性质等.

[证明] 原方程的通解为

$$y(x)=e^{-ax}\left(C+\int_0^x f(t)\,e^{at}dt\right),$$

满足定解条件 $y(x_0)=y_0$ 的解为

$$y(x)=e^{-ax}\left(y_0+\int_0^x f(t)\,e^{at}dt\right).$$

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的界为 M，即 $\left|f(x)\right|\leqslant M\ (x\geqslant 0)$. 则当 $x\geqslant 0$ 时，有

$$\begin{aligned}|y(x)| &= \left|e^{-ax}\left(y_0+\int_0^x f(t)\,e^{at}dt\right)\right| \\ &\leqslant |y_0e^{-ax}|+e^{-ax}\left|\int_0^x f(t)e^{at}dt\right| \\ &\leqslant |y_0|+Me^{-ax}\int_0^x e^{at}dt\end{aligned}$$

$$= |y_0| + \frac{M}{a}(1 - e^{-ax})$$

$$\leqslant |y_0| + \frac{M}{a},$$

即 $y(x)$在$[0, +\infty)$上有界.

例 8.37 某种飞机在飞机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机速度减速并停下.

现有一质量为 9 000 kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$ kg/h). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少?

注 kg 表示千克，km/h 表示千米/小时.

[提示] 本题是一个简单的微分方程应用问题，主要考查导数的物理意义(速度)、运动学中的牛顿第二定律及简单方程的求解.

[解] 根据题意，飞机的质量为 $m = 9\,000$ kg，着陆时的水平速度为 $v_0 = 700$ km/h. 从飞机接触跑道开始计时，设 t 时刻飞机的滑行过的距离为 $x(t)$，滑行速度为 $v(t)$.

[解法 1] 由于飞机滑行时所受的阻力为 $-kv$，根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{dv}{dt} = -kv,$$

由于$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$，所以

$$dx = -\frac{m}{k}dv,$$

积分得
$$x(t) = -\frac{m}{k}v(t) + C.$$

利用 $v(0) = v_0$，$x(0) = 0$，得 $C = \frac{m}{k}v_0$，所以

$$x(t) = \frac{m}{k}[v_0 - v(t)].$$

从而当 $v(t) \to 0$ 时，有

$$x(t) \to \frac{mv_0}{k} = \frac{9\,000 \times 700}{6.0 \times 10^6}(\text{km}) = 1.05\ (\text{km}).$$

故飞机滑行的最长距离为 1.05 km.

[解法 2] 根据牛顿第二定律，得 $m\frac{dv}{dt} = -kv$，即

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt,$$

两端积分得 $v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$，利用 $v(0) = v_0$，得 $C = v_0$. 从而

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t},$$

所以飞机滑行的最长距离为

$$x = \int_0^{+\infty} v(t)dt = -\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{mv_0}{k} = 1.05\ (\text{km}).$$

[解法 3] 根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt},$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} = 0,$$

此方程的特征方程为 $r^2 + \frac{k}{m}r = 0$，解得 $r_1 = 0$，$r_2 = -\frac{k}{m}$.

所以原方程的通解为 $x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}$.

利用 $x(0)=0$，$v(0)=x'(0)=v_0$，得 $C_1=-C_2=\frac{mv_0}{k}$，所以

$$x(t)=\frac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$$

于是当 $t\to+\infty$时，有 $x(t)\to\frac{mv_0}{k}=1.05$ km，

故飞机滑行的最长距离为 1.05 km.

[典型错误] 主要的问题是不能正确地建立数学模型.

例 8.38 设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$.

(1) 试求曲线 L 的方程；

(2) 求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.

[提示] 第一问题考查的是微分方程在几何上的应用，关键是列出微分方程；第二问题考查的是最值问题，关键是写出图形面积的表达式.

[解] (1) 设曲线 L 过点 $P(x,y)$的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$. 令 $X=0$，则得该切线在 y 轴上的截距为 $y-xy'$.

由题设知$\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$，令 $u=\frac{y}{x}$，则此方程可化为$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$，解之得

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

由 L 经过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$，知 $C=\frac{1}{2}$. 于是 L 方程为

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2},\quad 即\quad y=\frac{1}{4}-x^2.$$

(2) 设第一象限内曲线 $y=\frac{1}{4}-x^2$ 在点 $P(x,y)$处的切线方程为

$$Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x(X-x),$$

即

$$Y=-2xX+x^2+\frac{1}{4}\quad\left(0<x\leqslant\frac{1}{2}\right).$$

它与 x 轴及 y 轴的交点分别为$\left(\frac{x^2+\frac{1}{4}}{2x},0\right)$与$\left(0,x^2+\frac{1}{4}\right)$. 所求面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{2x}-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)dx.$$

对 x 求导，得

$$S'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{x^2}$$

$$=\frac{1}{4x^2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(3x^2-\frac{1}{4}\right).$$

令 $S'(x)=0$，解得

$$x=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

当 $0<x<\frac{\sqrt{3}}{6}$时，$S'(x)<0$；$x>\frac{\sqrt{3}}{6}$时，$S'(x)>0$，因而 $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$是 $S(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$内的唯一极小值点，即最小值点. 于是所求切线为

$$Y=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}X+\frac{3}{36}+\frac{1}{4},$$

即
$$Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}.$$

[典型错误] 一个主要错误是对截距的理解：将截距写成了 $|y-xy'|$，往下就不好做了．如果对等式 $\sqrt{x^2+y^2}=|y-xy'|$ 两边平方，得到的将不是线性方程．

例 8.39 某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$，流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$．已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标．为了治理污染，从 2000 年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$．问至多需经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内？(注:设湖水中 A 的浓度是均匀的.)

[提示] 本题考查的是微分方程的应用．建立方程有两个常用的方法．其一是根据方程所服从的客观规律(定理、定律或几何关系)；其二是用微元法(元素法)，即求出在自变量的一个典型小区间上未知函数增量的线性主部，得到微分方程．

[解] 设从 2000 年初(令此时 $t=0$)开始，第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m，浓度为 $\frac{m}{V}$，则在时间间隔$[t,t+dt]$内，排入湖泊中 A 的量为 $\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}dt=\frac{m_0}{6}dt$，流出湖泊的水中 A 的量为 $\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}dt=\frac{m}{3}dt$，因而在此时间间隔内湖泊中污染物 A 的改变量

$$dm=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)dt.$$

由分离变量法解得 $m=\frac{m_0}{2}-Ce^{-\frac{t}{3}}$，代入初始条件 $m\Big|_{t=0}=5m_0$，得 $C=-\frac{9}{2}m_0$．于是

$$m=\frac{m_0}{2}(1+9e^{-\frac{t}{3}}).$$

令 $m=m_0$，得 $t=6\ln 3$，即至多需经过 $6\ln 3$ 年，湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内．

[典型错误] 不会用微元法建立方程．教学中应加强练习．

例8.40 从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起)与下沉速度 v 之间的函数关系．设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用．设仪器的质量为 m，体积为 B，海水比重为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 k $(k>0)$．试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$．

[提示] 本题考查的是微分方程的应用．利用牛顿第二定律即可列出微分方程，因题目要求的是 $y=y(v)$，所以直接消去 t 即得 y 与 v 的微分方程．

[解] 取沉放点为原点 O，Oy 轴正向铅直向下，则由牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-B\rho-kv.$$

将 $\frac{d^2y}{dt^2}=v\frac{dv}{dy}$ 代入以消去 t，得 v 与 y 之间的微分方程 $mv\frac{dv}{dy}=mg-B\rho-kv$.

分离变量得
$$dy=\frac{mv}{mg-B\rho-kv}dv,$$

积分后得
$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+C.$$

由初始条件 $v\Big|_{y=0}=0$ 得出 $C=\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho)$，故所求的函数关系式为

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m\ (mg-B\rho)}{k^2}\ln\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}.$$

［典型错误］ 由于本题中文字(字母)多，考生分不清谁代表常数，谁是变量．结果连最简单分离变量法都不会了．原因是缺乏练习．

例8.41 位于坐标原点的我舰向位于 Ox 轴上距原点 1 个单位的 A 点处的敌舰发射制导鱼雷，且鱼雷永远对准敌舰．设敌舰以最大速度 v_0 沿平行于 Oy 轴的直线行驶，又设鱼雷的速度是敌舰的 5 倍，求鱼雷的轨迹曲线方程及敌舰行驶多远时，将被鱼雷击中？

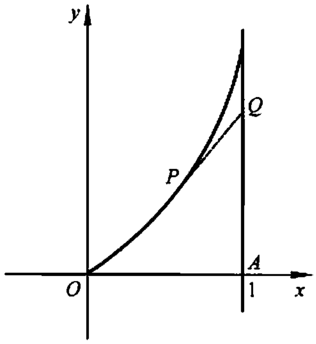

图 24

［提示］ 作出草图(图 24)，设鱼雷的轨迹曲线方程是 $y=y(x)$，引入时间变量 t，在时间 t 时，指出敌舰位置、鱼雷位置及其运动方向，并利用时间段 t 内鱼雷走过的距离和敌舰的距离列出微分方程及初始条件并求解．

［解］ 经过时间 t，敌舰的坐标为 $Q(1,v_0t)$．设鱼雷在轨迹曲线上的坐标为 $P(x,y)$，由于鱼雷始终对准敌舰．故有

$$y'=\frac{v_0t-y}{1-x},$$

又鱼雷的速度为 $5v_0$，故有

$$\overset{\frown}{OP}=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,dx=5v_0t,$$

即

$$v_0t=\frac{1}{5}\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

$$(1-x)y'=\frac{1}{5}\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\,dx-y.$$

对 x 求导得

$$(1-x)y''=\frac{1}{5}\sqrt{1+y'^2}.$$

这是不含 y 的可降阶的二阶方程，其初始条件是

$$y\Big|_{x=0}=0,\qquad y'\Big|_{x=0}=0.$$

令 $y'=p$，$y''=p'$，代入上述方程得

$$(1-x)p'=\frac{1}{5}\sqrt{1+p^2}.$$

分离变量，两边积分，得

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=-\frac{1}{5}\ln(1-x)+\ln C_1,$$

$$y'+\sqrt{1+y'^2}=\frac{C_1}{\sqrt[5]{1-x}},\tag{*}$$

由初始条件 $y'(0)=0$，得 $C_1=1$.

上式两端同乘 $y'-\sqrt{1+y'^2}$，可得

$$y'-\sqrt{1+y'^2}=-\sqrt[5]{1-x}.\tag{**}$$

(*)和(**)相加，得

$$y'=\frac{1}{2}\left[(1-x)^{-\frac{1}{5}}-(1-x)^{\frac{1}{5}}\right].$$

两边积分得

$$y=\frac{1}{2}\left[-\frac{5}{4}(1-x)^{\frac{4}{5}}+\frac{5}{6}(1-x)^{\frac{6}{5}}\right]+C_2.$$

由 $y(0)=0$，得 $C_2=\frac{5}{24}$，故

$$y=\frac{-5}{8}(1-x)^{\frac{1}{5}}+\frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}}+\frac{5}{24}.$$

当 $x=1$ 时，$y=\frac{5}{24}$，故知当敌舰航行$\frac{5}{24}$个单位距离时，将被鱼雷击中.

第二部分　线性代数

一、行列式

・考试内容与要求・

考试内容

行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理

考试要求

1. 了解行列式的概念、掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

・考试内容解析・

(一) 定义

n 阶行列式是一个数，表示 $n!$ 项的代数和，其定义是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 n 个数$1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，和号是对所有这样的排列求和．因此是 $n!$ 项的代数和.

(二) 行列式的性质

1. 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等，其中 D^{T} 是指将 D 的行与列按原次序互换所得到的行列式.

2. 互换行列式的两行(列)，行列式变号．因此，若行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

3. 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式的外面，也就是说，用一个数乘行列式等于用此数乘该行列式的某一行(列)的所有元素.

4. 行列式中如果有两行(列)的元素成比例，则此行列式等于零.

5. 若行列式的某一行(列)的元素都是两个数之和，则此行列式等于相应两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上去，该行列式的值不变.

(三) 行列式按行(列)展开

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij}的余子式，记为 M_{ij}．而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$叫做元素 a_{ij}的代数余子式.

展开定理　行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和．即若 n 阶行列式