第二部分　线性代数

一、行列式

·考试内容与要求·

考试内容

行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理

考试要求

1. 了解行列式的概念、掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

·考试内容解析·

(一) 定义

n 阶行列式是一个数，表示 $n!$ 项的代数和，其定义是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，和号是对所有这样的排列求和．因此是 $n!$ 项的代数和.

(二) 行列式的性质

1. 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等，其中 D^{T} 是指将 D 的行与列按原次序互换所得到的行列式.

2. 互换行列式的两行(列)，行列式变号．因此，若行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

3. 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式的外面，也就是说，用一个数乘行列式等于用此数乘该行列式的某一行(列)的所有元素.

4. 行列式中如果有两行(列)的元素成比例，则此行列式等于零.

5. 若行列式的某一行(列)的元素都是两个数之和，则此行列式等于相应两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上去，该行列式的值不变.

(三) 行列式按行(列)展开

在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}．而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

展开定理　行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和．即若 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记为 D. 则有

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \ (i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \ (j = 1,2,\cdots,n).$$

由展开定理和行列式的性质 2 可知：行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0,\ i \neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0,\ i \neq j.$$

于是，我们得到有关代数余子式的重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & 当\ i = j, \\ 0, & 当\ i \neq j; \end{cases} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & 当\ i = j, \\ 0, & 当\ i \neq j, \end{cases}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & 当\ i = j, \\ 0, & 当\ i \neq j. \end{cases}$$

·例 题 详 解·

例 1.1 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

则第 4 行各元素的余子式之和的值为________.

［答案］ -28.

［提示］ 本题主要考查行列式的余子式概念. 可以直接计算. 也可以利用展开定理计算.

［解］ 根据余子式的定义. 所求的值为

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = -56 + 0 + 42 - 14 = -28.$$

也可以利用余子式和代数余子式的关系，并用展开定理计算：

$$M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28.$$

［典型错误］ 部分考生答案为 0，原因是将余子式和代数余子式混淆了. 本题中第四行元素的代数余子式之和的值为 0，因为

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \frac{1}{2}(2A_{41} + 2A_{42} + 2A_{43} + 2A_{44}) = \frac{1}{2} \times 0 = 0,$$

即第二行元素与第四行元素的代数余子式对应相乘的和等于零.

例 1.2 5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

[答案] $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

[提示] 本题主要考查用行列式的性质及展开定理建立递推关系，计算行列式.

[解] 记5阶行列式 $D_5=D$，把第2，3，4，5列加到第1列上，并按第一列展开，

$$D_5=\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ -a & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=D_4+(-a)(-1)^{5+1}\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ 1-a & a & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a\end{vmatrix},$$

即
$$D_5=D_4+(-a)(-1)^{5+1}a^4,$$
类似地
$$D_4=D_3+(-a)(-1)^{4+1}a^3,$$
$$D_3=D_2+(-a)(-1)^{3+1}a^2.$$

将这三个等式相加得 $D=D_5=D_2-a^3+a^4-a^5$，而 $D_2=\begin{vmatrix}1-a & a\\ -1 & 1-a\end{vmatrix}=1-a+a^2$，所以

$$D=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.$$

[典型错误] 部分考生忽略了代数余子式的符号.

例 1.3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为3维列向量，记矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$$

如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$________.

[答案] 2.

[提示] 本题主要考查行列式的性质及矩阵运算. 可以直接用行列式的性质求解，也可以利用矩阵的分块运算及性质 $|AB|=|A||B|$ 求解.

[解] 由行列式的性质知

$$\begin{aligned}|B|&=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|\\&=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_2+5\alpha_3|\\&=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_3|\\&=|\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,2\alpha_3|=|\alpha_1,\alpha_2,2\alpha_3|=2|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=2.\end{aligned}$$

利用矩阵分块运算的解法如下：

由于
$$\begin{aligned}B&=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)\\&=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},\end{aligned}$$

又已知 $|A|=1$，

所以
$$|B|=\left|A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}\right|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2.$$

例 1.4 设4阶矩阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中 α、β、γ_2、γ_3、γ_4 是4维列向量，且 $|A|=4$，$|B|=1$，则 $|A+B|=$________.

[答案] 40.

[提示] 本题考查矩阵运算与行列式的性质.

［解］ 由于矩阵 $A+B=(\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4)$，所以

$$|A+B|=|\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4|=8|\alpha+\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|$$
$$=8(|\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|+|\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|)=8(4+1)=40.$$

［典型错误］ 部分考生将矩阵运算与行列式的性质混淆，得出错误结论 $|A+B|=|A|+|B|$. 行列式的一个性质是行列式的某一行(列)均为两个数和时，可把行列式拆成两个行列式的和.

例 1.5　设 A 是 3 阶方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，A 的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$，求行列式 $|(3A)^{-1}-2A^*|$ 的值.

［答案］ $-\frac{16}{27}$.

［提示］ 本题考查矩阵运算与行列式的性质.

［解］ 由于 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，所以 $A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$，故

$$|(3A)^{-1}-2A^*|=|(3A)^{-1}-A^{-1}|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-A^{-1}\right|$$
$$=\left|\left(-\frac{2}{3}\right)A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3|A^{-1}|=-\frac{8}{27}\times2=-\frac{16}{27}.$$

［典型错误］ 不少考生把 $|kA|=k^n|A|$ 错误地写成 $|kA|=k|A|$，把 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ 写成 $(kA)^{-1}=kA^{-1}$.

例 1.6　记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

［答案］ (B).

［提示］ 本题主要考查行列式的计算. 求出行列式的值就可以确定多项式 $f(x)$ 的次数.

［解］ 利用行列式的性质可得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x(x-1),$$

所以 $f(x)$ 是二次多项式，其根的个数为 2.

［典型错误］ 由于每一元素中均有 x，部分考生错误地认为 $f(x)$ 是 4 次多项式而选(D).

例 1.7　若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m$，$|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n$，则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|$ 等于

(A) $m+n$.　　(B) $-(m+n)$.　　(C) $n-m$.　　(D) $m-n$.

［答案］ (C).

［提示］ 本题主要考查用行列式的性质计算行列式.

［解］ 利用行列式的性质

$$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|$$
$$=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2|$$
$$=-m+|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|$$

$= n - m.$

例 1.8　4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$.　　(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$.

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$.　　(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$.

[答案]　(D).

[提示]　本题考查行列式的性质与展开定理.

[解]　按第一行展开，直接计算：

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3).$$

也可以用行列式的性质，互换 2，4 列再互换 2，4 行，化为对角分块形式来计算.

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3).$$

[典型错误]　选择(A)的考生错误地使用了对角线法则. 选择(B)的考生在用行列式定义计算时，丢了两项.

例 1.9　设 A 是 n 阶矩阵，且 A 的行列式 $|A| = 0$. 则 A 中

(A) 必有一列元素全为 0.　　(B) 必有两列元素对应成比例.

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合.　　(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.

[答案]　(C).

[提示]　本题考查是 $|A| = 0$ 的必要条件，可用举反例的方法排除错误结论，也可以用分析方法证明.

[解]　由行列式的性质知本题中(A)，(B)，(C)，(D)均为 $|A| = 0$ 的充分条件，我们要找的是必要条件. 对于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

我们有 $|A| = 0$. 但(A)与(B)均不成立. 对于矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

我们有 $|B| = 0$，但矩阵 B 的第 3 列不是前两列的线性组合，即(D)不成立，所以正确答案为(C).

也可以这样分析：设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，则

$|A| = 0 \Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的秩 $< n \Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某个 α_i 可由其余的向量线性表示. 所以正确答案为(C).

[典型错误] 选择错误的原因是混淆了充分条件与必要条件.

例 1.10 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{pmatrix}.$$

计算 $|A|$.

[提示] 本题考查 n 阶行列式的计算. 计算 n 阶行列式通常都要根据具体问题进行分析. 本题 $|A|$ 的每一行均由 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 构成, 将第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第一列上, 可提出公因子 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+b$.

[解] 由行列式的性质

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}a_i+b & a_2 & \cdots & a_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i+b & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i+b & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right).$$

例 1.11 设 A 是 n 阶方阵, 且 $2,4,\cdots,2n$ 是 A 的 n 个特征值. E 是 n 阶单位矩阵. 计算行列式 $|A-3E|$ 的值.

[提示] 本题可以借助矩阵对角化计算, 也可以直接用公式 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵 A 的特征值.

[解] 由于矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值, 故 A 可以对角化, 即存在可逆矩阵 P, 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 4 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2n \end{pmatrix}=\Lambda,$$

于是 $A=P\Lambda P^{-1}$, 所以 $A-3E=P\Lambda P^{-1}-3E=P(\Lambda-3E)P^{-1}$, 从而

$$|A-3E|=|P(\Lambda-3E)P^{-1}|=|P||(\Lambda-3E)||P^{-1}|=|(\Lambda-3E)|=-[(2n-3)!!].$$

也可以这样求解: 由于 A 的特征值为 $2,4,\cdots,2n$, 所以 $A-3E$ 的特征值为 $-1,1,3,\cdots,2n-3$, 从而

$$|A-3E|=(-1)\cdot1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-3)=-[(2n-3)!!].$$

例 1.12 设 A 为 n 阶非零矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵. 当 $A^*=A^T$ 时, 证明 $|A|\neq0$.

[提示] 本题主要考查伴随矩阵的概念、行列式的展开定理及矩阵运算.

[证法 1] 由于 $A^*=A^T$, 所以

$$A_{ij}=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n),$$

其中 A_{ij} 为行列式 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式. 由题设 $A\neq O$ (元素全为 0 的矩阵), 不妨设某个元素 $a_{ij}\neq0$,

于是

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{ij}A_{ij} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
$$= a_{i1}a_{i1} + \cdots + a_{ij}a_{ij} + \cdots + a_{in}a_{in} \geqslant a_{ij}^2 > 0.$$

[证法 2] 反证法若 $|A|=0$，由于 $A^* = A^{\mathrm{T}}$，所以 $AA^{\mathrm{T}} = AA^* = |A|E = O$. 记

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \alpha_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}，则 A^{\mathrm{T}} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

于是
$$AA^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}} \\ \alpha_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \alpha_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n \\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

故 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i = 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $\alpha_i = 0$. 于是 $A = O$，与题设 A 为非零矩阵矛盾，从而 $|A| \neq 0$.

[典型错误] 部分考生误认为 $A \neq O$ 便有 $|A| \neq 0$；部分考生不知如何应用条件 $A^* = A^{\mathrm{T}}$. 这都是基本概念不清所致.

二、矩阵

·考试内容与要求·

考试内容

矩阵的概念　矩阵的线性运算　矩阵的乘法　方阵的幂　方阵乘积的行列式　矩阵的转置　逆矩阵的概念和性质　矩阵可逆的充分必要条件　伴随矩阵　矩阵的初等变换　初等矩阵　矩阵的秩　矩阵的等价　分块矩阵及其运算

注　数学二不包括“分块矩阵及其运算”.

考试要求

1. 理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质.

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.

3. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵.

4. 理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

5. 了解分块矩阵及其运算.

注　数学二不要求“了解分块矩阵及其运算”.

·考试内容解析·

(一) 矩阵及其运算

1. 矩阵的概念

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$