第一部分 微 积 分

一、函数、极限、连续

·考试内容与要求·

考试内容

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限和右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系 无穷小量的性质及无穷小量的比较 极限的四则运算 极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法. 了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

·考试内容解析·

(一) 函数

1. 函数的概念及表示法

(1) 函数的定义：设有两个变量 x 与 y，如果当变量 x 在某数集 D 内任取一值时，变量 y 按照一定的法则总有一个确定值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$.

这时称 x 是自变量，y 是因变量. 称 x 的取值范围 D 是函数 $f(x)$ 的定义域，y 的取值范围为函数 $f(x)$ 的值域.

一个函数是由它的定义域和对应法则所确定的. 换句话说，两个函数，若它们的定义域相同，在该定义域上的对应法则也相同，则这两个函数相等.

(2) 函数的表示法：常用的函数的表示法有四种：公式法(解析法)、表格法、图像法和文字叙述法. 如，函数 $y=[x]$的对应法则是“y 为不超过 x 的最大整数”，这就是一种文字叙述法. 它比较简洁，虽然用公式法也可表示该函数，但是没有这么直接明了.

2. 函数的简单性质

(1) 单调性：设 $y=f(x)$在某区间 I 内有定义，如果对于该区间内的任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$在区间 I 内是单调增加的(或单调减少的).

区间 I 内单调增加的函数的图像是在区间 I 内上升的曲线. 如图 1.1.1；

区间 I 内单调减少的函数的图像是在区间 I 内下降的曲线. 如图 1.1.2.

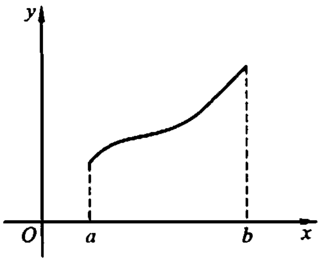

图 1.1.1

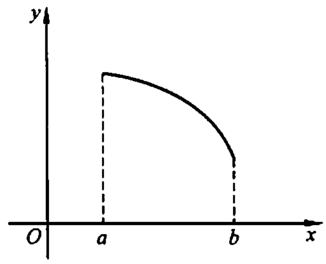

图 1.1.2

值得注意的是. 函数的单调性是和某个区间 I 有关系的，一个函数可能在一个区间内单调，而在另外的区间内没有单调性；也可能在一个区间内单调增加，而在另外的区间内单调减少. 如，$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数，但是在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加,在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$内单调减少.

(2) 奇偶性：设 $y=f(x)$在某对称于原点的区间 I 内有定义. 如果对于 I 内任意点x. 恒有 $f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$在 I 内是偶函数；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$在 I 内是奇函数.

偶函数的图像对称于 y 轴(如图 1.1.3). 奇函数的图像对称于原点(如图 1.1.4).

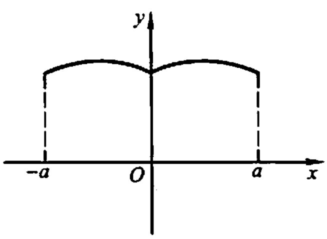

图 1.1.3

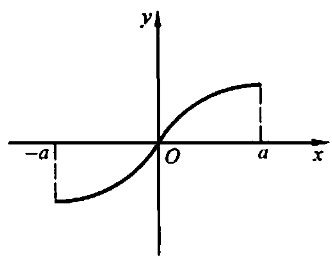

图 1.1.4

关于函数的奇偶性，按其定义易推出以下结果：

① 若 $f(x)$，$g(x)$是区间$(-a,a)$内的偶函数. 则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq0)$也是$(-a,a)$内的偶函数.

② 若 $f(x)$，$g(x)$是区间$(-a,a)$内的奇函数，则 $f(x)\pm g(x)$是$(-a,a)$内的奇函数，$f(x)g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq0)$是$(-a,a)$内的偶函数.

③ 若在区间$(-a,a)$内，$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，则 $f(x)g(x)$. $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq0)$是$(-a,a)$内的奇函数.

(3) 周期性：设 $y=f(x)$在 R 内有定义，若存在一个正的常数 T. 使得 $f(x+T)=f(x)$对于任意的 $x\in\mathrm{R}$ 都成立. 则称 $f(x)$是周期函数. 通常将满足关系式的最小正数 T 称为函数$f(x)$的周期.

(4) 有界性：设 $y=f(x)$在区间 I 内有定义，如果存在 $M>0$，使得对于任意 $x\in I$，都有$|f(x)|\leqslant M$，

则称$f(x)$在 I 内有界.

对于周期函数的图像，只需关心它在一个周期内的图像，如$[0,T]$上，其他区间的图像可由平移得到.

关于函数的有界性，要注意它是一个与区间 I 相联系的概念. 例如，函数 $y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$内是无界函数，而在$(1,2)$内是有界函数.

3. 复合函数

设 $y=f(u)$的定义域为 D_u，$u=\varphi(x)$的定义域为 D_x，值域为 E. 若 $E\subseteq D_u$，则对于任意 $x\in D_x$，有 $u=\varphi(x)$与x 对应，而 $u\in E\subseteq D_u$，故又有确定的 y 与u 对应，从而，对于任意 $x\in D_x$，都有确定的 y 与 x 对应，按照函数的定义，确定了 y 是 x 的函数. 此函数是通过中间变量 u 建立的 y 与 x 的对应关系，因而，称此函数为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$的复合函数，记为 $y=f(\varphi(x))$.

若 $u=\varphi(x)$的值域 E 只有部分含在$f(u)$的定义域 D_u 内，此时仍能确定复合函数 $y=f(\varphi(x))$，只不过这时它的定义域也只是 D_x 的一部分.

4. 反函数

设 $y=f(x)$的值域为 D_y，如果对于 D_y 中的任意一y 值，从关系式 $y=f(x)$中可确定唯一的 x 值. 则此时按照函数的定义，也确定了 x 是y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此也称 $y=f^{-1}(x)$是 $y=f(x)$的反函数.

$y=f^{-1}(x)$与 $y=f(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

注意：$x=f^{-1}(y)$与 $y=f(x)$的图像相同.

5. 初等函数与基本初等函数

(1) 基本初等函数：称下述五种函数为基本初等函数：

幂函数　$y=x^{\mu}$ （μ 为实数）.

指数函数　$y=a^x$ （$a>0$,且 $a\neq1$）.

对数函数　$y=\log_a x$ （$a>0$,且 $a\neq1$）.

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

(2) 初等函数：由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合而成，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

6. 分段函数

如果一个函数 $f(x)$在其定义域的不同的区间内，其对应法则 f 有着不同的初等函数表达式. 则称此函数为分段函数.

7. 常见题目类型

(1) 已知 $f(\varphi(x))$的表达式，求 $f(x)$的表达式.

(2) 已知奇(偶)函数 $f(x)$在$[0,a]$(或$[-a,0]$)上的表达式，求其在该区间的对称区间$[-a,0]$(或$[0,a]$)上的表达式.

(3) 已知两个分段函数 $f(x)$，$g(x)$的表达式，求复合函数 $f(g(x))$的表达式.

(4) 已知函数求反函数的表达式.

(5) 判断单调函数经过复合等运算后的函数的单调性.

(6) 求函数经过多次自身复合运算后的表达式.

(7) 求初等函数的定义域.

(二) 极限

1. 极限的有关定义

(1) 数列极限的定义：对于数列$\{x_n\}$，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称常数 a 是$\{x_n\}$的当 n 趋于无穷时的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，也记为 $x_n\to a$ （$n\to\infty$）. 此时也称数列$\{x_n\}$收敛. 若$\{x_n\}$的极限不存在，则称数列$\{x_n\}$发散.

(2) 当自变量趋于无穷时函数极限的定义：

① 设 $f(x)$ 当 $|x|$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于无穷时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，也记为 $f(x)\to A$ $(x\to\infty)$.

② 设 $f(x)$ 当 x 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，使得当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于正无穷时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，也记为 $f(x)\to A$ $(x\to+\infty)$.

③ 设 $f(x)$ 当 $-x$ 充分大时有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，使得当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于负无穷时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，也记为 $f(x)\to A$ $(x\to-\infty)$.

(3) 当自变量趋于某定点时函数极限的定义：

① 设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，或 $f(x)\to A$ $(x\to x_0)$.

② 设 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，或 $f(x)\to A$ $(x\to x_0^-)$.

③ 设 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是 $f(x)$ 的当 x 趋于 x_0 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，或 $f(x)\to A$ $(x\to x_0^+)$.

(4) 无穷小量的定义：如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则称数列 $\{x_n\}$ 为当 $n\to\infty$ 时的无穷小量.

类似地，可定义当 $x\to\infty$ 时的无穷小量.

(5) 无穷大量的定义：设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $M>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 是当 x 趋于 x_0 时的无穷大量. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

类似地，可定义 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

类似地，还可定义当 $x\to\infty$ 与 $n\to\infty$ 时的无穷大量.

(6) 无穷小量阶的定义：设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$.

① 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是比 β 高阶的无穷小量，记为 $\alpha=o(\beta)$.

② 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A$ $(A\neq0)$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是与 β 同阶的无穷小量，记为 $\alpha=O(\beta)$. 特别地，若 $A=1$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是与 β 等价的无穷小量，记为 $\alpha\sim\beta$.

③ 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称当 $x\to x_0$ 时，α 是比 β 低阶的无穷小量.

类似地，可定义当 $x\to\infty$ 与 $n\to\infty$ 情形下的无穷小量的阶.

2. 极限的有关性质

(1) 数列极限的有关性质

① (唯一性)若数列 $\{x_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则极限是唯一的.

② (有界性)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则数列 $\{x_n\}$ 有界，即存在 $M>0$，使得对任意 n 均有 $|x_n|\leqslant M$.

③ (单调有界准则)若数列$\{x_n\}$满足$x_n \leqslant x_{n+1}$(或$x_n \geqslant x_{n+1}$)，且存在常数$M>0$，使$|x_n| \leqslant M$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

④ (夹逼准则)对于数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，若存在$N>0$，使得当$n>N$时，满足$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

⑤ (保号性)若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且$a>0$(或$a<0$)，则存在正整数$N$，使得当$n>N$时$x_n>0$(或$x_n<0$).

⑥ 若数列$\{x_n\}$对于任意的$n\in \mathrm{N}$，均有$x_n \geqslant 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$a \geqslant 0$.

(2) 函数极限的有关性质

① (唯一性)若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则极限是唯一的.

② (局部保号性)若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且$A>0$(或$A<0$)，则存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

③ 若$f(x) \geqslant 0$，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则$A \geqslant 0$.

④ (局部有界性)若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则存在$x_0$的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$，使得$f(x)$在该邻域内有界.

⑤ (极限与左、右极限的关系)$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

⑥ (极限与无穷小量的关系)$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$的充分必要条件是$f(x) = A + \alpha$，其中$\lim\limits_{x\to x_0} \alpha = 0$.

⑦ (夹逼准则)若在x_0的某去心邻域内有$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

以上有关函数极限的性质当$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$时也有相应的形式，请读者自行写出.

⑧ (单调有界准则)若对于任意两个充分大的x_1，x_2，$x_1<x_2$，有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$)，且存在常数M，使$f(x)<M$(或$f(x)>M$)，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

(3) 数列极限与函数极限的关系

① 若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$.

② 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，$x_n \neq x_0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

3. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$，$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

通过变量替换，这两个公式可写成更加一般的形式：设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，且$f(x)\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1.$$

$$\lim_{x\to x_0} [1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \mathrm{e}.$$

4. 极限的运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，则：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = AB$.

(3) 若$B\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

上述性质当$x\to\infty$时也成立. 在数列极限的运算中，也有完全类似的法则.

5. 无穷小量的有关性质

(1) 有限个无穷小量的代数和是无穷小量.

(2) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

(3) 有界变量乘无穷小量是无穷小量.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$.

(5) 若 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大量；反之，若 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

(6) (等价无穷小量替换)设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta=0$，且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质当 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时也成立.

6. 常用的等价无穷小量

当 $x\to 0$ 时，有以下等价的无穷小量：

(1) $\sin x\sim x$.

(2) $\tan x\sim x$.

(3) $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$.

(4) $e^x-1\sim x$.

(5) $\ln(1+x)\sim x$.

(6) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$　(α 是实常数).

7. 常见的题目类型

(1) 利用极限的有关定义和性质的选择题.

(2) 利用等价无穷小量替换的性质求“$\dfrac{0}{0}$”型极限.

(3) 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 求“1^∞”型极限.

(4) 利用“通分相加”等初等变形将“$\infty-\infty$”型、“$0\cdot\infty$”型、“1^∞”型、“0^0”型、“∞^0”型化为“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型求极限.

(5) 利用分子、分母有理化变形求极限.

(6) 利用“拆项相消”变形求 n 项和式的极限.

(7) 利用左、右极限求极限或证明极限不存在，常见于分段函数.

(8) 利用“夹逼准则”求极限.

(9) 利用“单调有界准则”求数列的极限.

(10) 利用极限或无穷小量的性质求极限.

(11) 求有理函数的极限.

(12) 利用“变量替换”求极限.

(13) 利用洛必达法则求极限.

(14) 利用定积分的定义求 n 项和的极限.

(15) 利用收敛级数的通项的必要条件求极限.

以上(13)、(14)、(15)的有关内容见微分学、积分学和级数部分.

(三) 连续性

1. 函数连续的有关定义

(1) 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续.

(2) 设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义. 如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续.

在上面两式中, 若记 $x=x_0+\Delta x$, 则可看出这两个定义是等价的.

(3) 设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续.

以上三个定义是相互等价的.

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处右连续; 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处左连续.

(5) 若 $f(x)$在(a,b)内每一点处都连续, 则称 $f(x)$在(a,b)内连续. 若 $f(x)$在(a,b)内连续, 还在 $x=a$ 处右连续, 在 $x=b$ 处左连续, 则称 $f(x)$在$[a,b]$上连续.

2. 函数间断点的定义及分类

(1) 若在 $x=x_0$ 处, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在, 或 $f(x_0)$无定义, 或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$, 则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处间断, $x=x_0$称为 $f(x)$的间断点.

(2) 若 $x=x_0$ 是 $f(x)$的间断点, 则有:

① 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在, 则称 $x=x_0$ 是可去间断点.

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在, 但不相等, 则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$的跳跃间断点.

③ 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$, 则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$的无穷间断点.

④ 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在, 且当 $x\to x_0$ 时函数值在摆动, 则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$的振荡间断点.

上述中, ①、②两类称为第一类间断点, ③、④两类称为第二类间断点.

3. 连续函数的运算性质

(1) 若 $f(x)$, $g(x)$均在 $x=x_0$ 处连续, 则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$也在 $x=x_0$ 处连续.

(2) 若 $u=\varphi(x)$在 $x=x_0$ 处连续, $y=f(u)$在 $u_0=\varphi(x_0)$处连续, 则复合函数 $y=f(\varphi(x))$在 $x=x_0$ 处连续.

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, $y=f(u)$在 $u=a$ 处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))=f(a)$.

(4) 若 $y=f(x)$在区间 I_x 上单调且连续, 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$在相应的区间 $I_y=\{x|x=f(y),y\in I_x\}$上单调且连续.

(5) 基本初等函数在其定义域内连续.

(6) 初等函数在其定义区间内连续.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) (有界性)若 $f(x)$在$[a,b]$上连续, 则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

(2) (最值性)若 $f(x)$在$[a,b]$上连续, 则 $f(x)$在$[a,b]$上必有最大值、最小值.

(3) (介值性)若 $f(x)$在$[a,b]$上连续, 则 $f(x)$在$[a,b]$上可取到介于 $f(x)$在$[a,b]$上最小值与最大值之间的一切值.

(4) (零点存在定理)设 $f(x)$在$[a,b]$上连续, 且 $f(a)\cdot f(b)<0$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使$f(\xi)=0$.

5. 常见的题目类型

(1) 函数经过加、减、乘、除和复合运算后的连续性判断.

(2) 分段函数在分界点处连续性的判断.

(3) 间断点的判断与分类.

(4) 开区间内连续函数有界性的判断.

(5) 含参变量的极限式所表示的函数间断点的判断.

(6) 利用"连续函数零点存在定理"证明方程的实根的存在性.

(7) 无穷区间内连续函数有界性的判断.

(8) 利用"连续函数的介值定理"证明函数可取到某定值或方程的根的存在性.

·例题详解·

例 1.1.1 已知 $f(x)=\sin x$, $f(\varphi(x))=1-x^2$. 则 $\varphi(x)=$ ________ 的定义域为 ________.

[答案] $\arcsin(1-x^2)$, $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

[提示] 此题主要考查函数的复合运算、反三角函数的性质以及初等函数的定义域的求法.

[解] 由于 $f(x)=\sin x$,

所以
$$f(\varphi(x))=\sin\varphi(x).$$

由题设知
$$\sin\varphi(x)=1-x^2.$$

于是
$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

由于 $\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$,

所以有
$$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1,$$

于是得
$$x^2\leqslant 2,$$

即
$$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}.$$

所以, 此填空题的空白处应依次填 $\arcsin(1-x^2)$, $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

[典型错误]

① 对函数的复合运算不熟练.

② 将反三角函数的定义域记错.

例 1.1.2 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$ ____________.

[答案] 2.

[提示] 本题主要考查"$\infty-\infty$"型, "$\dfrac{\infty}{\infty}$"型极限的计算方法. 由于本题是"平方根式之差"的形式, 可考虑用分子有理化的方法变形, 化为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型的极限.

[解]
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}}\\
=&2.
\end{aligned}$$

所以, 本题应填 2.

[典型错误] 部分考生得 0 或∞, 原因是没有掌握"$\infty-\infty$"型极限的求法.

例 1.1.3 根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$ ____________.

[答案] $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

[提示] 本题考查的内容和解题的方法与例 1.1.2 一样, 所不同的是先要对根号内的"n 项和式"求和.

［解］ 由于

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

所以，应填$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

［典型错误］ 部分考生填 0 或∞，原因是没有先求和或不会处理“根式之差”.

例 1.1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$ ________.

［答案］ 1.

［提示］ 本题主要考查数列极限的概念．若正确理解数列极限的定义，就可用$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}$与$\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}$的存在且相等来求出$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$的值.

［解］ 设

$$a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}.$$

由于

$$\lim_{k\to\infty}a_{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{2k}=1,$$

且

$$\lim_{k\to\infty}a_{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k+1+1}{2k+1}\right)^{-1}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

［典型错误］ 一些考生由极限“$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$”不存在而错误地推知本题的极限也不存在．原因是对数列极限的定义理解不深.

例 1.1.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=$ ________.

［答案］ $\frac{6}{5}$.

［提示］ 本题主要考查等价无穷小量的替换性质或重要极限的应用．这是一个“$0\cdot\infty$”型的极限问题，用等价无穷小量的替换性质将$\sin\frac{2}{x}$换成$\frac{2}{x}$，此题将容易化为“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限问题.

［解］

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2(3x^2+5)}{(5x+3)x}\quad\left(\sin\frac{2}{x}\sim\frac{2}{x}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{10}{x^2}}{5+\frac{3}{x}}\\&=\frac{6}{5}.\end{aligned}$$

［典型错误］ 有的考生填 0．原因是错误地应用极限运算法则：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin\frac{2}{x}\\&=0.\end{aligned}$$

例 1.1.6 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

[答案] 1，-4.

[提示] 本题主要考查等价无穷小量的替换性质和极限的四则运算法则.

[解] 由题设可知分子的极限

$$\lim_{x\to 0}\sin x(\cos x-b)=0,$$

所以有分母的极限

$$\lim_{x\to 0}(e^x-a)=0,$$

因而有

$$a=1.$$

将 $a=1$ 代入到原式，有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x-b)\quad(\sin x\sim x, e^x-1\sim x)\\&=1-b=5;\end{aligned}$$

解得

$$b=-4.$$

所以，应依次填 1，-4.

[典型错误] 有的考生填 $b=-4$，a 任意，原因是不加条件地应用洛必达法则：

$$5=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(\cos x-b)-\sin^2 x}{e^x}=1-b,$$

故 $b=4$，a 任意. 但是考生没有注意到，若要用洛必达法则，需要分母的极限为零.

例 1.1.7 设函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$,且 $a\neq 1$)，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)]=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

[答案] $\dfrac{1}{2}\ln a$.

[提示] 本题主要考查指数函数和对数函数的运算性质以及"n 项和式"的极限求法.

[解] 由题设知

$$\begin{aligned}&f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)\\&=a^1\cdot a^2\cdot\cdots\cdot a^n=a^{1+2+\cdots+n}\\&=a^{\frac{n(n+1)}{2}},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n)]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{\ln a}{2}.\end{aligned}$$

[典型错误] 有的考生填 0. 原因是错误应用极限运算法则：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)\cdot\cdots\cdot f(n)]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\ln a\\&=\ln a\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\right)\\&=0.\end{aligned}$$

例 1.1.8　极限$\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$ ________.

[答案]　e^2.

[提示]　本题主要考查应用重要极限"$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$"来解决"$1^\infty$"型不定式极限问题的能力．将此极限式化为重要极限的形式．用重要极限的结果即可解决问题．

[解]

$$\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}\right\}^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=e,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)}{x}=2.$$

所以．原式$=e^2$．应填e^2.

[典型错误]　有的考生填1或∞．原因是没有掌握"1^∞"型极限的求法．错误地采取"部分取极限"的方法：

$$\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}1^{\frac{2}{x}}=1.$$

或

$$\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\infty}=\infty.$$

例 1.1.9　设常数$a\neq\frac{1}{2}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2an+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ ____________.

[答案]　$\frac{1}{1-2a}$.

[提示]　本题主要考查数列的重要极限"$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$"和连续函数求极限的性质"$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)$".

[解]

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2an+1}{n(1-2a)}\right]^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}$$
$$=\frac{1}{1-2a}\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n(1-2a)}\right)^{n(1-2a)}\right]$$
$$=\frac{1}{1-2a}.$$

所以，应填$\frac{1}{1-2a}$.

例 1.1.10　若$a>0$、$b>0$均为常数，则$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ ___________.

[答案]　$(ab)^{\frac{3}{2}}$.

[提示]　本题主要考查函数的重要极限"$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$"和"$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$"，或考查洛必达法则的应用.

[解法 1]

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}}\right]^{\frac{3(a^x+b^x-2)}{2x}},$$

而由重要极限知

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}}=e,$$

又
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}\right)$$
$$=\ln a+\ln b$$
$$=\ln(ab).$$

所以　原式 $=e^{\frac{3}{2}\ln(ab)}=(ab)^{\frac{3}{2}}$.

[解法 2]　设 $y=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$，

则
$$\ln y=\frac{3}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}.$$

由洛必达法则，
$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln\frac{a^x+b^x}{2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3(a^x\ln a+b^x\ln b)}{a^x+b^x}$$
$$=\frac{3}{2}\ln(ab)$$
$$=\ln(ab)^{\frac{3}{2}}.$$

所以　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}y=(ab)^{\frac{3}{2}}$.

[典型错误]　有的考生填 $\ln(ab)^{\frac{3}{2}}$，原因是取了对数进行运算后忘了取指数还原.

例 1.1.11　已知 $f(x)=\begin{cases}x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的导函数在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是__________.

[答案]　$\lambda>2$.

[提示]　本题主要考查分段函数的导函数的求法以及分段函数连续性的判断方法．要根据导函数的连续性来确定 λ 的取值范围，所以，应从求导函数 $f'(x)$ 入手来解决此问题.

[解]　当 $x\neq 0$ 时，
$$f'(x)=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x};$$

当 $x=0$ 时，
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}.$$

由于 $f(x)$ 的导函数在 $x=0$ 处连续，故上面的极限应存在．因而必有 $\lambda>1$．若不然该极限不存在．所以
$$f'(0)=0,$$

于是
$$f'(x)=\begin{cases}\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

再由于 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以有
$$\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(0).$$

即
$$\lim_{x\to 0}\left(\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

由此可知必有 $\lambda>2$.

综上所述，得到 λ 的取值范围为 $\lambda>2$．应填 $\lambda>2$.

[典型错误] 误认为 $\lambda>1$，原因是极限运算不熟练；还有填 $\lambda>0$ 的，可能是将 $f(x)$ 连续与 $f'(x)$ 连续混淆了.

例 1.1.12 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ________.

[答案] 2.

[提示] 本题主要考查等价无穷小量的替换性质和等价无穷小量"$\sin x\sim x$，$x\to 0$"的应用.

[解] 由于当 $x\to\infty$ 时，$\sin\dfrac{2x}{x^2+1}\to 0$，且

$$\sin\frac{2x}{x^2+1}\sim\frac{2x}{x^2+1},$$

所以

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2.$$

应填 2.

例 1.1.13 函数(　　)在其定义域内连续.

(A) $f(x)=\ln x+\sin x$

(B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$

(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查函数的定义域、初等函数的连续性以及分段函数的连续性的判断方法. 初等函数在其定义区间内都是连续的；分段函数在其子区间内往往都是初等函数，也是连续的，而在子区间的分界点处需按照连续函数的定义来判断其连续性.

[解] 应选(A).

对于选项(A)，$\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 所以 $f(x)=\ln x+\sin x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，即 $f(x)$ 在定义区间 $(0,+\infty)$ 内连续.

对于选项(B)，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$，

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义. 故选项(B)不正确.

对于选项(C)，类似地也有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x).$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义. 故选项(C)不正确.

对于选项(D)，由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=+\infty,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义. 选项(D)不正确.

[典型错误] 没有掌握判断分段函数连续性的方法，而选择了错误选项.

例 1.1.14 设函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　).

(A) 偶函数　　(B) 无界函数　　(C) 周期函数　　(D) 单调函数

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性等性质.

[解] 应选(B). 这是因为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}x\tan x\cdot e^{\sin x}=\infty,$$

所以由无穷大量的定义知，对任意 $M>0$，存在 $\delta>0$，使当 $0<\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\geqslant M$. 故 $f(x)$

是无界函数.

容易验证选项(A)、(C)、(D)都是不正确的. 例如:

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)\tan(-x)\cdot e^{\sin(-x)}\\&=x\tan x\cdot e^{-\sin x}\\&\neq f(x).\end{aligned}$$

所以选项(A)不正确. 又例如:

对于 $0<\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$, 有

$$f(0)=0,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}},\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{3\pi}{4}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

即 $f(0)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 而 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)>f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, 所以选项(D)不正确.

例 1.1.15 函数 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间内有界?

(A) $(-1,0)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,2)$ (D) $(2,3)$

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查函数在开区间内的有界性概念以及借助极限来判断有界性的方法.

[解] 应选择(A). 这是因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}f(x)&=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}\\&=-\frac{\sin 2}{4}.\end{aligned}$$

由函数极限的性质知 $f(x)$在 $x=0$ 的某左邻域$(-\delta,0)$内有界.

又 $f(x)$在$[-1,-\delta]$上每一点都有定义, 且是初等函数. 由初等函数的连续性知 $f(x)$在$[-1,-\delta]$上连续, 而闭区间上的连续函数在该区间上有界. 所以 $f(x)$在$[-1,-\delta]$上有界且在$[-\delta,0)$上有界. 故在$(-1,0)$内有界.

对于选项(B)、(C), 由于

$$\lim_{x\to1}f(x)=\infty,$$

可推出 $f(x)$在 $x=1$ 的左、右邻域内无界, 故在区间$(0,1)$, $(1,2)$内无界. 所以选项(B)、(C)不正确.

对于选项(D), 由于

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\infty,$$

可推出 $f(x)$在 $x=2$ 的右邻域内无界, 故在区间$(2,3)$内无界. 所以选项(D)不正确.

[典型错误] 不能正确判定出正确选项(A), 误认为 $f(x)$在(A)、(B)、(C)、(D)内的有界性相同, 而随便选一个.

例 1.1.16 设 $f(x)=2^x+3^x-2$, 则当 $x\to0$ 时, ( ).

(A) $f(x)$与 x 是等价无穷小量 (B) $f(x)$与 x 是同阶但非等价无穷小量

(C) $f(x)$是比 x 较高阶的无穷小量 (D) $f(x)$是比 x 较低阶的无穷小量

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查无穷小量的比较以及无穷小量之间的“等价”、“同阶”、“较高阶”、“较低阶”的概念及判别方法.

[解] 应选择(B). 这是因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{2^x-1}{x}+\frac{3^x-1}{x}\right)\\&=\ln2+\ln3=\ln6,\end{aligned}$$

显然 $\ln 6\neq 0$，$\ln 6\neq 1$，所以选项(A)、(C)、(D)都不正确．故选项(B)正确．

[典型错误] 部分考生选(A)，原因可能是将极限求错，也可能是对概念理解错误．

例 1.1.17 设数列的通项为 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数,}\\ \dfrac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为偶数,}\end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是(　　)．

(A) 无穷大量　(B) 无穷小量　(C) 有界变量　(D) 无界变量

[答案] (D)．

[提示] 本题主要考查无穷大量、无穷小量、有界变量和无界变量等概念及判断方法．

[解] 应选择(D)．这是因为

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2+\sqrt{2n-1}}{2n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2n-1+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)=+\infty,$$

所以 x_n 不是有界变量，更不可能是无穷小量，而是无界变量．故选项(D)正确．而(B)和(C)不正确．

又因为
$$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0,$$
所以对于任意的 $M>0$，不可能存在 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n|>M$．即选项(A)也不正确．

[典型错误] 部分考生选(A)，原因是没有弄清无穷大量与无界变量之间的区别，将它们混为一谈．

例 1.1.18 当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小量中，哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量？

(A) x^2　(B) $1-\cos x$　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$　(D) $x-\tan x$

[答案] (D)．

[提示] 本题主要考查无穷小量的阶的比较以及几个常见的等价无穷小量．如当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ 等．

[解] 应选择(D)．这是因为 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{x^2}{2}$，这样(A)、(B)、(C)中的无穷小量都是同阶的，故可推知(D)应是更高阶的．事实上，

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan^2 x}{2x}=0.$$

所以 $x-\tan x$ 是比其他三个更高阶的无穷小量．

[典型错误] 部分考生选(A)．原因是不清楚无穷小量的阶的比较方法，仅从形式上认为 x^2 的次数更高．

例 1.1.19 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^{1-\cos x}\sin(t^2)\,dt$，$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)．

(A) 低阶无穷小量　(B) 高阶无穷小量

(C) 等价无穷小量　(D) 同阶但不等价的无穷小量

[答案] (B)．

[提示] 本题主要考查无穷小量的阶的比较以及定积分变上限函数的求导方法．

[解] 应选择(B)．因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{1-\cos x}\sin(t^2)\,dt}{\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\cdot\sin x}{x^4+x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2 x}{x^4+x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4}x}{x^4+x^5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{4}}{x+1}=0.$$

这里用到等价无穷小量替换：

$$\sin(1-\cos x)^2\sim(1-\cos x)^2\sim\frac{x^4}{4}.$$

[典型错误] 有的同学用下述方法做：

由
$$f'(x)=\sin(1-\cos x)^2\sin x$$
$$\sim(1-\cos x)^2 x$$
$$\sim\frac{x^5}{4},$$

推知 $f(x)$应是与 x^6 同阶的无穷小量，又 $g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$的最高次项是$\frac{x^6}{6}$，所以 $f(x)$与 $g(x)$是同阶但不等价的无穷小量，从而选择(D).

这种做法的错误在于 $g(x)$不是与 x^6 同阶的，而是与 x^5 同阶的.

例 1.1.20 设 $f(x)$，$\varphi(x)$在点 $x=0$ 的某邻域内连续，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$是 $\varphi(x)$的高阶无穷小量，则当$x\to 0$时，$\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$ 是$\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的(　　).

(A) 低阶无穷小量　　　　(B) 高阶无穷小量

(C) 同阶但不等价的无穷小量　　　　(D) 等价无穷小量

[提示] 本题主要考查无穷小量的阶的比较以及定积分变上限函数的导数求法.

[解] 应选择(B). 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t}{\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{\varphi(x)x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0,$$

由无穷小量阶的比较概念知 $f(x)$是比 $\varphi(x)$高阶的无穷小量.

例 1.1.21 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$. 则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零　　(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查考生对函数极限存在的"夹逼准则"的正确理解. 由夹逼准则，若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$，则可推出 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在. 但本题中没有条件"$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$"，只有条件"$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$". 由后者是不能推出前者的，这可以通过举例来说明. 所以应采取举反例的方法来排除错误选项.

[解] 应选择(D).

若设 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{-x^2}$，$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$g(x)=\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{-x^2}$，则 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}2\mathrm{e}^{-x^2}=0$. 但是 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x^2}$不存在，所以(A)、(B)都不正确.

对于选项(C)，当 $\varphi(x)$，$f(x)$，$g(x)$满足夹逼定理的条件时，也符合题设条件，应有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在. 故选项(C)也不正确.

综上可知，在 $\varphi(x)$，$f(x)$，$g(x)$满足题设条件时，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$可能存在，也可能不存在，故选项(D)正确.

[典型错误] 有不少考生将此题错选为(B). 原因可能是将条件"$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$"误认为与条件"$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)$"等价.

例 1.1.22 下列各式中正确的是( ).

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$ (B) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$ (D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查对重要极限"$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$"的理解和应用以及对"$\infty^0$"型极限的求法.

[解] 应选择(A). 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)},$$

而

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\quad\left(t=\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+t}}{1}=0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^0=1$，故(A)正确，而(B)不正确.

又

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}.$$

所以(C)和(D)都是不正确的.

[典型错误] 错选为(B). 原因是没有注意 $x\to 0^+$，而不是 $x\to\infty$. 将(B)错认为是重要极限"$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$".

例 1.1.23 曲线 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$的渐近线有( ).

(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查水平、铅直和斜渐近线的概念及其求法.

[解] 选择(B). 因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\infty,$$

所以 $x=0$ 是铅直渐近线.

又

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

所以 $y=\dfrac{\pi}{4}$ 是水平渐近线.

而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 所以不存在斜渐近线. 只有水平、铅直两条渐近线.

[典型错误] 选(D). 原因是误认为 $x=-1$ 和 $x=2$ 也是两条铅直渐近线，但是 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)\neq\infty$. 且 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\neq\infty$.

例 1.1.24 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为(　　).

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$　　(D) 存在间断点 $x=-1$

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查含参变量极限的求法以及分段函数间断点的求法. 此题的关键是求出极限，写出 $f(x)$ 的表达式，再求间断点.

[解] 选择(B). 这是因为

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}1+x, & |x|<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x=-1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

而

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(1+x)=2,$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}0=0,$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x);$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}0=0,$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(1+x)=0,$$

$$f(-1)=\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=0.$$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的连续点. 而在其他点处函数 $f(x)$ 都是连续的，因而只有 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点.

故选项(B)正确，其他选项不正确.

[典型错误] 选(A). 可能是将 $\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 误认为是 $f(x)$ 的表达式，从而认为 $f(x)$ 没有间断点.

例 1.1.25 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则(　　).

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点　　(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点　　(D) $g(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查函数连续性的概念及间断点类型的判断. $x=0$ 是否是 $g(x)$ 的间断点以及是什么类型的间断点，都是由极限 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 来说明的.

[解] 应选择(D). 因为

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}f\left(\frac{1}{x}\right)=a,$$

所以当 $a=0$ 时，即 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 处连续；当 $a\neq0$ 时，$\lim\limits_{x\to0}g(x)=a\neq g(0)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 处间断. 因而 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关，故选项(D)正确，其他选项均不正确.

[典型错误] 选(B). 原因可能是从 $x=0$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点来确定的，没有从极限 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 的情况来定.

例 1.1.26 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 等于(　　).

(A) a^2　　(B) $a^2f(a)$　　(C) 0　　(D) 不存在

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查函数连续性的概念、定积分变上限函数的求导方法以及求“$\frac{0}{0}$”型极限的洛必达法则.

[解] 应选择(B). 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}F(x) &= \lim_{x\to a}\frac{x^2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{2x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + x^2 f(x)}{1}\\ &= a^2 f(a).\end{aligned}$$

所以(B)正确.

[典型错误] 不会求极限$\lim\limits_{x\to a}F(x)$, 或求错, 导致选择错误选项.

例 1.1.27 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

[提示] 本题主要考查“1^∞”型极限的求法和对重要极限“$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$”的应用.

[解] 因为$\lim\limits_{x\to 0}xe^x=0$, 所以

$$\lim_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+xe^x)^{\frac{1}{xe^x}}\right]^{e^x},$$

而由重要极限的结果知

$$\lim_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{xe^x}}=e,$$

所以原式$=e^1=e$.

[典型错误] 有部分考生解题过程出现如下错误: “$\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^0)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$”, 原因是对极限的概念理解不透彻, 错误地应用极限运算法则.

例 1.1.28 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

[提示] 本题主要考查“1^∞”型极限的求法和对重要极限“$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$”的应用.

[解法 1] 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)=1$,

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x\\ &=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}\right\}^{x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)},\end{aligned}$$

而

$$\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}=e,$$

且

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\quad\left(\frac{1}{x}=t\right)\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t+\sin t-1}{t}\\ &=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}+\frac{\cos t-1}{t}\right)=1,\end{aligned}$$

故原式$=e^1=e$.

[解法 2] 设$y=\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$,

则

$$\ln y=x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(\sin t+\cos t)}{t}\quad\left(t=\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}=1\quad(\text{洛必达法则}).$$

所以原式 $=\lim_{x\to\infty}y=e$.

[典型错误] 在解法 2 中缺少最后一步，这是考生常犯的错误．这在解答题中尚可得到大部分的分数．若是在填空题中，就会全部丢分了，希望引起考生的注意．

例 1.1.29 求 $\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ （n 为正整数）．

[提示] 本题主要考查数列的“1^∞”型极限的求法和重要极限“$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$”的应用．为了利用洛必达法则和函数连续性的性质，还需用到数列极限和函数极限的关系：“若 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$，则 $\lim_{n\to\infty}f(n)=A$”，从而可将数列的极限问题转化为函数的极限问题．

[解法 1] 由于 $\lim_{x\to+\infty}x\tan\frac{1}{x}=1$，

所以
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\left(x\tan\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x\tan\frac{1}{x}-1}}\right\}^{x^2\left(x\tan\frac{1}{x}-1\right)}.$$

因为
$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(x\tan\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x\tan\frac{1}{x}-1}}=e,$$

且
$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(x\tan\frac{1}{x}-1\right)$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\tan t-t}{t^3}\quad\left(t=\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sec^2t-1}{3t^2}\quad(\text{洛必达法则})$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\tan^2t}{3t^2}=\frac{1}{3}.$$

所以原式 $=\lim_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{\frac{1}{3}}$.

[解法 2] 设 $y=\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^2}$，

则
$$\ln y=x^2\left(\ln x+\ln\tan\frac{1}{x}\right),$$
$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\ln x+\ln\tan\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\tan t-\ln t}{t^2}\quad\left(t=\frac{1}{x}\right)$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\sec^2t}{\tan t}-\frac{1}{t}}{2t}\quad(\text{洛必达法则})$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t\sec^2t-\tan t}{2t^3}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\frac{1}{2}\sin 2t}{2t^3}\cdot\frac{1}{\cos^2t}$$
$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos 2t}{6t^2}\quad(\text{洛必达法则})$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{2\sin 2t}{12t} = \frac{1}{3} \quad （洛必达法则）.$$

所以原式 $= \lim_{x\to +\infty} y = e^{\frac{1}{3}}$.

［典型错误］ 一些考生没有将 n 换成 x 就直接用洛必达法则，这是不规范的．一般情况下是要扣分的．

例 1.1.30 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的正整数．

［提示］ 本题主要考查函数的"1^∞"型极限的求法和重要极限"$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$"的应用．特别要注意，题中的 n 是常数，即是有限项和．

［解法 1］ 由于 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} = \frac{n}{n} = 1$，

所以
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left\{\left[1 + \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1}}\right\}^{\frac{1}{x}\left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1\right)},$$

而
$$\lim_{x\to 0}\left[1 + \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1}} = e\,.$$

且
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} - 1\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{nx}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{nx}$$
$$= \frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} + \cdots + \frac{e^{nx} - 1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{n}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{n+1}{2}.$$

所以原式 $= e^{\frac{n+1}{2}}$.

［解法 2］ 设 $y = \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，则
$$\ln y = \frac{1}{x}\ln\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n}$$
$$= \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{x},$$

而
$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}} \quad （洛必达法则）$$
$$= \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n}$$
$$= \frac{n+1}{2},$$

所以原式 $= \lim_{x\to 0} y = e^{\frac{n+1}{2}}$.

例 1.1.31 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，且 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = e$，
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim_{x\to\infty}[f(x) - f(x-1)].$$

求 c 的值.

［提示］ 本题主要考查“1^{∞}”型函数极限的求法以及拉格朗日中值定理的应用．在条件

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$$

中，左边是一个与 c 有关的“1^{∞}”型极限．求出来应是一个含有 c 的表达式．右边是函数 $f(x)$的“差值”，通过拉格朗日中值定理可与导数 $f'(x)$相联系，再由 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e}$ 可解得 c 的值．

［解］ 显然 $c\neq0$．由于

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}$$

$$=\mathrm{e}^{2c},$$

且 $$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi),$$

其中 ξ 介于 $x-1$ 与 x 之间．所以，当 $x\to\infty$时，有 $\xi\to\infty$，

于是 $$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}.$$

所以有 $$\mathrm{e}^{2c}=\mathrm{e},$$

解得 $$c=\frac{1}{2}.$$

［典型错误］ 一部分考生对极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$无法入手，而导致错误或不完整，其原因是对拉格朗日中值定理的实质掌握不好，不会应用．

例 1.1.32 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}$．

［提示］ 本题主要考查“$\frac{0}{0}$”型极限的求法．在求这类极限时常用洛必达法则、等价无穷小量替换以及重要极限．

［解］ 由于当 $x\to+\infty$时，$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}$，所以

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot}x}\quad\left(“\frac{0}{0}”型\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^{2}}}{-\frac{1}{1+x^{2}}}\quad（洛必达法则）\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{2}}{x^{2}}=1.\end{aligned}$$

例 1.1.33 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{x}-1}{x\ln x}$．

［提示］ 本题主要考查“$\frac{0}{0}$”型极限的计算方法．在使用洛必达法则解决本题时，还要涉及幂指函数的导数的计算方法．另外．仔细观察还可发现，在此极限式子中，变量以整体“x^{x}”形式出现，所以，还可先用变量替换方法，将此极限式化为较简单的形式，再计算．因此，本题可有两种解法．

［解法 1］

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{x^{x}-1}{x\ln x}\quad\left(“\frac{0}{0}”型\right)\\&=\lim_{x\to1}\frac{x^{x}(\ln x+1)}{\ln x+1}\quad（洛必达法则）\\&=\lim_{x\to1}x^{x}=1.\end{aligned}$$

[解法 2]

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{x^x-1}{x\ln x}\\=&\lim_{x\to1}\frac{x^x-1}{\ln x^x}\\=&\lim_{t\to1}\frac{t-1}{\ln t}\quad(t=x^x)\\=&\lim_{t\to1}\frac{1}{\frac{1}{t}}=1\quad(\text{洛必达法则}).\end{aligned}$$

[典型错误] 一部分考生对幂指函数 x^x 求导出错而导致题目解错.

例 1.1.34 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$.

[提示] 本题主要考查"$\frac{0}{0}$"型极限的求法以及洛必达法则的应用. 在计算过程中，注意与其他方法的结合.

[解]

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}\\=&\lim_{x\to1}\frac{\tan(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}\quad(\text{洛必达法则})\\=&\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}\quad(\tan(x-1)\sim(x-1))\\=&\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}\quad(\text{洛必达法则})\\=&-\frac{4}{\pi^2}.\end{aligned}$$

[典型错误] 部分考生没有用等价无穷小量替换化简函数，导致求导复杂而出错.

例 1.1.35 求极限$\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

[提示] 本题主要考查"$0\cdot\infty$"型极限的求法以及洛必达法则在解决这类问题中的应用.

[解]

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x\\=&\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\cot\frac{\pi}{2}x}\quad\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{” 型}\right)\\=&\lim_{x\to1}\frac{-2x}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi}{2}x}\quad(\text{洛必达法则})\\=&\lim_{x\to1}\frac{4x}{\pi}\sin^2\frac{\pi x}{2}\\=&\frac{4}{\pi}.\end{aligned}$$

[典型错误] 部分考生将极限化为"$\frac{\infty}{\infty}$"型后，再用洛必达法则. 结果是越来越复杂，导致出错. 如：

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{\tan\frac{\pi}{2}x}{\frac{1}{1-x^2}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi}{2}\sec^2\frac{\pi}{2}x}{\frac{2x}{(1-x^2)^2}}=\cdots.$$

例 1.1.36 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt$.

[提示] 本题主要考查“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限的计算方法以及将其他类型的极限化为“$\frac{\infty}{\infty}$”型极限的方法．在用洛必达法则计算此极限时，又需用到定积分的变上限表示的函数的求导方法．

[解]

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt\\
=&\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}\quad\left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}\right)\\
=&\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)\ e^{x^2}}{(1+2x^2)\ e^{x^2}}\quad(\text{洛必达法则})\\
=&\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

[典型错误] 部分考生对积分号下的 e^{-x^2} 没有提出来．直接用洛必达法则．如：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)e^{x^2-x^2}}{1}=\infty$．这当然是错误的．

例 1.1.37 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

[提示] 本题主要考查“∞^0”型极限的计算方法和用洛必达法则计算此类极限时的处理方法．

[解] 设 $y=(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$．则

$$\ln y=\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\ln y&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\quad\left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\quad(\text{洛必达法则})\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0.
\end{aligned}$$

所以 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}y=e^0=1$.

[典型错误] 部分考生对函数 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 求导出错．一些考生缺少最后一步．原因是对复合函数求导不熟练，也可能是粗心大意．

例 1.1.38 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

[提示] 本题主要考查“$\infty-\infty$”型极限的计算方法．如果用洛必达法则解决此类问题，常常是先将极限式子变形，化为“$\frac{0}{0}$”型或者“$\frac{\infty}{\infty}$”型，再用洛必达法则求解．所以，在求“$\infty-\infty$”型极限时，“变形”常常是问题的关键．有时仅仅通过通分就可“变形”成功，有时则需要通过分子有理化、变量替换等运算才行．本题的变形就不容易想到．但是、经过观察可知此极限是由于“$x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$”是“$\infty\cdot0$”型才使问题复杂的，不经过变形甚至不能确定其极限的类型．为了对此极限看得更清楚，应将其中的 x^2 分出去．由此作为突破口，就使下面的计算过程显得理所当然了．

[解法 1]

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\\
=&\lim_{x\to\infty}x^2\left[\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\quad(\text{“}0\cdot\infty\text{”型})\\
=&\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}\quad\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \quad \left(t = \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} \quad \text{（洛必达法则）}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

当 $x \to \infty$ 时，要弄清 $x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 的变化趋势，如果熟悉泰勒公式，可用 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 的泰勒展式．直接代入可得到本题的另一解法．

［解法 2］ 由于当 $t \to 0$ 时，有

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2),$$

所以当 $x \to \infty$ 时，有

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

代入原极限式中，有

$$\lim_{x \to \infty}\left[x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left\{x - x^2\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\right\}$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[\frac{1}{2} - x^2 \cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right] \quad \left(o\left(\frac{1}{x^2}\right)\text{的定义}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

［典型错误］ 一些考生因无法“通分”而对此题无法下手，还有一些考生错用极限运算法则，如：原式 $= \lim_{x \to \infty} x - \lim_{x \to \infty} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$，而导致错误．

例 1.1.39 求极限 $\lim_{x \to 0}\left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2\right)\ln(1+ax)\right]$ $(a \neq 0)$．

［提示］ 本题主要考查“$\infty - \infty$”型极限的计算方法和用洛必达法则解决此类问题时的处理方法．由观察可知，经过通分变形可将此极限化为“$\frac{0}{0}$”型极限，再用洛必达法则去求解．也可与例 1.1.38 类似．将 $\ln(1+ax)$ 用其泰勒展式来替换．于是也有如下两种解法．

［解法 1］

$$\lim_{x \to 0}\left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2\right)\ln(1+ax)\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{ax - (1 - a^2x^2)\ln(1+ax)}{x^2} \quad \left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{a + 2a^2x\ln(1+ax) - a(1-ax)}{2x} \quad \text{（洛必达法则）}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\frac{a^2}{2} + a^2\ln(1+ax)\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}.$$

［解法 2］ 由于当 $x \to 0$ 时，有

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

所以
$$\ln(1+ax)=ax-\frac{a^2}{2}x^2+o(x^2),$$
代入原极限式中，有
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]\\=&\lim_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\left(ax-\frac{a^2}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]\\=&\lim_{x\to0}\left[\frac{a^2}{2}-\frac{o(x^2)}{x^2}+a^3x-\frac{a^4}{2}x^2+a^2\cdot o(x^2)\right]\\=&\frac{a^2}{2}.\end{aligned}$$

例 1.1.40 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

[提示] 本题主要考查“$\infty-\infty$”型极限的求法．这一类型的极限往往可以变形为“$\frac{0}{0}$”型的极限．再用洛必达法则求解．在使用洛必达法则时，常需要用等价无穷小量的替换等性质来化简运算．

[解]
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\cos^2x\sin^2x}{x^2\sin^2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^22x}{x^4}\quad(\sin^2x\sim x^2)\\&=\lim_{x\to0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin4x}{4x^3}\quad(\text{洛必达法则})\\&=\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos4x}{12x^2}\quad(\text{洛必达法则})\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{3x}=\frac{4}{3}\quad(\sin4x\sim4x).\end{aligned}$$

[典型错误] 一些考生在通分后不化简直接用洛必达法则，结果因求导后形式太复杂而导致出错．原因是这些考生没有将洛必达法则与其他求极限的法则结合起来使用．本题就应在分母上用等价无穷小量替换来化简．

例 1.1.41 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.

[提示] 本题主要考查“$\infty-\infty$”型极限的计算方法．通过通分运算，容易将本题化为“$\frac{0}{0}$”型的极限，再用洛必达法则求解．

[解]
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{(1-e^{-x})x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}\quad(1-e^{-x}\sim x)\\&=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}\quad(\text{洛必达法则})\\&=\lim_{x\to0}\frac{2+e^{-x}}{2}\quad(\text{洛必达法则})\\&=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

[典型错误] 部分考生在第一步用求极限差的运算法则导致出错．原因是没有掌握极限四则运算法则的条件．

例 1.1.42 设函数
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & \text{若 } x\neq1,\\ 1, & \text{若 } x=1,\end{cases}$$

问函数 $f(x)$在 $x=1$ 处是否连续？若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义，使之连续.

［提示］ 本题主要考查函数连续性的概念以及分段函数在分界点处的极限的求法.

［解］ 由函数连续性的定义知，若

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1),$$

则 $f(x)$在 $x=1$ 处连续. 否则不连续. 由题设知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x} \quad (\text{洛必达法则})\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x} \quad (\tan(x-1)\sim(x-1))\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x} \quad (\text{洛必达法则})\\ &= -\frac{4}{\pi^2},\end{aligned}$$

显然

$$\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1),$$

所以 $f(x)$在 $x=1$ 处不连续. 修改 $f(x)$在 $x=1$ 处的定义. 令 $f(1)=-\frac{4}{\pi^2}$. 则可使$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$，即 $f(x)$在 $x=1$ 处连续.

［典型错误］ 一些考生不清楚函数在一点连续的定义而不会做此题，还有一些考生将极限求错而导致结论错误.

例 1.1.43 设

$$f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)},\quad x\in\left[\frac{1}{2},1\right).$$

试补充定义 $f(1)$，使得 $f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续.

［提示］ 本题主要考查函数 $f(x)$在区间上的连续性的概念和函数 $f(x)$在一点处连续的概念. 在求解本题的过程中，还考查“$\infty-\infty$”型极限的求法.

［解］ 由于$f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right)$上处处有定义. 又 $f(x)$是初等函数，所以 $f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right)$上处处连续.若补充定义$f(1)$,使得

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1),$$

则 $f(x)$在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续. 而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]\\ &= \frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}\\ &= \frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin(\pi-\pi x)}\\ &= \frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi(1-x)}\\ &= \frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi^2(1-x)^2} \quad (\sin\pi(1-x)\sim\pi(1-x))\\ &= \frac{1}{\pi}+\lim_{x\to 1^-}\frac{-\pi-\pi\cos\pi x}{-2\pi^2(1-x)} \quad (\text{洛必达法则})\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\pi^2\sin\pi x}{2\pi^2}\quad（洛必达法则）$$
$$=\frac{1}{\pi},$$

所以补充定义，令

$$f(1)=\frac{1}{\pi},$$

则可使 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)$，即 $f(x)$在 $x=1$ 处左连续，从而使 $f(x)$在闭区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续.

［典型错误］ 不少考生在求极限 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$时，将三项一起通分、使分子、分母的形式更为复杂，用洛必达法则后分子、分母的项数较多，最后因太复杂而导致结果出错.

例 1.1.44 在经济学中，称函数 $Q(x)=A[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}$为固定替代弹性生产函数，而称函数$\overline{Q}=AK^{\delta}L^{1-\delta}$为 Cobb－Douglas 生产函数(简称 C－D生产函数).

试证明：当 $x\to0$ 时，固定替代生产函数变为 C－D 生产函数，即有$\lim\limits_{x\to0}Q(x)=\overline{Q}$.

［提示］ 本题主要考查极限概念在实际中的应用以及“1^{∞}”型极限的求法．在求解“1^{∞}”型极限时，常可将它化为重要极限“$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$”的形式.

［证］

$$\lim_{x\to0}Q(x)$$
$$=\lim_{x\to0}A\ [\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}AL\left[1+\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)\right]^{\frac{1}{-x}}$$
$$=\lim_{x\to0}AL\left[\left(1+\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)\right)^{\frac{1}{\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)}}\right]^{\frac{\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)}{-x}}.$$

由于
$$\lim_{x\to0}\left[1+\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)}}=\mathrm{e}\quad（重要极限）,$$

且
$$\lim_{x\to0}\frac{\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)}{-x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\delta\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{-1}=\ln\left(\frac{K}{L}\right)^{\delta},$$

所以

$$\lim_{x\to0}Q(x)=AL\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{K}{L}\right)^{\delta}}$$
$$=AL\left(\frac{K}{L}\right)^{\delta}=AL^{1-\delta}K^{\delta}=\overline{Q}.$$

二、一元函数微分学

·考试内容与要求·

考试内容

导数和微分的概念 导数的几何意义和经济意义 函数的可导性与连续性之间的关系 平面曲线的切线与法线 导数和微分的四则运算 基本初等函数的导数 复合函数、反函数和隐函数的微分法 高阶导数 一阶微分形式的不变性 微分中值定理 洛必达(L'Hospital)法则 函数单调性的判别 函数的极值 函数图形的凹凸性、拐点及渐近线 函数图形的描绘 函数的最大值与最小值

考试要求