当 s 为奇数时，$D_s=2\neq 0$，方程组仅有零解，即 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，故向量组 β_1，β_2，…，β_s 线性无关；

当 s 为偶数时，$D_s=0$，方程组有非零解，即存在一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使(＊)式成立，故向量组 β_1，β_2，…，β_s 线性相关.

[典型错误]

① 本题是要求判断 s 个抽象向量的线性关系，部分考生答得不好.

② 求 D_s 时出错，所以建议考生不要忽略行列式的基本计算.

例 2.3.29 试证明：n 维列向量 α_1，α_2，…，α_n 线性无关的充分必要条件是

$$D=\begin{vmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{vmatrix}\neq 0,$$

其中 α_i^T 表示列向量 α_i 的转置，$i=1,2,\cdots,n$.

[提示] 本题主要考查向量组的秩与矩阵的秩之间的关系，矩阵的运算和行列式的性质等. 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，容易观察出 $D=|A^TA|$，将 $D\neq 0$ 转化为$|A|\neq 0$ 即可.

[证] 令矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则向量组 α_1，α_2，…，α_n 线性无关的充分必要条件是$|A|\neq 0$. 另一方面，由于

$$A^TA=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix} \alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n \\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n \end{pmatrix},$$

上式两边同时取行列式，有

$$D=|A^TA|=|A^T|\cdot|A|=|A|^2,$$

从而$|A|\neq 0$ 与 $D\neq 0$ 等价. 由此得出，$D\neq 0$ 是向量组 α_1，α_2，…，α_n 线性无关的充分必要条件.

[典型错误] 多数考生无从下手解题，其原因是不会把 $D\neq 0$ 转化为$|A^TA|\neq 0$，即$|A|\neq 0$. 所以考生不仅要有扎实的基本功，而且会观察问题，并把问题简单化.

四、线性方程组

• 考试内容与要求 •

考试内容

线性方程组的克莱姆(Cramer)法则 线性方程组有解和无解的判定 齐次线性方程组的基础解系和通解 非齐次线性方程组的解与相应的齐次线性方程组(导出组)的解之间的关系 非齐次线性方程组的通解

考试要求

1. 会用克莱姆法则解线性方程组.
2. 掌握非齐次线性方程组有解和无解的判定方法.
3. 理解齐次线性方程组的基础解系的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.
4. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.
5. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

• 考试内容解析 •

(一) 线性方程组的基本概念

1. 非齐次线性方程组

方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \quad\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

称为 m 个方程 n 个未知量的非齐次线性方程组. 如果记矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{array}\right),$$

则 A 称为非齐次线性方程组的系数矩阵，$\overline{A}$ 称为非齐次线性方程组的增广矩阵.

非齐次线性方程组的矩阵表示为

$$Ax=b.$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm T}$. 如果系数矩阵按列分块为 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 则非齐次线性方程组的向量形式为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=b.$$

如果 n 维列向量 $\xi=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm T}$ 满足非齐次线性方程组 $Ax=b$，即 $A\xi=b$，则称 ξ 是非齐次线性方程组的一个解向量.

2. 齐次线性方程组

如果非齐次线性方程组的常数项 $b_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 均为 0，即方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0,\end{cases}$$

称为齐次线性方程组. 此齐次线性方程组称为对应非齐次线性方程组的导出组.

齐次线性方程组的矩阵表示为

$$Ax=0,$$

其向量形式为

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0.$$

（二）克莱姆法则

设 n 个方程 n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \quad\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

如果系数矩阵的行列式 $D=|A|\neq0$，则方程组有唯一解

$$x_j=\frac{D_j}{D},\ j=1,2,\cdots,n,$$

其中 D_j 是常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 去替换 D 中第 j 列得到的行列式.

注　当系数行列式 $D=0$ 时，方程组可能有无穷多解，也可能无解.

（三）线性方程组有解和无解的判定方法

1. 非齐次线性方程组有解的判定定理

非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是 $r(A)=r(\bar{A})=r$．并且，当 $r=n$ 时，方程组有唯一解；当 $r<n$ 时，方程组有无穷多解．

2．齐次线性方程组有非零解的判定定理

齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是 $r(A)=r<n$．

推论 1 当 $m<n$（m 为方程个数，n 为未知量个数)时，齐次线性方程组必有非零解．

推论 2 当 $m=n$ 时，齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式 $|A|=0$．

3．用消元法解线性方程组

用消元法解非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的步骤是：

(1) 对方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 施行初等行变换，化为阶梯形矩阵．这个过程称为消元过程．

(2) 如果 $r(A)\neq r(\bar{A})$，则方程组无解；如果 $r(A)=r(\bar{A})$，则求出方程组的解，这个过程称为回代过程．

（四）齐次线性方程组解的结构和通解的求法

1．齐次线性方程组解的性质

(1) 如果 η_1,η_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则 $\eta_1+\eta_2$ 也是它的解．

(2) 如果 η 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，则对任意常数 c，$c\eta$ 也是它的解．

2．齐次线性方程组的基础解系

如果 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量组的一个极大无关组，则称 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是方程组的一个基础解系．

注 基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 必定线性无关，并且齐次线性方程组的任意一个解都可以由它线性表示．

3．齐次线性方程组解的结构

如果齐次线性方程组 $Ax=0$ 的系数矩阵的秩 $r(A)=r<n$，则方程组有基础解系，并且它含有 $n-r$ 个解向量 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$，方程组的通解(或全部解)为

$$\eta=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r},$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意常数．

4．齐次线性方程组 $Ax=0$ 通解的求法

(1) 对系数矩阵 A 作初等行变换化为阶梯形矩阵．

(2) 确定系数矩阵的秩 $r(A)=r$，确定基本未知量和自由未知量．

(3) 求出一个基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$．

(4) 求出方程组的通解 $\eta=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$（$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意常数)．

（五）非齐次线性方程组解的结构和通解的求法

1．非齐次线性方程组解的性质

(1) 如果 γ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解，η 是它的导出组的一个解，则 $\gamma+\eta$ 是非齐次线性方程组的解．

(2) 如果 γ_1、γ_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解，则 $\gamma_1-\gamma_2$ 是其导出组的解．

2．非齐次线性方程组解的结构

对非齐次线性方程组 $Ax=b$，如果 $r(A)=r(\bar{A})=r<n$，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是导出组 $Ax=0$ 的基础解系，ξ_0 是 $Ax=b$ 的一个特解，则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解(或全部解)是

$$\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r},$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意常数．

3．非齐次线性方程组 $Ax=b$ 通解的求法

(1) 对增广矩阵 $\bar{A}$ 作初等行变换化为阶梯形矩阵．

(2) 求出导出组 $Ax=0$ 的一个基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$．

(3) 求出 $Ax=b$ 的一个特解 ξ_0．

(4) 求出非齐次线性方程组的通解 $\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$（$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 为任意常数)．

·例 题 详 解·

例 2.4.1 设方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多个解，则 $a=$________.

［答案］ -2.

［提示］ 本题主要考查非齐次线性方程组有无穷多个解的判定方法．可利用非齐次线性方程组有解的判定定理求解．

［解］ 因方程组有无穷多个解，故该方程组系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩．且均小于 3，即

$$r\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = r\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right) < 3,$$

于是有

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0,$$

即
$$a^3-3a+2=0,$$
解得 $a=1$ 或 -2.

当 $a=1$ 时，

$$r\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = 1 \neq 2 = r\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right).$$

这与条件矛盾，舍去．

当 $a=-2$ 时，

$$r\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = r\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right) = 2,$$

故 $a=-2$.

［典型错误］ 填 1 或 -2．原因是没有验证当 $a=1$ 时，系数矩阵的秩与增广矩阵的秩是否相等．

例 2.4.2 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 无解，则 $a=$________.

［答案］ -1.

［提示］ 本题主要考查非齐次线性方程组无解的判定方法及克莱姆法则的运用．由克莱姆法则，知该方程组系数矩阵的行列式为零，求出 a 的值，再验证方程组是否无解．

［解］ 由此方程组无解，故系数矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $a^2-2a-3=0$．解得 $a=3$ 或 -1.

当 $a=3$ 时，

$$r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix} = r\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array}\right).$$

即该方程组有解，不合题意.

当 $a=-1$ 时，

$$r\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\neq r\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right),$$

故 $a=-1$.

［典型错误］ 填 -1 或 3．原因是没有验证 $a=3$ 是否符合题意.

例 2.4.3 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=O$．则 $t=$__________.

［答案］ -3.

［提示］ 本题主要考查齐次线性方程组存在非零解的充要条件和行列式的计算．由 $AB=O$ 及 $B\neq O$，知齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在非零解，故 $|A|=0$．可求出 t 的值.

［解］ 由于 B 为非零矩阵，且 $AB=O$．故齐次线性方程组 $Ax=0$ 存在非零解，则

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=7(t+3)=0,$$

解得 $t=-3$.

例 2.4.4 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$，$b=(1,0,0)^{\mathrm T}$，则线性方程组 $Ax=b$ 的解是__________.

［答案］ $(1,0,0)^{\mathrm T}$.

［提示］ 本题主要考查克莱姆法则及正交矩阵的性质．利用克莱姆法则，有 $x=A^{-1}b=A^{\mathrm T}b$，故只需求 A 的第一行元素即可.

［解］ 矩阵 A 是正交矩阵，于是 A 可逆且 $A^{\mathrm T}=A^{-1}$．由克莱姆法则．线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解 $x=A^{-1}b=A^{\mathrm T}b=(a_{11},a_{12},a_{13})^{\mathrm T}$．由 $AA^{\mathrm T}=E$，可知 $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1$．又 A 是实矩阵及 $a_{11}=1$，得 $x=(a_{11},a_{12},a_{13})^{\mathrm T}=(1,0,0)^{\mathrm T}$.

［典型错误］

① 许多考生无法求出该方程组的解．主要原因是 A 不是一个具体的矩阵，而利用条件也求不出矩阵 A．又忽略了向量 b 的特殊性.

② 还有的考生填 $(1,0,0)$，这是属于粗心，很可惜.

例 2.4.5 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解向量，且 $r(A)=3$，$\alpha_1=(1,2,3,4)^{\mathrm T}$，$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^{\mathrm T}$，$C$ 表示任意常数，则线性方程组 $Ax=b$ 的通解 $x=$（　　）.

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

［答案］ (C).

［提示］ 本题主要考查非齐次线性方程组通解的求法．由题设，只需求出导出组的基础解系即可.

［解］ 由于 $r(A)=3$，故线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系含有解向量的个数为 $4-r(A)=1$.

又 $A\alpha_1=b$，$A\alpha_2=b$，$A\alpha_3=b$，有

$$A\left(\alpha_1-\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right)=0,$$

即 $2\left(\alpha_1-\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{2}\right)=(2,3,4,5)^{\mathrm T}$ 是 $Ax=0$ 的解．根据 $Ax=b$ 的解的结构理论．知(C)为 $Ax=b$ 的通解.

［典型错误］ 选(A)．其原因是认为 $\alpha_2+\alpha_3$ 为 $Ax=b$ 的解，从而误认为 $\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)$ 是 $Ax=0$ 的基础解系.

例 2.4.6 设 A 为 n 阶实矩阵，A^{T} 为 A 的转置矩阵，则对于线性方程组(Ⅰ)$Ax=0$ 和(Ⅱ)$A^{\mathrm{T}}Ax=0$，必有(　　).

(A) (Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解

(B) (Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解

(C) (Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解

(D) (Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查齐次线性方程组解的相关知识. 利用解的定义即可求解此题.

[解] 若 x_i 是 $Ax=0$ 的解，则显然 $A^{\mathrm{T}}Ax_i=0$，即 x_i 也是 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 的解，故(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解.

若 x_i 是 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 的解，则 $x_i^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax_i=0$，即$(Ax_i)^{\mathrm{T}}(Ax_i)=0$．若 $Ax_i\neq 0$，不妨设 $Ax_i=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，$b_1\neq 0$，那么$(Ax_i)^{\mathrm{T}}(Ax_i)=b_1^2+\sum\limits_{i=2}^{n}b_i^2>0$ 与$(Ax_i)^{\mathrm{T}}(Ax_i)=0$ 矛盾. 故 $Ax_i=0$．即(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解.

[典型错误] 选(D)的考生不少，其原因是不能验证(Ⅱ)的解也是(Ⅰ)的解.

例 2.4.7 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组$(AB)x=0$(　　).

(A) 当 $n>m$ 时仅有零解　　(B) 当 $n>m$ 时必有非零解

(C) 当 $m>n$ 时仅有零解　　(D) 当 $m>n$ 时必有非零解

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查齐次线性方程组是否有非零解的判定方法. AB 为 m 阶方阵. 如能判定 AB 的秩 $r(AB)=m$，则$(AB)x=0$ 仅有零解；若 $r(AB)<m$，则$(AB)x=0$ 必有非零解.

[解] 当 $n>m$ 时，令

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix},$$

易知 $r(AB)=1$，故$(AB)x=0$ 有非零解，即选项(A)错；若令

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

易知 $r(AB)=2$，故$(AB)x=0$ 只有零解，否定了选项(B).

当 $m>n$ 时，若 $r(AB)=m$，则

$$n<m=r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}\leqslant n,$$

矛盾. 故 $r(AB)<m$，否定选项(C)，而选项(D)正确.

事实上，当 $m>n$ 时，$r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}=n<m$，故$(AB)x=0$ 有非零解.

例 2.4.8 设 A 是 n 阶矩阵，α 是 n 维列向量. 若 $r\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}=r(A)$，则线性方程组(　　).

(A) $Ax=\alpha$ 必有无穷多解　　(B) $Ax=\alpha$ 必有唯一解

(C) $\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 仅有零解　　(D) $\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^{\mathrm{T}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$ 必有非零解

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查齐次(或非齐次)线性方程组有解的判定方法. 用排除法选出正确的选项.

[解] 若矩阵 A 可逆，$Ax=\alpha$ 有唯一解，故排除选项(A)；若矩阵 A 不可逆，$Ax=\alpha$ 可能无解或有无穷多个解，便否定选项(B). 例如，令

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

易知

$$r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = r(A) = 2,$$

但 $Ax=\alpha$ 有无穷多个解.

因 $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = r(A) < n+1$，故 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解，故排除选项(C)，而选项(D)正确.

例 2.4.9 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq O$，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的互不相等的解．则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系(　　).

(A) 不存在　　　　(B) 仅含一个非零解向量

(C) 含有两个线性无关的解向量　　　　(D) 含有三个线性无关的解向量

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查齐次线性方程组解的结构理论，矩阵与其伴随矩阵之间的关系．只需求出矩阵 A 的秩即可.

[解] 由 $A^*\neq O$ 以及

$$r(A^*)=\begin{cases} 0, & r(A)<n-1, \\ 1, & r(A)=n-1, \\ n, & r(A)=n, \end{cases}$$

知 $r(A)=n$ 或 $n-1$．又 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是 $Ax=b$ 的互不相等的解．即解不唯一，从而 $r(A)=n-1$．故 $Ax=0$ 的基础解系仅含一个解向量．选(B).

[典型错误] 不少考生由于没有正确理解向量组的线性无关性，选(D)，理由如下：因为 $\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_1,\xi_4-\xi_1$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的互不相等的解，从而 $\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_1,\xi_4-\xi_1$ 线性无关，即 $Ax=0$ 有三个线性无关的解向量.

例 2.4.10 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$$

的系数矩阵记为 A．若存在 3 阶矩阵 $B\neq O$，使得 $AB=O$，则(　　).

(A) $\lambda=-2$ 且 $|B|=0$　　(B) $\lambda=-2$ 且 $|B|\neq0$　　(C) $\lambda=1$ 且 $|B|=0$　　(D) $\lambda=1$ 且 $|B|\neq0$

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查考生是否掌握齐次线性方程组有非零解的判定方法．由 $AB=O$ 且 $B\neq O$，知方程组 $Ax=0$ 有非零解，利用齐次线性方程组存在非零解的充要条件即可求解此题.

[解] 由 $AB=O$ 且 $B\neq O$，知方程组 $Ax=0$ 存在非零解，于是 $|A|=0$，即 $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=0$．解得 $\lambda=1$.

将 $\lambda=1$ 代入，得 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，由 $AB=O$ 知 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=O$，故方程组 $B^{\mathrm{T}}x=0$ 存在非零解．于是 $|B|=|B^{\mathrm{T}}|=0$．故应选(C).

例 2.4.11 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 中未知量个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 A 的秩为 r，则(　　).

(A) $r=m$ 时，方程组 $Ax=b$ 有解　　　　(B) $r=n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有唯一解

(C) $m=n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有唯一解　　　　(D) $r<n$ 时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多个解

［答案］ (A).

［提示］ 本题主要考查非齐次线性方程组解的结构理论，主要考虑矩阵 A 的秩与增广矩阵 (A,b) 的秩之间的关系.

［解］ 对于选项(A)，由于 $r(A)=r=m$，故在系数矩阵 A 中，存在不为零的 m 阶子式. 因增广矩阵 $\bar{A}$ 是 $m\times(n+1)$ 矩阵，不存在 $m+1$ 阶子式，故有 $r(\bar{A})=m$，即 $r(A)=r(\bar{A})$. 故方程组 $Ax=b$ 有解，选项(A)正确.

对于选项(B)，$r(A)=r=n$，不能判定 $r(\bar{A})=n$，即条件 $r(A)=r(\bar{A})$ 不一定成立，(B)应该排除. 同样，对于选项(C)，$m=n$ 也不能判定 $r(\bar{A})=r$，即条件 $r(A)=r(\bar{A})$ 也不一定成立. 对于选项(D)，由 $r<n$ 同样不能判定 $r(\bar{A})$ 是否与 $r(A)$ 相等. 因此，(C)、(D)均应排除.

［典型错误］ 选(D)的考生不少，其原因是把非齐次线性方程组解的存在定理与齐次线性方程组非零解的存在定理混淆.

例 2.4.12　设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 A、B 均为 $m\times n$ 矩阵. 现有 4 个命题：

① 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $r(A)\geqslant r(B)$；

② 若 $r(A)\geqslant r(B)$，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解；

③ 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $r(A)=r(B)$；

④ 若 $r(A)=r(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

以上命题中正确的是(　　).

(A) ①②　　(B) ①③　　(C) ②④　　(D) ③④

［答案］ (B).

［提示］ 本题主要考查齐次线性方程组系数矩阵的秩与基础解系所含解向量的个数之间的关系. 齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含解向量的个数为 $n-r(A)$，其中 n 为未知数的个数. 利用上述关系来解此题.

［解］ 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $Ax=0$ 的基础解系的解向量个数不超过 $Bx=0$ 的基础解系的解向量个数，即 $n-r(A)\leqslant n-r(B)$，所以 $r(A)\geqslant r(B)$. ①正确. 同理可得，若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $r(A)=r(B)$. 由基础解系的解向量个数的大小关系，推不出两个齐次线性方程组的解集是否有包含关系，所以②，④均不成立. 综上所述，应选(B).

例 2.4.13　设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$，$A=\alpha\beta^{T}$，$B=\beta^{T}\alpha$，其中 β^{T} 是 β 的转置，求解方程

$$2B^2A^2x=A^4x+B^4x+\gamma.$$

［提示］ 本题主要考查矩阵运算及线性方程组的求解问题. 先计算矩阵 A、B，再计算 A^2、B^2，B^4、然后把所给的方程组化简，最后代入数字求解.

［解］ 由题设得

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},0\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},B=\left(1,\frac{1}{2},0\right)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2.$$

又
$$A^2=\alpha\beta^{T}\alpha\beta^{T}=\alpha(\beta^{T}\alpha)\beta^{T}=2A,$$
$$A^4=8A,$$

代入原方程，得
$$16Ax=8Ax+16x+\gamma,$$

即
$$8(A-2E)x=\gamma.$$

令 $x=(x_1,x_2,x_3)^{T}$，代入上式，得到非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x_1+\dfrac{1}{2}x_2=0, \\ 2x_1-x_2=0, \\ x_1+\dfrac{1}{2}x_2-2x_3=1, \end{cases}$$

解其对应的齐次方程组．得通解

$$\xi=k\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

显然，非齐次线性方程组的一个特解为

$$\eta^*=\begin{pmatrix}0\\0\\-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

于是所求方程的解为 $x=\xi+\eta^*$，即

$$x=k\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

［典型错误］ 计算A,B,A^2或A^4出错，这说明这部分考生的矩阵运算的基本功不扎实.

例 2.4.14 已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量．其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关．$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$．如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$．求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

［提示］ 本题主要考查线性方程组的求解问题．A 是一个抽象的矩阵，由已知条件把方程组 $Ax=\beta$ 的具体形式找出来是问题的关键；另一方面，若把线性方程组看作是向量的线性表示．便可直接找到 $Ax=0$ 的基础解系与 $Ax=\beta$ 的一个特解．因此本题有如下两种解法.

［解法 1］ 设 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，则由

$$Ax=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\beta,$$

得
$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4.$$

将 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 代入上式，整理后得

$$(2x_1+x_2-3)\alpha_2+(-x_1+x_3)\alpha_3+(x_4-1)\alpha_4=0\ .$$

由于$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，故有

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-3=0. \\ -x_1+x_3=0. \\ x_4-1=0. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} 2x_1+x_2=3, \\ -x_1+x_3=0, \\ x_4=1, \end{cases}$$

解之得通解为

$$x=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

[解法 2]　由题设 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，知矩阵 A 的秩为 3，因此齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系只包含一个解向量. 而 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$ 可化为

$$0=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+0\cdot\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

即 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$ 就是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

由

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

知 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的一个特解，于是 $Ax=\beta$ 的通解为

$$x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

[典型错误]　44% 以上的考生得零分，主要原因是对题目不理解、无从下手. 所以考生应深入理解线性方程组的理论，会用线性方程组的向量形式求解方程组.

例 2.4.15　设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0,\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=0,\\3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1.\end{cases}$$

已知 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm T}$ 是该方程组的一个解. 试求：

(Ⅰ) 方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解；

(Ⅱ) 该方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

[提示]　本题主要考查齐次、非齐次线性方程组的求解问题. 将 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm T}$ 代入方程组，求出参数 λ 与 μ 的关系，于是简化为只具有一个参数的线性方程组的求解问题. 用初等行变换把增广矩阵化为阶梯形，然后对参数进行讨论，求出全部解.

[解]　将 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm T}$ 代入方程组，得 $\lambda=\mu$. 对方程组的增广矩阵 $\bar{A}$ 施以初等行变换，得

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1 & \lambda & \lambda & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1\end{array}\right).$$

（Ⅰ）当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$时，有

$$\bar{A}\to\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right).$$

于是 $r(A)=r(\bar{A})=3<4$，故方程组有无穷多解，全部解为

$$\xi=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}+k(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数.

当 $\lambda=\frac{1}{2}$时，有

$$\bar{A}\to\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

于是$r(A)=r(\bar{A})=2<4$，故方程组有无穷多解，全部解为

$$\xi=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,-2,0,2)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1，k_2 为任意常数.

（Ⅱ）当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$时，由于 $x_2=x_3$，即 $-1+k=1-k$，解得 $k=1$，故方程组的解为

$$\xi=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}+(-2,1,-1,2)^{\mathrm{T}}=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda=\frac{1}{2}$时，由于 $x_2=x_3$，即 $-1-3k_1-2k_2=1+k_1$，解得 $k_2=-2k_1-1$，故方程组的全部解为

$$\xi=(2,1,1,-3)^{\mathrm{T}}+k_1(3,1,1,-4)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1 为任意常数.

[典型错误]

① 很多考生仅讨论 $\lambda\neq\frac{1}{2}$这一种情况.

② 相当一部分考生在解(Ⅱ)时，没有用(Ⅰ)的结果，而是在方程中令 $x_2=x_3$，然后求解，但是此时的解是3维列向量，而没能把它转换为4维列向量的形式，导致丢分.

例 2.4.16　已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，若 $\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+t\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+t\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+t\alpha_1$，讨论实数 t 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 也是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

[提示]　本题主要考查齐次线性方程组基础解系的概念及向量组线性无关的判定. 由题设知 $Ax=0$ 的基础解系含有4个解向量. 而$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 是 $Ax=0$ 的解，故$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系当且仅当$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关，于是求得 t.

[解]　由题设，知

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & t\\ t & 1 & 0 & 0\\ 0 & t & 1 & 0\\ 0 & 0 & t & 1\end{pmatrix},$$

故$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关当且仅当矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & t\\ t & 1 & 0 & 0\\ 0 & t & 1 & 0\\ 0 & 0 & t & 1\end{pmatrix}$ 是可逆的，即 $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & t\\ t & 1 & 0 & 0\\ 0 & t & 1 & 0\\ 0 & 0 & t & 1\end{vmatrix}=1-t^4\neq0$. 所以，当 $t\neq$

± 1 时，$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关.

易知$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 都是 $Ax=0$ 的解，而 $Ax=0$ 的基础解系有 4 个解向量，故当 $t\neq\pm 1$ 时，$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系.

[典型错误] 考生主要问题出在对线性齐次方程组基础解系的概念理解不深入. 一个向量组要能构成 $Ax=0$ 的基础解系，必须满足：①其每一个向量都是方程组的解；②向量组是线性无关的；③ $Ax=0$ 的每一个解都能由该向量组线性表示(③可以有其他等价的说法，比如本题，只需提到 $Ax=0$ 的基础解系 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 都正好包含 4 个向量即可). 在解题过程中，对每一点都应该有明确的结论. 不少人正是缺少某几点的叙述而扣分的.

例 2.4.17 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2$，$\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3$，…，$\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1$，其中 t_1，t_2 为实常数. 试问 t_1、t_2 满足什么关系时，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

[提示] 本题主要考查齐次线性方程组基础解系的概念，向量组线性无关性的判定及行列式的计算. 由题设知 $Ax=0$ 的基础解系有 s 个解向量，又 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 为 $Ax=0$ 的解，故 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 为 $Ax=0$ 的基础解系当且仅当 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关，于是可以求出 t_1、t_2 所满足的关系.

[解] 由于 β_i $(i=1,2,\cdots,s)$为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的线性组合，所以 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 均为 $Ax=0$ 的解.

设
$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0, \qquad (*)$$
即
$$(t_1k_1+t_2k_s)\alpha_1+(t_2k_1+t_1k_2)\alpha_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\alpha_s=0.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，故
$$\begin{cases} t_1k_1+t_2k_s=0, \\ t_2k_1+t_1k_2=0, \\ \cdots\cdots \\ t_2k_{s-1}+t_1k_s=0. \end{cases} \qquad (**)$$

又
$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s,$$

所以当 $t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s\neq 0$，即当 s 为偶数，$t_1\neq\pm t_2$；s 为奇数，$t_1\neq -t_2$ 时，方程组$(**)$只有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，从而 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关. 此时 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

[典型错误]

① 含有 n 个未知量，n 个方程的齐次线性方程组只有零解的充要条件说成系数行列式为零.

② 说不清楚一个向量组怎样才是线性无关.

例 2.4.18 已知齐次线性方程组
$$① \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases}$$
和
$$② \begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$$
同解，求 a，b，c 的值.

[提示] 本题主要考查两个线性方程组同解这一概念，齐次线性方程组有非零解的条件及齐次线性方程

组基础解系的求法．齐次线性方程组②的未知量个数大于方程的个数，从而有非零解．由①与②同解．知①有非零解，故①的系数矩阵的秩小于3，进一步可求得 $a=2$．把①的一个特解代入②，求出 b 与 c 的值．最后验证①与②的解完全相同．

［解］ 方程组②的未知量个数大于方程的个数，故方程组②有无穷多个解．因为方程组①与②同解．所以方程组①的系数矩阵的秩小于3．

对方程组①的系数矩阵施以初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix},$$

从而 $a=2$．

此时，方程组①的系数矩阵可化为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组①的一个基础解系．

将 $x_1=-1$，$x_2=-1$，$x_3=1$ 代入方程组②可得

$$b=1,\ c=2 \text{ 或 } b=0,\ c=1.$$

当 $b=1$，$c=2$ 时，对方程组②的系数矩阵施以初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

故方程组①与②同解．

当 $b=0$，$c=1$ 时，方程组②的系数矩阵可化为

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

故方程组①与②的解不相同．

综上所述，当 $a=2$，$b=1$，$c=2$ 时，方程组①与②同解．

［典型错误］

① 没有正确理解两个线性方程组同解这一概念．把同解误认为有公共解，从而导致无法求出 a，b，c 的值．

② 有的考生没有排除 $a=2$，$b=0$，$c=1$ 这一情况．

③ 还有的考生没有掌握好利用初等行变换求齐次线性方程组的解而导致失分．

例 2.4.19 设4元齐次方程组①为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$$

且已知另一4元齐次线性方程组②的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅰ）求方程组①的一个基础解系；

（Ⅱ）当 a 为何值时，方程组①与②有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解．

［提示］ 本题主要考查齐次线性方程组基础解系的求法及求两个线性方程组公共解的方法．利用初等行变换求出①的基础解系，再把②的一个非零解代入①，即可求得 a 的值．

［解］（Ⅰ）对方程组①的系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-5&3\\0&1&3&-2\end{pmatrix}.$$

得方程组①的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 - 3x_4, \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

由此可得方程组①的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (5, -3, 1, 0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\beta}_2 = (-3, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}.$$

（Ⅱ）由题设条件，方程组②的全部解为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2k_1 - k_2 \\ -k_1 + 2k_2 \\ (a+2)k_1 + 4k_2 \\ k_1 + (a+8)k_2 \end{pmatrix}, \qquad (*)_1$$

其中 k_1，k_2 为任意常数.

将上式代入方程组①，得

$$\begin{cases} (a+1)k_1 = 0, \\ (a+1)k_1 - (a+1)k_2 = 0. \end{cases} \qquad (*)_2$$

要使方程组①与②有非零公共解，只需关于 k_1，k_2 的方程组$(*)_2$有非零解. 因为

$$\begin{vmatrix} a+1 & 0 \\ a+1 & -(a+1) \end{vmatrix} = -(a+1)^2,$$

所以当 $a=-1$ 时，方程组$(*)_2$有非零解，由$(*)_1$可得方程组①与②的全部非零公共解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

其中 k_1，k_2 为不全为零的任意常数.

［典型错误］ 求不出 a 的值，其原因是没有理解两个齐次方程组有非零公共解的含义.

例 2.4.20　已知下列非齐次线性方程组①，②：

$$①\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3; \end{cases} \quad ②\begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1. \end{cases}$$

（Ⅰ）求解线性方程组①，用其导出组的基础解系表示通解；

（Ⅱ）当方程组②中的参数 m，n，t 为何值时，方程组①与②同解.

［提示］ 本题主要考查非齐次线性方程组通解的求法及方程组同解的概念. 利用初等行变换判定线性方程组①的解的情况，并写出其通解. 将①的通解代入②，分别求出 m，n，t 的值，最后需验证①与②的解完全相同.

［解］（Ⅰ）设方程组①的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}_1$，增广矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$. 对 $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ 作初等行变换，得

$$\overline{\boldsymbol{A}}_1 = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right).$$

由于 $r(\boldsymbol{A}_1) = r(\overline{\boldsymbol{A}}_1) = 3 < 4$，所以方程组有无穷多解，且通解为

$$\boldsymbol{x} = (-2, -4, -5, 0)^{\mathrm{T}} + k(1, 1, 2, 1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数.

（Ⅱ）将①的通解 $\boldsymbol{x}$ 代入②的第一个方程，得

$$(-2+k) + m(-4+k) - (-5+2k) - k = -5,$$

解得 $m=2$.

将通解 x 代入②的第二个方程，得

$$n(-4+k)-(-5+2k)-2k=-11,$$

从而 $n=4$.

将通解 x 代入②的第三个方程，得

$$(-5+2k)-2k=-t+1,$$

解得 $t=6$. 因此方程组②的参数

$$m=2,\ n=4,\ t=6,$$

即当 $m=2$，$n=4$，$t=6$ 时，方程组①的解都是②的解. 这时，方程组②化为

$$②\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-x_4=-5,\\4x_2-x_3-2x_4=-11,\\x_3-2x_4=-5.\end{cases}$$

设方程组②的系数矩阵为 A_2，增广矩阵为 $\bar{A}_2$. 对 $\bar{A}_2$ 作初等行变换，得

$$\bar{A}_1=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&-2&-6\\4&-1&-1&-1&1\\3&-1&-1&0&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&-1&-2\\0&1&0&-1&-4\\0&0&1&-2&-5\end{array}\right),$$

于是方程组②的通解为

$$x=(-2,-4,-5,0)^T+k(1,1,2,1)^T,$$

其中 k 为任意常数. 所以，方程组①, ②的解完全相同，即方程组①, ②同解.

[典型错误] 很多考生对线性方程组同解的概念不太清楚，误认为有公共解即为同解. 故没有验证当 $m=2$，$n=4$，$t=6$ 时，方程组②的解都是①的解.

例 2.4.21 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0.\end{cases}$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求其通解.

[提示] 本题主要考查齐次线性方程组有非零解的判定方法及其通解的求法，矩阵的初等变换和矩阵的秩等知识点. 本题是一道带参数的齐次线性方程组求非零解的计算题. 对方程组的系数矩阵作初等行变换，得到 $a=0$ 和 $a=-10$ 时有非零解，写出同解方程组，求得方程组的通解.

[解] 对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\-2a&a&0&0\\-3a&0&a&0\\-4a&0&0&a\end{pmatrix}=B.$$

当 $a=0$ 时，$r(A)=1<4$，故方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

由此得基础解系为

$$\eta_1=(-1,1,0,0)^T,\ \eta_2=(-1,0,1,0)^T,\ \eta_3=(-1,0,0,1)^T,$$

于是所求方程组的通解为

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3,$$

其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数.

当 $a\neq0$ 时，

$$B \to \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+10 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可知 $a=-10$ 时，$r(A)=3<4$，故方程组也有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ -4x_1+x_4=0, \end{cases}$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_2=2x_1, \\ x_3=3x_1, \\ x_4=4x_1, \end{cases}$$

其基础解系为 $\eta=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$. 于是所求方程组的通解为 $x=k\eta$，其中 k 为任意常数.

[典型错误]

① 不会求 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ 的基础解系.

② 当 $a=-10$ 时，求方程组的通解过程中出现了简单的计算错误. 所以不能忽视计算能力的培养.

例 2.4.22　设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0, \quad (n\geqslant 2) \\ \quad\cdots\cdots \\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0, \end{cases}$$

试问 a 为何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

[提示] 本题主要考查齐次线性方程组有非零解的判定方法、矩阵的初等行变换和行列式的求法等知识点. 确定参数，使包含 n 个未知量和 n 个方程的齐次线性方程组有非零解，通常用两种方法：一是对其系数矩阵作初等行变换化成阶梯形；再就是由其系数行列式为零解出参数值. 本题的关键是参数 a 有两个值，对每个值都要讨论. 我们采用第二种方法解此题.

[解] 设 A 为该线性方程组的系数矩阵，则

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}+a\right]a^{n-1}.$$

当 $|A|=0$，即 $a=0$ 或 $-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，方程组有非零解.

当 $a=0$ 时，方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

故基础解系为

$$\xi_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\ \xi_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \xi_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

于是方程组的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-1}\xi_{n-1},$$

其中 k_1，k_2，$\cdots$，k_{n-1} 为任意常数.

当 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix} 1-\frac{n(n+1)}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2-\frac{n(n+1)}{2} & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3-\frac{n(n+1)}{2} & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-\frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ -4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

于是该方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ \quad\cdots\cdots \\ -nx_1+x_n=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_2=2x_1, \\ x_3=3x_1, \\ \quad\cdots\cdots \\ x_n=nx_1, \end{cases}$$

解得基础解系为 $\xi=(1,2,\cdots,n)^{\mathrm{T}}$，故方程组的通解为

$$x=k\xi.$$

其中 k 为任意常数.

[典型错误]

① 只求出 $a=0$ 时，方程组有非零解，其原因是 $a=0$ 由观察系数得到，没有正规的求解过程. 所以在解题时，应该有正规的求解过程，不要靠直观感觉.

② 不会求 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的基础解系.

例 2.4.23 λ 取何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1, \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$ 无解，有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组的通解.

[提示] 本题主要考查非齐次线性方程组有解的判定及解的求法. 将方程组写成矩阵的形式 $Ax=b$. 当 $|A|\neq 0$ 时，$Ax=b$ 有唯一解；当 $|A|=0$ 时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解还是无解要看增广矩阵的秩是否等于系数矩阵的秩.

[解] 原方程组系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(5\lambda+4),$$

故当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -\dfrac{4}{5}$ 时，方程组有唯一解.

当 $\lambda = 1$ 时，原方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1, \end{cases}$$

对其增广矩阵施以初等行变换，有

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

因此，当 $\lambda = 1$ 时，原方程组有无穷多解，其通解为

$$x = (1, -1, 0)^{\mathrm{T}} + k\,(0, 1, 1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数.

当 $\lambda = -\dfrac{4}{5}$ 时，原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -10, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1, \end{cases}$$

对其增广矩阵施以初等行变换，有

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 10 & -4 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & -5 & -10 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 10 & -4 & -5 & 5 \\ 4 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right).$$

由此可知当 $\lambda = -\dfrac{4}{5}$ 时，原方程组无解.

例 2.4.24 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ \qquad\cdots\cdots \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + ax_n = 0, \end{cases}$$

其中 $a \neq 0$，$b \neq 0$，$n \geqslant 2$. 试讨论 a，b 为何值时，方程组仅有零解、有无穷多组解？在有无穷多组解时，求出全部解，并用基础解系表示全部解.

[提示] 本题主要考查齐次线性方程组是否有非零解的判定方法及用矩阵的初等行变换求解方程组的方法. 设该方程组的系数矩阵为 A，当 $r(A) = n$ 时，$Ax = 0$ 仅有零解；当 $r(A) < n$ 时，$Ax = 0$ 有无穷多解. 本题讨论 a，b 为何值时，$r(A) = n$ 或 $r(A) < n$. 当 $r(A) < n$ 时，通常用初等行变换求解.

[解] 方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(1) 当 $a \neq b$ 且 $a \neq (1-n)b$ 时，方程组仅有零解.

(2) 当 $a=b$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

原方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

故方程组的全部解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1},$$

其中 k_1、k_2、$\cdots$，k_{n-1} 为任意常数.

(3) 当 $a=(1-n)b$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix} (1-n)b & b & b & \cdots & b & b \\ b & (1-n)b & b & \cdots & b & b \\ b & b & (1-n)b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b & (1-n)b \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1=x_n, \\ x_2=x_n, \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1}=x_n, \end{cases}$$

故方程组的全部解为

$$\boldsymbol{x}=k\ (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数.

[典型错误]

① 计算 $|A|$ 出错.

② 不会求 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的基础解系.

③ 当 $a=(1-n)b$ 时，求通解出现计算错误.

只要平时注重基本功的训练，就不会出现上述错误.

例 2.4.25　已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\neq0$. 试讨论 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 和 b 满足何种关系时,

(Ⅰ) 方程组仅有零解;

(Ⅱ) 方程组有非零解. 在有非零解时,求此方程组的一个基础解系.

[提示] 本题主要考查齐次线性方程组是否有非零解的判定方法,行列式的计算及基础解系的概念与求法. 讨论齐次方程组解的各种情况、首先计算方程组的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|$. 当 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 时,方程组有唯一零解;当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时,方程组有非零解,在 $|\boldsymbol{A}|=0$ 的条件下再求出方程组的一个基础解系.

[解] 该方程组的系数行列式为

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n\\ b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b\end{vmatrix}$$

$$=b^{n-1}\left(b+\sum_{i=1}^{n}a_i\right).$$

(Ⅰ) 当 $b\neq0$ 且 $b+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq0$ 时, $r(\boldsymbol{A})=n$, 方程组仅有零解.

(Ⅱ) 当 $b=0$ 时,原方程组的同解方程组为

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0.$$

由 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq0$ 可知, a_1, a_2, $\cdots$, a_n 不全为零. 不妨设 $a_1\neq0$, 得原方程组的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm T},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0\right)^{\mathrm T},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\left(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm T},$$

当 $b=-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 时,有 $b\neq0$, 原方程组的系数矩阵可化为

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}a_1-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

由此得原方程组的同解方程组为

$$x_2=x_1,\ x_3=x_1,\ \cdots,\ x_n=x_1,$$

故原方程组的一个基础解系为

$$\alpha=(1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}.$$

[典型错误]

① 计算$|A|$出错.

② 不会求 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$ 的基础解系.

③ 没有讨论 $b=-\sum_{i=1}^{n}a_i$ 的情况.

例 2.4.26 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ ax_1+bx_2+cx_3=0,\\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0.\end{cases}$$

（Ⅰ）a、b、c 满足何种关系时，方程组仅有零解？

（Ⅱ）a、b，c 满足何种关系时，方程组有无穷多组解？并用基础解系表示全部解.

[提示] 本题主要考查齐次线性方程组是否有非零解的判定方法，行列式的计算，基础解系的求法及分情况讨论的能力．当方程组的系数行列式$|A|\neq0$时，方程组仅有零解．方程组有无穷多解的情况比较复杂，需讨论使得$|A|=0$的 a、b，c 所有可能的情况.

[解] 方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a).$$

（Ⅰ）当 $a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$ 时，$|A|\neq0$，方程组仅有零解.

（Ⅱ）下面分四种情况：

(i) 当 $a=b\neq c$ 时，同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ \qquad\qquad x_3=0,\end{cases}$$

方程组有无穷多组解，全部解为

$$k_1(1,-1,0)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_1 为任意常数.

(ii) 当 $a=c\neq b$ 时，同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ \qquad x_2\qquad=0,\end{cases}$$

方程组有无穷多组解，全部解为

$$k_2(1,0,-1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_2 为任意常数.

(iii) 当 $b=c\neq a$ 时，同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1\qquad\qquad=0,\end{cases}$$

方程组有无穷多组解，全部解为

$$k_3(0,1,-1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_3 为任意常数.

(iv) 当 $a=b=c$ 时，同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3=0,$$

方程组有无穷多组解．全部解为

$$k_4(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_5(-1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k_4，k_5 为任意常数．

［典型错误］ 解(Ⅱ)时．分情况讨论不完整．有必要提高分情况讨论的能力．

例 2.4.27 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}$ $(i=1,2,\cdots,r,r<n)$是 n 维实向量．且 α_1．α_2，…．α_r 线性无关．已知$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量．试判断向量组 α_1，α_2，…，α_r，β 的线性相关性．

［提示］ 本题主要考查向量组的线性相关、线性无关及齐次线性方程组的有关知识．注意到 β 是已知齐次线性方程组的非零解，那么 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\beta=0$ $(i=1,2,\cdots,r)$，即 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha_i=0$ $(i=1,2,\cdots,r)$．再利用判别向量组线性无关性的基本方法，判断出 α_1．α_2．…，α_r，β 是线性无关的．

［解］ 设有一组数 k_1，k_2，…，k_r，k，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k\beta=0, \qquad (*)$$

因为 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \qquad\cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的解，故

$$\alpha_i^{\mathrm{T}}\beta=0\ (i=1,2,\cdots,r),$$

即

$$\beta^{\mathrm{T}}\alpha_i=0\ (i=1,2,\cdots,r).$$

于是．由

$$k_1\beta^{\mathrm{T}}\alpha_1+k_2\beta^{\mathrm{T}}\alpha_2+\cdots+k_r\beta^{\mathrm{T}}\alpha_r+k\beta^{\mathrm{T}}\beta=0,$$

得 $k\beta^{\mathrm{T}}\beta=0$．由 $\beta\neq0$，知 $\beta^{\mathrm{T}}\beta\neq0$．故 $k=0$．

从而(＊)式为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$．由于向量组 α_1，α_2，…，α_r 线性无关，所以有

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0.$$

因此，向量组 α_1，α_2．…，α_r，β 线性无关．

［典型错误］ 多数考生不能由 β 是线性方程组的解，得到 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha_i=0$ $(i=1,2,\cdots,r)$．故不能完成此题的证明．

例 2.4.28 设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $A^kx=0$ 有解向量 α．且 $A^{k-1}\alpha\neq0$．证明：向量组 α，$A\alpha$，…，$A^{k-1}\alpha$ 是线性无关的．

［提示］ 本题主要考查向量组线性无关的概念和矩阵的运算法则．根据向量组是线性无关的定义，如果能证明当 $\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=0$ 时，有 $\lambda_i=0$，$i=1,2,\cdots,k$，则 α、$A\alpha$，…，$A^{k-1}\alpha$ 线性无关．根据题目条件知 $A^{k-1}\alpha\neq0$，$A^k\alpha=0$，因而 $A^t\alpha=0$ $(t\geqslant k)$．故用 A^{k-1}同时左乘 $\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=0$ 两边可得到 $\lambda_1=0$，依次用 A^{k-2}，A^{k-3}，…，A 左乘上述关系式两边．便可证明 $\lambda_2=0$，…，$\lambda_{k-1}=0$，最后，由 $\lambda_kA^{k-1}\alpha=0$ 知 $\lambda_k=0$．

［证］ 设有常数 λ_1，λ_2，…，λ_k，使得

$$\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=0,$$

则有

$$A^{k-1}(\lambda_1\alpha+\lambda_2 A\alpha+\cdots+\lambda_k A^{k-1}\alpha)=0,$$

从而有

$$\lambda_1 A^{k-1}\alpha=0.$$

由于 $A^{k-1}\alpha\neq 0$，所以 $\lambda_1=0$.

同理可证得 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_k=0$，因此向量组 α，$A\alpha$，…，$A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

[典型错误]

① 对向量组线性无关的概念理解不透彻，导致无从下手.

② 没有充分利用条件 $A^k\alpha=0$ 及 $A^{k-1}\alpha\neq 0$，无法完成证明.

五、矩阵的特征值和特征向量

·考试内容与要求·

考试内容

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质　相似矩阵的概念及性质　矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵　实对称矩阵的特征值和特征向量及相似对角矩阵

考试要求

1. 理解矩阵的特征值、特征向量的概念，掌握矩阵特征值的性质，掌握求矩阵特征值和特征向量的方法.

2. 理解矩阵相似的概念，掌握相似矩阵的性质，了解矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.

3. 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

·考试内容解析·

（一）矩阵的特征值和特征向量

1. 特征值和特征向量的概念

（1）特征值和特征向量的定义

设 A 是 n 阶矩阵．如果存在一个数 λ 和非零的 n 维列向量 α，使得

$$A\alpha=\lambda\alpha,$$

则称 λ 是矩阵 A 的一个特征值，α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量.

（2）特征多项式和特征方程

设 A 是 n 阶矩阵，行列式 $|\lambda E-A|$ 称为矩阵 A 的特征多项式，$|\lambda E-A|=0$ 称为矩阵 A 的特征方程.

2. 特征值和特征向量的求法

（1）解特征方程 $|\lambda E-A|=0$，得矩阵 A 的全部特征值 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$，其中可能有重根.

（2）对每个特征值 λ_i，解齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)x=0$．设 $r(\lambda_i E-A)=r_i$，如果 ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r_i} 为方程组的基础解系，则矩阵 A 属于特征值 λ_i 的全部特征向量为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r_i}\xi_{n-r_i},$$

其中 k_1，k_2，…，k_{n-r_i} 是不全为零的任意常数.

注　对于抽象的矩阵，也可以用定义求其特征值和特征向量.

3. 特征值和特征向量的性质

（1）n 阶矩阵 A 和它的转置矩阵 A^T 有相同的特征值.

（2）n 阶矩阵 A 属于不同特征值的特征向量线性无关.