则有

$$A^{k-1}(\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha)=0,$$

从而有

$$\lambda_1A^{k-1}\alpha=0.$$

由于 $A^{k-1}\alpha\neq0$，所以 $\lambda_1=0$.

同理可证得 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_k=0$，因此向量组 α，$A\alpha$，…，$A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

[典型错误]

① 对向量组线性无关的概念理解不透彻，导致无从下手.

② 没有充分利用条件 $A^k\alpha=0$ 及 $A^{k-1}\alpha\neq0$，无法完成证明.

五、矩阵的特征值和特征向量

·考试内容与要求·

考试内容

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质　相似矩阵的概念及性质　矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵　实对称矩阵的特征值和特征向量及相似对角矩阵

考试要求

1. 理解矩阵的特征值、特征向量的概念，掌握矩阵特征值的性质，掌握求矩阵特征值和特征向量的方法.

2. 理解矩阵相似的概念，掌握相似矩阵的性质，了解矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.

3. 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

·考试内容解析·

(一) 矩阵的特征值和特征向量

1. 特征值和特征向量的概念

(1) 特征值和特征向量的定义

设 A 是 n 阶矩阵. 如果存在一个数 λ 和非零的 n 维列向量 α，使得

$$A\alpha=\lambda\alpha,$$

则称 λ 是矩阵 A 的一个特征值，α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量.

(2) 特征多项式和特征方程

设 A 是 n 阶矩阵，行列式 $|\lambda E-A|$ 称为矩阵 A 的特征多项式，$|\lambda E-A|=0$ 称为矩阵 A 的特征方程.

2. 特征值和特征向量的求法

(1) 解特征方程 $|\lambda E-A|=0$，得矩阵 A 的全部特征值 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$，其中可能有重根.

(2) 对每个特征值 λ_i，解齐次线性方程组 $(\lambda_iE-A)x=0$. 设 $r(\lambda_iE-A)=r_i$，如果 ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r_i} 为方程组的基础解系，则矩阵 A 属于特征值 λ_i 的全部特征向量为

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r_i}\xi_{n-r_i},$$

其中 k_1，k_2，…，k_{n-r_i} 是不全为零的任意常数.

注　对于抽象的矩阵，也可以用定义求其特征值和特征向量.

3. 特征值和特征向量的性质

(1) n 阶矩阵 A 和它的转置矩阵 A^T 有相同的特征值.

(2) n 阶矩阵 A 属于不同特征值的特征向量线性无关.

(3) n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是，它的任一特征值均不等于零.

(4) 设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值为 λ_1，λ_2，…，λ_n，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}=\operatorname{tr}A$，$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=|A|$，其中 $\operatorname{tr}A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 称为矩阵 A 的迹.

(5) 若 λ 是可逆矩阵 A 的非零的特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的一个特征值.

(6) 若 λ 是 n 阶矩阵 A 的特征值，$f(x)$ 是一个多项式，则 $f(\lambda)$ 是矩阵 $f(A)$ 的一个特征值.

(二) 相似矩阵

1. 矩阵相似的定义

设 A，B 为 n 阶矩阵，如果存在 n 阶可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=B,$$

则称矩阵 A 与 B 相似，记作 $A\sim B$.

2. 相似矩阵的性质

(1) 反身性：对任意 n 阶矩阵 A，均有 $A\sim A$.

(2) 对称性：如果 n 阶矩阵 $A\sim B$，则 $B\sim A$.

(3) 传递性：如果 n 阶矩阵 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.

(4) 如果 n 阶矩阵 $A\sim B$，则 $|A|=|B|$.

(5) 如果 n 阶矩阵 $A\sim B$，则 A，B 有相同的特征值.

(6) 如果 n 阶矩阵 $A\sim B$，则 $A^m\sim B^m$，其中 m 为正整数.

(7) 如果 n 阶矩阵 $A\sim B$. 且 A，B 都可逆，则 $A^{-1}\sim B^{-1}$.

(8) 如果 n 阶矩阵 $A\sim B$，则 $\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B$，$r(A)=r(B)$.

3. 矩阵可相似对角化的充分必要条件

(1) n 阶矩阵 A 可相似对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

推论 如果 n 阶矩阵 A 有 n 个互异的特征值，则 A 与对角矩阵相似.

(2) n 阶矩阵 A 可相似对角化的充分必要条件是对于矩阵 A 的每一个 n_i 重特征值 λ_i，特征矩阵 λ_iE-A 的秩 $r(\lambda_iE-A)=n-n_i$. 即对矩阵 A 的每一个 n_i 重特征值 λ_i，线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数 n_i.

4. 矩阵化为相似对角形的方法

(1) 解特征方程 $|\lambda E-A|=0$，求出 A 的全部特征值 λ_1，λ_2，…，λ_s，设 λ_i 是 n_i 重根 $(i=1,2,\cdots,s)$.

(2) 对每个特征值 λ_i，解齐次线性方程组 $(\lambda_iE-A)x=0$，求得基础解系 ξ_{i1}，ξ_{i2}，…，ξ_{in_i}.

(3) 令可逆矩阵 $P=(\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1n_1},\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2n_2},\cdots,\xi_{s1},\xi_{s2},\cdots,\xi_{sn_s})$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 &&&&&&&&\\ &\ddots&&&&&&&\\ &&\lambda_1&&&&&&\\ &&&\lambda_2&&&&&\\ &&&&\ddots&&&&\\ &&&&&\lambda_2&&&\\ &&&&&&\ddots&&\\ &&&&&&&\lambda_s&\\ &&&&&&&&\ddots\\ &&&&&&&&&\lambda_s\end{pmatrix}.$$

其中 λ_i 的个数为 n_i $(i=1,2,\cdots,s)$.

(三) 实对称矩阵的特征值和特征向量

1. 实对称矩阵特征值和特征向量的性质

(1) 实对称矩阵的特征值都是实数.

(2) 实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的.

(3) 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 λ_1，λ_2，…，λ_n 是 A 的特征值.

2. 用正交矩阵化实对称矩阵为对角矩阵的方法

(1) 求出 n 阶实对称矩阵 A 的全部特征值 λ_1，λ_2，…，λ_s，设 λ_i 是 n_i 重根($i=1,2,\cdots,s$).

(2) 对每个特征值 λ_i，解齐次线性方程组 $(\lambda_iE-A)x=0$，求得基础解系 ξ_{i1}，ξ_{i2}，…，ξ_{in_i}.

(3) 将 ξ_{i1}，ξ_{i2}，…，ξ_{in_i} ($i=1,2,\cdots,s$)正交单位化，得正交单位向量组 η_{i1}，η_{i2}，…，η_{in_i}. 这里，当 $n_i=1$ 时，即 λ_i 是单根时，对应特征向量只需单位化.

(4) 令正交矩阵 $Q=(\eta_{11},\eta_{12},\cdots,\eta_{1n_1},\eta_{21},\eta_{22},\cdots,\eta_{2n_2},\cdots,\eta_{s1},\eta_{s2},\cdots,\eta_{sn_s})$，则

$$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_s & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_s\end{pmatrix},$$

其中 λ_i 的个数为 n_i ($i=1,2,\cdots,s$).

·例 题 详 解·

例 2.5.1 矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$ 的非零的特征值是________.

[答案] 4.

[提示] 本题主要考查矩阵特征值的求法及行列式的计算技巧. 求出特征方程的非零根即可.

[解] 令

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix},$$

则矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ -2 & \lambda-2 & 2\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 2\\ -2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & \lambda & \lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ -2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-4),$$

由此可知矩阵 A 的非零特征值为 4.

例 2.5.2 设 n 阶矩阵 A 的元素均为 1，则 A 的 n 个特征值是________.

[答案] n，$\overbrace{0,\cdots,0}^{n-1个}$.

［提示］ 本题主要考查矩阵的特征值的求法及 n 阶行列式的计算．解矩阵 A 的特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 即可．

［解］ 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & \lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n-1}(\lambda-n).$$

故矩阵 A 的特征值为 n 和 0（$n-1$ 重）．

［典型错误］ 填 n，0．没有说明 0 是 $n-1$ 重特征值，而试题要求写出 A 的 n 个特征值．

例 2.5.3 设 A 为 n 阶矩阵，$|A|\neq0$，A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵．若 A 有特征值 λ，则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值__________．

［答案］ $\dfrac{|A|^2}{\lambda^2}+1$．

［提示］ 本题主要考查 A 的特征值和与 A 有关的矩阵的特征值之间的关系，A 与 A^* 之间的关系．由于 A 有特征值 λ，故 A^{-1} 必有特征值 $\dfrac{1}{\lambda}$，A^2 必有特征值 λ^2，$A+E$ 必有特征值 $\lambda+1$．因此只要求出 A^* 的某个特征值即可．

［解］ 由于 $A^*=|A|A^{-1}$，故 $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 必是 $|A|A^{-1}$ 即 A^* 的特征值，因此，$\dfrac{|A|^2}{\lambda^2}+1$ 必是 $(A^*)^2+E$ 的特征值．

［典型错误］ 题目中的矩阵 A 是抽象的，部分考生感到不适应，也不能推导出 A 与 A^* 特征值之间的关系，导致无法答题．

例 2.5.4 若 4 阶矩阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，则行列式 $|B^{-1}-E|=$________．

［答案］ 24．

［提示］ 本题主要考查矩阵相似的性质，特征值的概念及矩阵相似于一个对角矩阵的判别方法．由相似矩阵有相同的行列式，有 $|B^{-1}-E|=|A^{-1}-E|$．又矩阵 A 的特征值两两不同，故 A 相似于一个对角矩阵 Λ，于是 $|A^{-1}-E|=|\Lambda^{-1}-E|$，所以要先求对角矩阵 Λ．也可根据矩阵的行列式等于特征值的乘积这一结论来解此题，因此我们采用两种方法解此题．

［解法 1］ 由矩阵 A 与 B 相似，故存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$，即 $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$．于是

$$|B^{-1}-E|=|P^{-1}A^{-1}P-E|=|A^{-1}-E|.$$

因为矩阵 A 有两两不同的特征值，故存在一个可逆矩阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&&&\\&\frac{1}{3}&&\\&&\frac{1}{4}&\\&&&\frac{1}{5}\end{pmatrix}=\Lambda.$$

即 $A^{-1}=Q\Lambda^{-1}Q^{-1}$. 于是

$$\begin{aligned}|B^{-1}-E|&=|A^{-1}-E|\\&=|Q\Lambda^{-1}Q^{-1}-QQ^{-1}|\\&=|Q|\cdot|\Lambda^{-1}-E|\cdot|Q^{-1}|\\&=\begin{vmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{vmatrix}\\&=24.\end{aligned}$$

[解法 2] 由矩阵 A 与 B 相似，知 A 与 B 有相同的特征值，因此 B 的特征值也为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，易知 B^{-1}的特征值为 2，3，4．5，而 $B^{-1}-E$ 的特征值为 1、2，3，4，故 $|B^{-1}-E|=1\times2\times3\times4=24$.

例 2.5.5 已知 4 阶矩阵 A 相似于 B，A 的特征值为 2，3，4，5，E 为 4 阶单位矩阵，则 $|B-E|=$ ________.

[答案] 24.

[提示] 本题主要考查相似矩阵的性质以及矩阵的特征值与行列式之间的关系．根据 n 阶矩阵的行列式等于特征值之积这一结论来解此题.

[解] 由矩阵 A 与 B 相似，知 A 与 B 有相同的特征值，故矩阵 B 的特征值也为 2，3，4，5．由特征值的性质，矩阵 $B-E$ 的特征值为 1，2，3，4，从而 $|B-E|=1\times2\times3\times4=24$.

例 2.5.6 设 $\alpha=(1,0,-1)^{T}$，矩阵 $A=\alpha\alpha^{T}$，n 为正整数，则 $|aE-A^{n}|=$ ________.

[答案] $a^2(a-2^n)$.

[提示] 本题主要考查矩阵特征值的性质及矩阵的运算．利用 n 阶矩阵的行列式等于所有特征值之积这一结论解此题.

[解] 由 $\alpha=(1,0,-1)^{T}$，有

$$A=\alpha\alpha^{T}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(1,0,-1)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-2)=0,$$

求得矩阵 A 的特征值为 0，0，2．由特征值的性质，矩阵 $aE-A^n$ 的特征值为 a，a，$a-2^n$，故 $|aE-A^n|=a^2(a-2^n)$.

[典型错误] 不少考生填错，主要原因是在求 $|aE-A^n|$ 时，不利用特征值的性质，而是先求矩阵 $aE-A^n$ 的具体表达式，增加计算量，导致错误.

例 2.5.7 设 λ_1，λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1，α_2，则 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是(　　).

(A) $\lambda_1=0$　　(B) $\lambda_2=0$　　(C) $\lambda_1\neq0$　　(D) $\lambda_2\neq0$

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查矩阵的特征值、特征向量及向量组线性无关的概念.

[解] 由 $A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$，得

$$(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2))=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix}.$$

因 α_1，α_2 线性无关，故 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2\neq0.$$

[典型错误] 填(A)，其原因是，当 $\lambda_1=0$ 时，$\lambda_2\neq0$，所以 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关．这是充分条件，不是必要条件.

例 2.5.8 设 A，B 为 n 阶矩阵，且 A 与 B 相似，E 为 n 阶单位矩阵，则(　　).

(A) $\lambda E-A=\lambda E-B$

(B) A 与 B 有相同的特征值和特征向量

(C) A 与 B 都相似于一个对角矩阵

(D) 对任意常数 t，$tE-A$ 与 $tE-B$ 相似

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查矩阵相似的概念与性质．利用排除法解此题.

[解] 若选项(A)成立，则有 $A=B$，故应排除(A)；矩阵 A 与 B 相似，则 A 与 B 有相同的特征值，但不一定有相同的特征向量．例如，矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 相似，而 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 的特征向量，但不是矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 的特征向量；矩阵 A 与 B 相似，并不能说明 A 和 B 都与对角矩阵相似．例如，矩阵 $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 相似，但不与对角矩阵相似．故选项(D)成立.

事实上，由矩阵 A 与 B 相似，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$．而 $P^{-1}(tE-A)P=tE-P^{-1}AP=tE-B$，故 $tE-A$ 与 $tE-B$ 相似.

[典型错误] 选(B)的考生不少，其原因是误认为相似矩阵有相同的特征向量.

例 2.5.9 设 A 是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵．已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $(P^{-1}AP)^{\mathrm T}$ 属于特征值 λ 的特征向量是(　　).

(A) $P^{-1}\alpha$　　(B) $P^{\mathrm T}\alpha$　　(C) $P\alpha$　　(D) $(P^{-1})^{\mathrm T}\alpha$

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查矩阵的特征值与特征向量的概念及矩阵的运算法则．从定义出发来解此题.

[解] 因为 α 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量，故 $A\alpha=\lambda\alpha$．矩阵 $(P^{-1}AP)^{\mathrm T}$ 属于特征值 λ 的特征向量 β 必须满足 $(P^{-1}AP)^{\mathrm T}\beta=\lambda\beta$.

将(A)，(B)，(C)，(D)中的四个向量分别代入上式，只有 $\beta=P^{\mathrm T}\alpha$ 满足 $(P^{-1}AP)^{\mathrm T}\beta=\lambda\beta$．因为

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^{\mathrm T}(P^{\mathrm T}\alpha)&=P^{\mathrm T}A^{\mathrm T}(P^{-1})^{\mathrm T}\cdot P^{\mathrm T}\alpha\\&=P^{\mathrm T}A^{\mathrm T}(P^{\mathrm T})^{-1}\cdot P^{\mathrm T}\alpha\\&=P^{\mathrm T}A\alpha=\lambda(P^{\mathrm T}\alpha).\end{aligned}$$

[典型错误] 选(D)，其原因是误认为 $(P^{-1}AP)^{\mathrm T}=(P^{-1})^{\mathrm T}AP^{\mathrm T}$．可见掌握一些基本的公式是必需的.

例 2.5.10 设矩阵

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

已知矩阵 A 相似于 B，则 $r(A-2E)$ 与 $r(A-E)$ 之和等于(　　).

(A) 2　　　　(B) 3　　　　(C) 4　　　　(D) 5

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查相似矩阵的性质及矩阵的秩的概念. 利用相似矩阵有相同的秩来解此题.

[解] 因为 $A\sim B$. 则存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^{-1}BP$. 于是

$$A-2E=P^{-1}BP-2P^{-1}P=P^{-1}(B-2E)P,$$

即 $(A-2E)\sim(B-2E)$，同理可得 $(A-E)\sim(B-E)$.

相似矩阵的秩相同，只需求矩阵 $B-2E$ 和 $B-E$ 的秩. 容易得到 $r(B-2E)=3$，$r(B-E)=1$. 故应选(C).

例 2.5.11 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad B=P^{-1}A^*P,$$

求 $B+2E$ 的特征值与特征向量，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵. E 为 3 阶单位矩阵.

[提示] 本题主要考查矩阵的特征值及特征向量的计算. 并由 A 的特征值、特征向量计算与 A 有关的某些矩阵的特征值及特征向量. 本题主要有两种解法，一是先讨论矩阵 B 与 A 的特征值、特征向量之间的关系，经计算 A 的特征值、特征向量而得到 $B+2E$ 的特征值、特征向量；二是由 A 求 A^* 再求 B 及 $B+2E$，从而算出 $B+2E$ 的特征值、特征向量. 后一方法由于要经过多次数字计算，中间稍有错误便前功尽弃.

[解法 1] 由于 $|A|=7\neq0$，所以矩阵 A 的任一特征值 $\lambda\neq0$. 设 η 是 A 的属于 λ 的一个特征向量，即 $A\eta=\lambda\eta$，故 η 是 A^{-1} 的属于 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量. 又 $A^*=|A|A^{-1}$，故 η 是 A^* 的属于 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量. 由 $B=P^{-1}A^*P$. 有 $PBP^{-1}=A^*$，从而

$$PBP^{-1}\eta=A^*\eta=\frac{|A|}{\lambda}\eta,$$

即 $B(P^{-1}\eta)=\frac{|A|}{\lambda}P^{-1}\eta$. 所以 $P^{-1}\eta$ 是 B 的属于特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量.

由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7),$$

知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=7$. 通过计算可知，A 的属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量可取为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};$$

属于 $\lambda_3=7$ 的一个特征向量可取为

$$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

又

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

于是 B 的属于特征值 $\frac{|A|}{\lambda_{1,2}}=7$ 的特征向量可取为

$$P^{-1}\eta_1=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$P^{-1}\eta_2=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix};$$

矩阵 B 的属于特征值 $\frac{|A|}{\lambda_3}=1$ 的特征向量可取为

$$P^{-1}\eta_3=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

故矩阵 $B+2E$ 的特征值为 3，9，9. 属于特征值 9 的特征向量为

$$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_1，k_2 是不全为零的常数；属于特征值 3 的特征向量为

$$k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_3 为不等于零的常数.

［解法 2］ 由条件得

$$A^*=|A|A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&5&-2\\-2&-2&5\end{pmatrix};$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

所以

$$B+2E=P^{-1}A^*P+2E=\begin{pmatrix}9&0&0\\-2&7&-4\\-2&-2&5\end{pmatrix}.$$

由 $|\lambda E-(B+2E)|=(\lambda-9)^2(\lambda-3)$，知 $B+2E$ 的特征值为 3，9，9.

属于特征值 9 的特征向量为

$$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_1，k_2 是不全为零的常数；

属于特征值 3 的特征向量为

$$k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_3 为不等于零的常数.

［典型错误］

① A 或 $B+2E$ 的特征值计算错，A^* 计算出错.

② 由 A 的属于λ 的特征向量 η 求 B 的属于$\dfrac{|A|}{\lambda}$的特征向量时，错误地写成 η.

例 2.5.12 设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件 $\alpha^T\beta=0$. 记 n 阶矩阵$A=\alpha\beta^T$，试求：

（Ⅰ）A^2；

（Ⅱ）矩阵 A 的特征值和特征向量.

［提示］ 本题主要考查矩阵的特征值与特征向量的求法和矩阵的运算. 利用矩阵乘法的结合律以及 $\alpha^T\beta$ 为一数值易计算出 A^2，利用（Ⅰ）的结论及特征值的定义即可求出 A 的特征值. 在求出了 A 的特征值之后，便可解出全部特征向量.

［解］（Ⅰ）由 $A=\alpha\beta^T$ 和 $\alpha^T\beta=0$，有

$$A^2=AA=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=(\beta^T\alpha)\alpha\beta^T=(\alpha^T\beta)^T\alpha\beta^T=O,$$

即 A^2 为 n 阶零矩阵.

（Ⅱ）设 λ 为A 的任一特征值. A 的属于λ 的特征向量为 ξ，则

$$A\xi=\lambda\xi,$$

于是

$$A^2\xi=\lambda A\xi=\lambda^2\xi.$$

由(Ⅰ)知. $A^2=O$，故有 $\lambda^2\xi=0$. 因为特征向量 $\xi\neq0$，所以 $\lambda^2=0$，即 $\lambda=0$，故矩阵 A 的特征值全为零.

不妨设向量 α，β 的分量$a_1\neq0$，$b_1\neq0$. 对齐次线性方程组$(0\cdot E-A)x=0$ 的系数矩阵作初等行变换，得

$$0\cdot E-A=\begin{pmatrix}-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n\\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

由此可得基础解系为

$$\alpha_1=\left(-\frac{b_2}{b_1},1,0,\cdots,0\right)^T,\alpha_2=\left(-\frac{b_3}{b_1},0,1,\cdots,0\right)^T,\cdots,\alpha_{n-1}=\left(-\frac{b_n}{b_1},0,0,\cdots,1\right)^T,$$

于是 A 的属于特征值$\lambda=0$ 的全部特征向量为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1},$$

其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$是不全为零的任意常数.

［典型错误］

① 没有注意到 $\beta^T\alpha$ 是一个数，导致求不出 A^2.

② 求不出矩阵 A 的特征值.

③ 求特征向量时讨论不严密或出错.

例 2.5.13 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{pmatrix}$，其行列式 $|A|=-1$. 又 A 的伴随矩阵A^*有一个特征值 λ_0，A^*的属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，求a,b,c 和λ_0 的值.

［提示］ 本题主要考查矩阵特征值、特征向量的概念以及矩阵与其伴随矩阵之间的关系. 题目中待求的参数较多. 若能转化为求方程组的解. 问题可以解决. 由题设，知 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$，又由公式 $AA^*=|A|E$. 可得 $\lambda_0A\alpha=-\alpha$，把问题转化为求解方程组 $\lambda_0A\alpha=-\alpha$.

［解］ 由题设，可得

$$AA^*=|A|E=-E \text{ 和 } A^*\alpha=\lambda_0\alpha,$$

于是

$$AA^*\alpha=A(\lambda_0\alpha)=\lambda_0A\alpha.$$

又

$$AA^*\alpha=-E\alpha=-\alpha.$$

故

$$\lambda_0 A\alpha=-\alpha,$$

即

$$\lambda_0\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

由此可得

$$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1, & (*)_1\\ \lambda_0(-5-b+3)=1, & (*)_2\\ \lambda_0(-1+c-a)=-1. & (*)_3\end{cases}$$

由式$(*)_1$和$(*)_3$，解得$\lambda_0=1$. 将$\lambda_0=1$代入式$(*)_2$和$(*)_1$，得$b=-3$，$a=c$. 由$|A|=-1$和$a=c$，有

$$\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&-3&3\\1-a&0&-a\end{vmatrix}=a-3=-1,$$

故$a=c=2$. 因此$a=2$，$b=-3$，$c=2$，$\lambda_0=1$.

[典型错误]

① 无法求方程组$\lambda_0 A\alpha=-\alpha$的解.

② 直接求A^*，再根据α是属于λ_0的特征向量，求a，b，c和λ_0的值，由于计算量较大，导致半途而废.

例 2.5.14 设矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$. 问当$k$为何值时，存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵？并求出$P$和相应的对角矩阵.

[提示] 本题主要考查矩阵可相似对角化的问题，行列式的计算及特征值、特征向量的计算. 先求出矩阵A的特征值，只有当矩阵A有3个线性无关的特征向量时，A才相似于对角矩阵，即存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵，其中P是以A的3个线性无关的特征向量构成的矩阵.

[解] 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\k&\lambda+1&-k\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1),$$

由此解得矩阵A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$.

对于$\lambda_1=\lambda_2=-1$，解线性方程组$(-E-A)x=0$，有

$$-E-A=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\-4&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

要使矩阵A相似于对角矩阵，则对应于$\lambda_1=\lambda_2=-1$，必有两个线性无关的特征向量，所以$r(-E-A)=3-2=1$，从而有$k=0$. 于是当$k=0$时，有

$$-E-A\to\begin{pmatrix}-4&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

故对应的特征向量为

$$\xi_1=(-1,2,0)^{\mathrm T},\xi_2=(1,0,2)^{\mathrm T}.$$

对于 $\lambda_3=1$，解线性方程组 $(E-A)x=0$，有

$$E-A=\begin{pmatrix}-2&-2&2\\0&2&0\\-4&-2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量为

$$\xi_3=(1,0,1)^{\mathrm T}.$$

因此．当 $k=0$ 时．存在可逆矩阵

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&0&0\\0&2&1\end{pmatrix},$$

使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

［典型错误］ 不能由 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 是矩阵 A 的二重特征值得到 $r(-E-A)=1$，即 $k=0$．可见考生有必要从本质上理解矩阵对角化问题．

例 2.5.15　若矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ，试确定常数 a 的值；并求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$．

［提示］ 本题主要考查矩阵可相似对角化问题和矩阵特征值与特征向量的计算．利用矩阵可相似于对角矩阵的充要条件解此题．

［解］ 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&-a\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=6$，$\lambda_3=-2$．

由于 A 相似于对角矩阵 Λ，故对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 应有两个线性无关的特征向量，因此矩阵 $6E-A$ 的秩应为 1．从而由

$$6E-A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&-a\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix},$$

知 $a=0$．

于是对应于 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的两个线性无关的特征向量可取为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3=-2$ 时，

$$\lambda_3E-A=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\-8&-4&0\\0&0&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

于是对应于 $\lambda_3=-2$ 的特征向量可取为

$$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

令 $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&-2\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 P 可逆，并有 $P^{-1}AP=\Lambda$.

［典型错误］ 不能由 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 为矩阵 A 的二重特征值求得 $a=0$. 说明考生对 n 阶矩阵可相似对角化的理论理解不透彻.

例 2.5.16 设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）求 A 的特征值和特征向量；

（Ⅱ）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

［提示］ 本题主要考查含参数的矩阵的特征值、特征向量的计算问题. 计算过程中涉及行列式的计算、齐次线性方程组的求解以及矩阵对角化问题，因而是一道综合性较强的试题. 由矩阵 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|$，求出特征值，然后通过解齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$，求特征向量，进而求出 P.

［解］ 当 $b=0$ 或 $n=1$ 时，$A=E$，于是 A 的特征值为$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$，任意非零列向量均为特征向量；对任意 n 阶可逆矩阵 P，均有 $P^{-1}AP=E$.

下面考虑 $b\neq0$ 且 $n\geqslant2$ 的情形. 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-b&\cdots&-b\\-b&\lambda-1&\cdots&-b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-b&-b&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1},$$

得 A 的特征值为$\lambda_1=1+(n-1)b$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.

（Ⅰ）对于 $\lambda_1=1+(n-1)b$，考虑齐次线性方程组$(\lambda_1E-A)x=0$. 对 λ_1E-A 施以初等行变换，得

$$\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}(n-1)b&-b&\cdots&-b\\-b&(n-1)b&\cdots&-b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-b&-b&\cdots&(n-1)b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&-1\\0&1&\cdots&0&-1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-1\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}.$$

解得基础解系为 $\xi_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，所以 A 的属于λ_1 的全部特征向量为

$$k\xi_1=k\,(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\quad(k\text{ 为任意非零常数}).$$

对于 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$，考虑齐次线性方程组$(\lambda_2E-A)x=0$. 对 λ_2E-A 施以初等行变换，得

$$\lambda_2E-A\to\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

解得基础解系为

$$\xi_2=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\xi_n=(1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm{T}},$$

故 A 的属于λ_2 的全部特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3+\cdots+k_n\xi_n\quad(k_2,k_3,\cdots,k_n\text{ 是不全为零的常数}).$$

（Ⅱ）令 $P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1+(n-1)b & & & \\ & 1-b & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-b\end{pmatrix}.$$

［典型错误］

① 因为 A 是具有参数的矩阵，所以在求特征值的时候要分情况讨论．但是大多数考生没有讨论 $b=0$ 这种情况，导致失分．

② 有相当一部分考生由于没有掌握矩阵初等变换的基本技巧，在求属于 λ_1 的特征向量时出错．

③ 不会求属于 $1-b$ 的特征向量．

④ 还有一部分考生在计算 A 的特征多项式 $|\lambda E-A|$ 时出错．

例 2.5.17 设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & -1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵．并计算行列式 $|A-E|$ 的值．

［提示］ 本题主要考查的知识点是把实对称矩阵化为对角矩阵的方法，矩阵特征值、特征向量的求法及相似矩阵的性质．由题设可求出矩阵 A 的 3 个线性无关的特征向量，于是可求出可逆矩阵 P．使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵．由

$$|A-E|=|P^{-1}AP-P^{-1}P|=|P^{-1}AP-E|,$$

可知只要求出对角矩阵 $P^{-1}AP$，就可以计算出 $|A-E|$．

［解］ 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & -1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2),$$

由此得矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$．

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=a+1$，可得对应的两个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

对于特征值 $\lambda_3=a-2$，可得对应的特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

令矩阵

$$P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}|A-E|&=|P\Lambda P^{-1}-PP^{-1}|\\ &=|P|\cdot|\Lambda-E|\cdot|P^{-1}|\\ &=\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a-3\end{vmatrix}\\ &=a^2(a-3).\end{aligned}$$

［典型错误］ 部分考生求 $|A-E|$ 时，没有利用 $P^{-1}AP$ 是一个对角矩阵，而是直接代入 A，导致计算量增大，常常出现计算错误．建议考生答题时要采用比较简单的方法．

例 2.5.18 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

[提示] 本题主要考查矩阵特征值、特征向量的求法及矩阵相似于一个对角矩阵的充分必要条件. 通过讨论矩阵特征方程二重根的情况以及对应的线性无关的特征向量的个数，从而决定矩阵 A 是否可以相似于对角矩阵.

[解] 矩阵 A 的特征多项式为

$$\begin{aligned}|\lambda E-A|&=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}\lambda-2&2-\lambda&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}\\&=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}\\&=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&\lambda-3&3\\-1&-a-1&\lambda-5\end{vmatrix}\\&=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).\end{aligned}$$

若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2-16+18+3a=0$，解得 $a=-2$.

当 $a=-2$ 时，A 的特征值为 2，2，6，矩阵

$$2E-A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}$$

的秩为 1．故 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量有两个，从而 A 可相似对角化.

若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方，从而 $18+3a=16$，解得 $a=-\frac{2}{3}$.

当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，A 的特征值为 2，4，4，矩阵

$$4E-A=\begin{pmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{pmatrix}$$

的秩为 2，故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个，从而 A 不可相似对角化.

[典型错误]

① 有相当一部分考生无从着手，反映出他们对这部分内容未掌握.

② 参数 a 有两个可能的取值 $a=-2$ 及 $a=-\frac{2}{3}$，但绝大多数考生只求出 $a=-\frac{2}{3}$ 这一种情况.

例 2.5.19 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$，已知 A 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值．试求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵.

[提示] 本题主要考查矩阵相似于对角矩阵的充分必要条件以及把一个矩阵化为对角矩阵的方法．因为 A 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，所以，A 对应于 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量有两

个，故 $r(2E-A)=1$．对矩阵 $2E-A$ 作适当的初等行变换，通过 $r(2E-A)=1$ 确定出 x 和 y 的值，从而确定出 A．再按现成的方法求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角形．

［解］ 因为 A 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值，所以 A 的属于 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量必有两个．故 $r(2E-A)=1$．

经过初等行变换，得

$$2E-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix},$$

解得 $x=2$，$y=-2$．

由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6),$$

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=6$．

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组 $(2E-A)x=0$，有

$$2E-A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量为

$$\xi_1=(1,-1,0)^{\mathrm T},\ \xi_2=(1,0,1)^{\mathrm T}.$$

对于特征值 $\lambda_3=6$，解齐次线性方程组 $(6E-A)x=0$，有

$$6E-A=\begin{pmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

对应的特征向量为

$$\xi_3=(1,-2,3)^{\mathrm T}.$$

令可逆矩阵

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

［典型错误］ 因矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量，故 A 可对角化，进而属于特征值 2 的线性无关的特征向量有两个，即 $r(2E-A)=1$．由于考生对这一结论不清楚，无法求出 x 与 y 的值．

例 2.5.20 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$．已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一，试求：

（Ⅰ）a 的值；

（Ⅱ）正交矩阵 Q，使 $Q^{\mathrm T}AQ$ 为对角矩阵．

［提示］ 本题主要考查非齐次线性方程组有解的判别方法及用正交矩阵化实对称矩阵为对角矩阵的方法．

由线性方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多个解，知 $r(A)=r(A,\beta)<3$. 利用此结论求得 a 的值. 再计算矩阵 A 的特征值、特征向量. 把线性无关的特征向量正交化、单位化，可得正交矩阵 Q，使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角矩阵.

[解] （Ⅰ）对线性方程组 $Ax=\beta$ 的增广矩阵作初等行交换，有

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(a-1)(a+2)&a+2\end{pmatrix}.$$

因为方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一，所以 $r(A)=r(A,\beta)<3$. 故 $a=-2$.

（Ⅱ）由（Ⅰ），有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3),$$

故 A 的特征值为

$$\lambda_1=3,\ \lambda_2=-3,\ \lambda_3=0.$$

对应的特征向量分别是

$$\alpha_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 已正交. 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化，得

$$\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},0,-\frac{1}{\sqrt2}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_2=\left(\frac{1}{\sqrt6},-\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_3=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix},$$

则有

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

[典型错误]

① 不能由 $Ax=\beta$ 有解但不唯一求得 a 的值，其原因是没有掌握好线性方程组解的结构理论.

② 有的考生令 $Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，而此时矩阵 Q 不是正交矩阵.

例 2.5.21 设 A 为 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量，且满足

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3.$$

（Ⅰ）求矩阵 B，使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；

（Ⅱ）求矩阵 A 的特征值；

（Ⅲ）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

［提示］ 本题主要考查矩阵的基本运算，相似矩阵的性质(相似矩阵有相同的特征值)，矩阵的特征值与特征向量的计算以及矩阵对角化的方法．由题设，容易求得矩阵 B．由 A 与 B 相似，要求矩阵 A 的特征值，仅需求矩阵 B 的特征值，最后求可逆矩阵 P 即可．

［解法 1］ (Ⅰ) 由题设条件，有

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix},$$

可知

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的 3 维列向量，可知矩阵 $C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆，所以 $C^{-1}AC=B$，即矩阵 A 与 B 相似．由此可得矩阵 A 与 B 有相同的特征值．

由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0,$$

得矩阵 B 的特征值，也即矩阵 A 的特征值

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=4.$$

(Ⅲ) 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组$(E-B)x=0$，得基础解系

$$\xi_1=(-1,1,0)^{\mathrm T},\ \xi_2=(-2,0,1)^{\mathrm T};$$

对应于 $\lambda_3=4$，解齐次线性方程组$(4E-B)x=0$，得基础解系

$$\xi_3=(0,1,1)^{\mathrm T}.$$

令矩阵

$$Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

则

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

因 $Q^{-1}BQ=Q^{-1}C^{-1}ACQ=(CQ)^{-1}A(CQ)$，记矩阵

$$P=CQ=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$
$$=(-\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3),$$

故 P 即为所求的可逆矩阵．

［解法 2］ (Ⅰ)(Ⅱ) 同解法 1．

(Ⅲ) 由题设，有

$$A(\alpha_1-\alpha_2)=\alpha_1-\alpha_2,A(2\alpha_1-\alpha_3)=2\alpha_1-\alpha_3,A(\alpha_2+\alpha_3)=4(\alpha_2+\alpha_3),$$

从而 $\alpha_1-\alpha_2$，$2\alpha_1-\alpha_3$ 是 A 的属于特征值 1 的两个特征向量，$\alpha_2+\alpha_3$ 是 A 的属于特征值 4 的特征向量．又 $\alpha_1-\alpha_2$，$2\alpha_1-\alpha_3$ 线性无关，从而 $\alpha_1-\alpha_2$，$2\alpha_1-\alpha_3$，$\alpha_2+\alpha_3$ 线性无关，故 $P=(\alpha_1-\alpha_2,2\alpha_1-\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)$ 为所求的可逆矩阵．

［典型错误］ 该题型在历年考题中极少出现，综合性较强，考生犯的错误较多，主要有以下几点：

① 往往求矩阵 B 出错，误认为 $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}$.

② 求得 B 的特征值，并没有指出也是 A 的特征值，导致考生仅求出可逆矩阵 P，使 $P^{-1}BP$ 为对角矩阵，并没有求出满足 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵的可逆矩阵 P.

③ 采用解法 2 的考生，绝大多数没有证明 $P=(\alpha_1-\alpha_2,2\alpha_1-\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)$ 是可逆矩阵，导致丢分.

例 2.5.22 设矩阵 A 与 B 相似，且

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）求 a，b 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

[提示] 本题主要考查矩阵相似的性质及矩阵的特征向量的求法. 矩阵 A 与 B 相似，即它们有相同的特征多项式，由此可求出 a 和 b. 可逆矩阵 P 即为特征根 2 和 b 对应的特征向量构成的矩阵.

[解] （Ⅰ）A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-a\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)[\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1)].$$

由于 $A\sim B$，故 A 与 B 有相同的特征多项式，即 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，于是

$$(\lambda-2)[\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1)]=(\lambda-2)^2(\lambda-b),$$

解得 $a=5$，$b=6$.

（Ⅱ）当 $\lambda=2$ 时，由 $(2E-A)x=0$，求得属于它的特征向量为 $\alpha_1=(1,-1,0)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm T}$.

当 $\lambda=6$ 时，由 $(6E-A)x=0$，求得属于它的特征向量为 $\alpha_3=(1,-2,3)^{\mathrm T}$.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，则有

$$P^{-1}AP=B.$$

[典型错误] 部分考生求 A 的特征多项式出错，进而 a、b 的值出错，导致严重丢分.

例 2.5.23 已知矩阵 A 与 B 相似，其中

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）求 x 与 y；

（Ⅱ）求正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=B$.

[提示] 本题主要考查矩阵相似的性质及利用正交矩阵化实对称矩阵为对角矩阵的方法. 由矩阵 A 与 B 相似，知它们有相同的特征多项式，由此可求出 x 和 y，然后用常规方法求出正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=B$.

[解] （Ⅰ）因 A 与 B 相似，故 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，即

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda&-1\\0&-1&\lambda-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-y&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}.$$

整理得
$$(\lambda-2)(\lambda^2-x\lambda-1)=(\lambda-2)[\lambda^2+(1-y)\lambda-y].$$

比较上式两边 λ 同次幂的系数可得 $x=0$，$y=1$，此时

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）由于 B 是对角矩阵，其特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，而 A 与 B 相似，故它们也是 A 的特征值.

对于特征值 $\lambda_1=2$，由

$$2E-A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

得 A 的属于 $\lambda_1=2$ 的特征向量可取为 $\xi_1=(1,0,0)^{\mathrm T}$.

对于特征值 $\lambda_2=1$，由

$$E-A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得 A 的属于 $\lambda_2=1$ 的特征向量可取为 $\xi_2=(0,1,1)^{\mathrm T}$.

对于特征值 $\lambda_3=-1$，由

$$-E-A=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得 A 的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量可取为 $\xi_3=(0,1,-1)^{\mathrm T}$. 显然，$\xi_1$，$\xi_2$，$\xi_3$ 已正交，再单位化，得

$$\eta_1=(1,0,0)^{\mathrm T},\ \eta_2=\left(0,\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)^{\mathrm T},\ \eta_3=\left(0,\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)^{\mathrm T}.$$

令

$$Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\0&\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix},$$

则 Q 可逆，且有 $Q^{-1}AQ=B$.

例 2.5.24 设 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值. 若 $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(2,1,1)^{\mathrm T}$，$\alpha_3=(-1,2,-3)^{\mathrm T}$都是 A 的属于特征值 6 的特征向量.

（Ⅰ）求 A 的另一特征值和对应的特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 A.

[提示] 本题主要考查实对称矩阵对角化的逆问题，即由 A 的特征值和特征向量，如何求 A. 本题不仅要求考生知道实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交这一事实，还要求考生能够正确地求解可逆矩阵的逆矩阵. 由 $r(A)=2$，可知 A 的另一特征值为 $\lambda_3=0$. 由实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交，求出属于特征值 0 的特征向量，于是可求出矩阵 A. 也可以根据特征向量的定义以及矩阵的迹等于特征值之和求 A.

[解法 1] （Ⅰ）由 $r(A)=2$，知 $|A|=0$，所以 A 的另一特征值 $\lambda_3=0$. 由题设知 $\alpha_1=(1,1,0)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(2,1,1)^{\mathrm T}$为 A 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量. 设属于 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm T}$. 则有 $\alpha_1^{\mathrm T}\alpha=0$，$\alpha_2^{\mathrm T}\alpha=0$，即

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\2x_1+x_2+x_3=0,\end{cases}$$

解得此方程组的基础解系为$(-1,1,1)^{\mathrm T}$，即 A 的属于特征值 $\lambda_3=0$ 的全部特征向量为

$$k\alpha=k(-1,1,1)^{\mathrm T}\quad(k\text{ 为任意非零常数}).$$

（Ⅱ）令矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix},$$

所以

$$A=P\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}.$$

［解法 2］ 由 $r(A)=2$，知 $|A|=0$，所以 A 的另一特征值 $\lambda_3=0$．设

$$A=\begin{pmatrix}a&d&e\\d&b&f\\e&f&c\end{pmatrix},$$

由 $A\alpha_i=6\alpha_i$，$i=1$，2 以及 $a+b+c=12$，建立方程组，可以求出 A，然后再求属于 0 的特征向量．

［典型错误］

① 采用解法 1 的考生，往往不知道实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交这一事实，从而不能求出属于特征值 0 的特征向量．

② 采用解法 2 的考生往往丢掉方程 $a+b+c=12$．从而不能够求出 A，导致丢分．

③ 求 P^{-1}时出现计算错误．

例 2.5.25 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值是 1，2，3；矩阵 A 的属于特征值 1，2 的特征向量分别是 $\alpha_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$．

（Ⅰ）求 A 的属于特征值 3 的特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 A．

［提示］ 本题主要考查实对称矩阵对角化的逆问题．即由矩阵 A 的特征值和特征向量如何求 A．利用实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量均正交，可求得 A 的属于特征值 3 的特征向量．设为 α_3，记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，有 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，故 $A=P\Lambda P^{-1}$．

［解］（Ⅰ）设 A 的属于特征值 3 的特征向量为

$$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}.$$

因为实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量相互正交，所以

$$\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_3=0 \text{ 和 } \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_3=0.$$

即 x_1，x_2，x_3 是齐次线性方程组

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0,\\x_1-2x_2-x_3=0\end{cases}$$

的非零解，解得其基础解系为$(1,0,1)^{\mathrm{T}}$．

因此 A 的属于特征值 3 的特征向量为

$$\alpha_3=k\,(1,0,1)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意非零常数.

(Ⅱ) 令矩阵

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

故

$$A=P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{pmatrix}.$$

[典型错误] 有相当一部分考生无法求矩阵 A 的属于特征值 3 的特征向量. 其原因是没有掌握好实对称矩阵的性质：实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量正交. 建议考生掌握一些基本的结论.

例 2.5.26 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$, $\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(Ⅰ) 求 A 的特征值与特征向量；

(Ⅱ) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ, 使得 $Q^TAQ=\Lambda$；

(Ⅲ) 求 A 及 $\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

[提示] 本题主要考查实对称矩阵对角化的逆问题. 由 α_1, α_2 是线性方程组 $Ax=0$ 的解, 知 α_1, α_2 是属于 0 的特征向量. 又由 A 的各行元素之和为 3, 知 $(1,1,1)^T$ 是 A 的属于 3 的特征向量. 于是 A 的所有的特征值、特征向量均求出. 从而本题就成为一个常规题了.

[解法 1] (Ⅰ) 由于矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 所以

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

因为 $A\alpha_1=0$, $A\alpha_2=0$, 即

$$A\alpha_1=0\alpha_1,\ A\alpha_2=0\alpha_2,$$

故 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 是 A 的二重特征值, α_1, α_2 为 A 的属于特征值 0 的两个线性无关的特征向量；$\lambda_3=3$ 是 A 的一个特征值, $\alpha_3=(1,1,1)^T$ 为 A 的属于特征值 3 的特征向量.

总之, A 的特征值为 0, 0, 3. 属于特征值 0 的全体特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ (k_1, k_2 不全为零), 属于特征值 3 的全体特征向量为 $k_3\alpha_3$ ($k_3\neq 0$).

(Ⅱ) 对 α_1, α_2 正交化. 令 $\xi_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^T$,

$$\xi_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\xi_1)}{(\xi_1,\xi_1)}\xi_1=\frac{1}{2}(-1,0,1)^T,$$

再分别将 ξ_1, ξ_2, α_3 单位化, 得

$$\beta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)^T,$$

$$\beta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,$$

$$\beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T.$$

令

$$Q=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix},$$

那么 Q 为正交矩阵，且 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$.

(Ⅲ) 因 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$，且 Q 为正交矩阵，故 $A=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，

$$A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

由 $A=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，得 $A-\frac{3}{2}E=Q\left(\Lambda-\frac{3}{2}E\right)Q^{\mathrm{T}}$，所以

$$\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6=Q\left(\Lambda-\frac{3}{2}E\right)^6Q^{\mathrm{T}}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^6E.$$

[解法 2] 因 A 是 3 阶实对称矩阵，故设

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & d & e\\ c & e & f\end{pmatrix}.$$

由 $A\boldsymbol{\alpha}_1=A\boldsymbol{\alpha}_2=0$，得

$$\begin{cases}b=c,\\ d=e,\\ e=f,\\ -a+2b-c=0,\\ -b+2d-e=0,\\ -c+2e-f=0.\end{cases}$$

解得 $a=b=c=d=e=f$. 从而

$$A=\begin{pmatrix}a & a & a\\ a & a & a\\ a & a & a\end{pmatrix}.$$

又 A 的每行元素之和为 3，即 $3a=3$，故 $a=1$. 从而

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

再用常规方法求 A 的特征值、特征向量以及 Q 与 Λ.

[典型错误]

① 不能由 A 的各行元素之和为 3 推出$(1,1,1)^T$ 是 A 的属于特征值 3 的特征向量.

② 不能由 α_1，α_2 是线性方程组 $Ax=0$ 的解，得到 α_1，α_2 是 A 的属于特征值 0 的特征向量.

③ 求 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$时出错，要么没有正交化，要么没有单位化.

④ 多数考生能够求出 A，但不会求$\left(A-\frac{1}{2}E\right)^6$.

⑤ 采用解法 2 的考生，因计算量大，常常出现计算错误.

例 2.5.27　设 A，B 为同阶方阵，

(Ⅰ) 如果 A，B 相似，试证 A，B 的特征多项式相等；

(Ⅱ) 举一个 2 阶方阵的例子说明(Ⅰ)的逆命题不成立；

(Ⅲ) 当 A、B 均为实对称矩阵时，试证(Ⅰ)的逆命题成立.

[提示]　本题主要考查同阶方阵相似的定义，相似的必要非充分条件及两个实对称矩阵相似的充分必要条件.

[证]　(Ⅰ) 若 $A\sim B$，那么存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$，故

$$\begin{aligned}|\lambda E-B|&=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}\lambda EP-P^{-1}AP|\\&=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|P^{-1}||\lambda E-A||P|\\&=|P^{-1}||P||\lambda E-A|=|\lambda E-A|,\end{aligned}$$

即 A、B 的特征多项式相等.

(Ⅱ) 令 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，那么

$$|\lambda E-A|=\lambda^2=|\lambda E-B|,$$

但 A，B 不相似. 否则，存在可逆矩阵 P，使

$$P^{-1}AP=B=O,$$

从而 $A=POP^{-1}=O$，矛盾.

(Ⅲ) 由 A，B 均为实对称矩阵知，A，B 均相似于对角阵. 若 A，B 的特征多项式相等，记特征多项式的根为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则有

$$A\sim\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

$$B\sim\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

即存在可逆矩阵 P，Q 使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}=Q^{-1}BQ,$$

于是

$$(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1})=B.$$

由 PQ^{-1}为可逆矩阵知，A 与 B 相似.

[典型错误]

① 有的考生对(Ⅰ)采取如下证法：由 $A\sim B$. 知 A 与 B 有相同的特征值，故 A 与 B 有相同的特征多项式. 这是一种循环证明.

② 不少考生举例说明矩阵 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ 不相似，事实上，这是两个相似的矩阵.

例 2.5.28　设 A 为 n 阶矩阵，λ_1 和 λ_2 是 A 的两个不同的特征值，ξ_1，ξ_2 分别是 A 的对应于 λ_1，λ_2 的特征向量，证明 $\xi_1+\xi_2$ 不是 A 的特征向量.

[提示]　本题主要考查矩阵特征值、特征向量的概念和属于不同特征值的特征向量线性无关这一知识点. 利用反证法可证明本题.

[证]　由 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1$，$A\xi_2=\lambda_2\xi_2$，有

$$A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2.$$

若 $\xi_1+\xi_2$ 是 A 的特征向量，则应存在数 λ，使

$$A(\xi_1+\xi_2)=\lambda(\xi_1+\xi_2)=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2,$$

从而 $\lambda\xi_1+\lambda\xi_2=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2$，即

$$(\lambda-\lambda_1)\xi_1+(\lambda-\lambda_2)\xi_2=0.$$

因为 ξ_1，ξ_2 线性无关，所以 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$，这与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾. 因此，$\xi_1+\xi_2$ 不是 A 的特征向量.

[典型错误]　本题属于抽象的证明题，部分考生无法下手解题.

例 2.5.29　设 λ_0 为可逆矩阵 A 的一个特征值. 证明 $\lambda_0\neq0$，且 $\frac{1}{\lambda_0}$ 是 A 的逆矩阵 A^{-1} 的一个特征值，$\frac{|A|}{\lambda_0}$ 是 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值.

[提示]　本题考查的主要知识点有：矩阵的特征值、特征向量，矩阵与其伴随矩阵之间的关系等.

[证]　设 $\xi_0\neq0$ 是 A 的对应于特征值 λ_0 的特征向量，则有

$$A\xi_0=\lambda_0\xi_0. \qquad (*)$$

若 $\lambda_0=0$，则(*)式为 $A\xi_0=0$，且 $\xi_0\neq0$，这就是说，线性方程组 $Ax=0$ 有非零解 ξ_0，故 $|A|=0$，与 A 可逆矛盾. 因此 $\lambda_0\neq0$.

由(*)式可得 $A^{-1}\xi_0=\frac{1}{\lambda_0}\xi_0$，故 $\frac{1}{\lambda_0}$ 是 A^{-1} 的一个特征值. 又因 $A^*=|A|A^{-1}$，故有

$$A^*\xi_0=|A|A^{-1}\xi_0=\frac{|A|}{\lambda_0}\xi_0.$$

从而 $\frac{|A|}{\lambda_0}$ 是 A^* 的一个特征值.

[典型错误]　部分考生因没有掌握公式 $A^*A=|A|E$，无法证明 $\frac{|A|}{\lambda_0}$ 是 A^* 的一个特征值.

六、二次型

• 考试内容与要求 •

考试内容

二次型及其矩阵表示　合同变换与合同矩阵　二次型的秩　惯性定理　二次型的标准形和规范形　用正交变换和配方法化二次型为标准形　二次型及其矩阵的正定性

考试要求

1. 了解二次型的概念，会用矩阵形式表示二次型，了解合同变换和合同矩阵的概念.