第三部分　概率论与数理统计

一、随机事件和概率

事件、概率是概率论中的两个基本概念．这部分的主要内容有：

(1) 了解随机试验、样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握随机事件的关系和运算．

(2) 理解事件的概率与条件概率的概念．

(3) 理解事件独立性的概念，理解独立重复试验的概念．

(4) 掌握事件概率的基本性质和基本公式以及条件概率的计算方法，会利用独立性、概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式计算事件的概率．

·考试内容与要求·

考试内容

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完备事件组　概率的概念　概率的基本性质　古典型概率　几何型概率　条件概率　概率的基本公式　事件的独立性　独立重复试验

考试要求

1．了解样本空间(基本事件空间)的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算．

2．理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式等．

3．理解事件的独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法．

·考试内容解析·

(一) 随机事件与样本空间

1．基本概念

必然现象——在一定条件下必然出现的现象；随机现象——在一定条件下可能出现也可能不出现的现象；随机试验——随机现象的观测；事件——随机试验的结果；必然事件——在试验中一定出现的结果，记作 Ω；不可能事件——在试验中一定不会出现的结果，记作 $\varnothing$；随机事件——在试验中可能出现也可能不出现的结果，常用大写拉丁字母 A，B，C，…表示，有时也用{…}表示事件，其内容用文字或式子描述；基本事件(样本点)——试验最基本的结果；样本空间(基本事件空间)——所有基本事件的集合，常用 Ω 表示．

样本空间 Ω 中的元素是随机试验的可能结果，记作 ω．在一次试验中，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，称事件 A 发生．显然 Ω 为必然事件，$\varnothing$ 为不可能事件．

2．事件的关系和运算

事件间的关系有：包含、相等、不相容和对立；事件间的运算有：并(和)、差、交等．

(1) 包含：如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$．

(2) 相等：如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$．

(3) 不相容：如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 互不相容．

(4) 对立：在每次试验中，如果事件 A 和事件 B 必有一个发生，且仅有一个发生，则称事件 A 和事件 B 为对立事件或互补事件．事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$．两个互相对立的事件 A 和 $\overline{A}$ 一定为不相容事件，但是两个不相容事件未必是对立事件．

(5) 并(和)：如果事件 A 和事件 B 至少有一个发生，则称这样的事件为事件 A 与事件 B 的并(和)，记作

$A\bigcup B$ 或 $A+B$.

(6) 差：如果事件 A 发生而事件 B 不发生，则称这样的事件为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$ 或 $A\setminus B$.

(7) 交：如果事件 A 与事件 B 同时发生，则称这样的事件为事件 A 与事件 B 的交，记作 $A\bigcap B$ 或 AB.

(8) 完全事件组：如果事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 两两互不相容，且每次试验必出现且只出现一个，则称 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 构成完全事件组．完全事件组可以是有限的，也可以是可数的．完全事件组也称为样本空间 Ω 的一个划分．

从以上关系和运算可知：如果事件 A 与事件 B 不相容，则 $AB=\varnothing$；如果事件 A 与事件 B 对立，则 $AB=\varnothing$，且 $A+B=\Omega$.

3．事件运算的性质

对于任意事件 A，B，C，A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$，有：

(1) 交换律：$A+B=B+A$；$AB=BA$.

(2) 结合律：$A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C$；$ABC=A(BC)=(AB)C$.

(3) 分配律：$A(B+C)=AB+AC$；$A(B-C)=AB-AC$；$A\left(\bigcup_i A_i\right)=\bigcup_i A_iA$.

(4) 对偶律：$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$；$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$；$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \overline{A_i}$；$\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \overline{A_i}$.

4．事件与集合

由于事件是样本空间的子集，因此事件的关系与运算可以用集合的文氏图形象地表示出来，如图 3.1.1 所示．

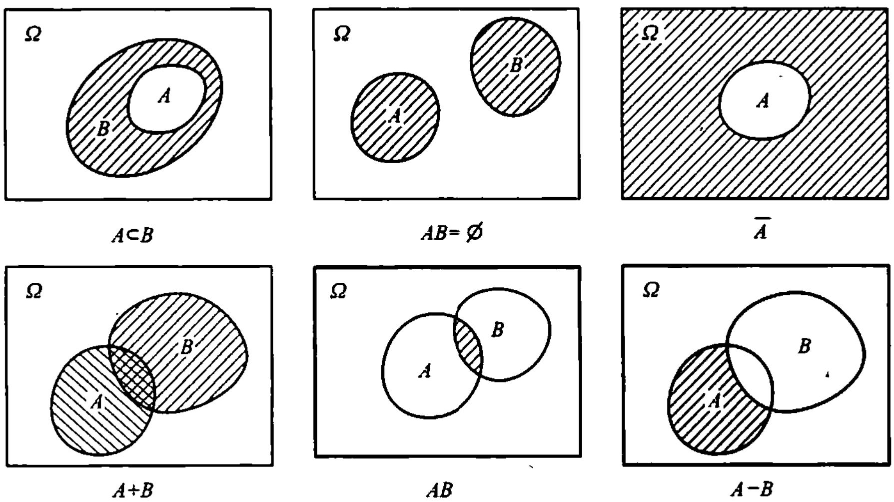

图 3.1.1

（二）事件的概率

概率是事件出现可能性大小的度量，用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率．如用$\{\cdots\}$表示事件，其中大括号内用文字或式子描述事件的内容，则以 $P\{\cdots\}$ 表示其概率．

1．概率的概念

在一个随机试验中，对于每一个事件 A，都有唯一的实数 $P(A)$ 和它对应，且 $P(A)$ 是满足下列条件的事件 A 的函数：

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性：对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$.

(3) 可列可加性：对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

概率 $P(A)$是事件 A 发生可能性大小的数值度量，它与长度、面积、体积等是同一类概念，即它们都是度量.

2. 概率的基本性质

(1) $P(\varnothing)=0$.

(2) 有限可加性：设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3) 对于两个事件 A 与 B，如果 $A \subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

可知 $P(\Omega)=1$，$P(\bar{A})=1-P(A)$.

3. 古典型概率

如果一个随机试验的结果只有有限个，且每个结果出现的概率都相同，则称这样的试验为古典型概率. 对于此类试验中的事件 A，其概率可以如下计算：

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所包含的样本点数}}{\text{样本空间中样本点数}}.$$

4. 几何型概率

如果随机试验的样本空间 Ω 是一个区域，并且任一点落在任意两个长度(或面积、体积)相同的子区域内是等可能的，则事件 A 的概率为：

$$P(A)=\frac{A\text{ 的长度(或面积、体积)}}{\Omega\text{ 的长度(或面积、体积)}}.$$

5. 条件概率

对于任意两个事件 A 和 B，其中 $P(A)>0$，则事件 B 在事件 A 发生的条件下的条件概率定义为：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

可以验证，对于给定的事件 A，条件概率 $P(B|A)$具有概率的一切性质.

6. 计算概率的几个公式

(1) 加法公式：对于任意事件 A，B，C，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-[P(AB)+P(AC)+P(BC)]+P(ABC).$$

上式可以推广到多个事件的情形，即为一般的加法公式.

(2) 减法公式：对于任意两个事件 A，B，有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

(3) 乘法公式：对于任意事件 A，B，若 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A).$$

对于 n $(n\geqslant 2)$个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若 $P(A_1\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot\cdots\cdot P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}).$$

(4) 全概率公式：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是一个完全事件组，且 $P(A_i)>0$，则对于任意事件 A，有

$$P(A)=\sum_i P(AA_i)=\sum_i P(A_i)P(A|A_i).$$

(5) 贝叶斯公式：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是一个完全事件组，且 $P(A_i)>0$，则对于任意事件 A $(P(A)>0)$，有

$$P(A_i|A)=\frac{P(AA_i)}{P(A)}=\frac{P(A_i)\cdot P(A|A_i)}{\sum\limits_k P(A_k)\cdot P(A|A_k)},\quad i=1,2,\cdots.$$

(三) 事件的独立性与独立重复试验

1. 独立事件

(1) 两个事件独立：对于两个事件 A 与 B，如果 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，则称事件 A 与 B 独立.

如果事件 A 与 B 独立，则事件 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也独立.

(2) 多个事件相互独立：对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任两个事件均相互独立，即对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),$$

则称 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 两两独立；如果其中任何 k $(2\leqslant k\leqslant n)$个事件：$A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$ $(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，均有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdot\cdots\cdot P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

2. 独立试验

(1) 独立试验：两个或两个以上试验为相互独立的，如果与各试验相联系的事件之间相互独立.

(2) 独立重复试验：在两个或多个独立试验中，如果同一事件在各个试验中出现的概率相同，则称它们是独立重复试验.

(3) 伯努利试验：如果试验结果只有 A 与 $\overline{A}$ 两个结果，则称之为伯努利试验. 将一伯努利试验独立重复进行 n 次，则称为 n 重伯努利试验. 设在每次试验中 $P(A)=p$ $(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中，事件 A 出现 k $(0\leqslant k\leqslant n)$次的概率为

$$b(k;n,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

此公式称为二项概率公式.

•例 题 详 解•

例 3.1.1 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球. 今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是________.

[答案] $\frac{2}{5}$.

[提示] 本题主要考查古典型概率的计算、全概率公式的应用及抽签原理.

第一个人从袋中取得黄球的概率为$\frac{2}{5}$，如将此球放回袋中，则第二个人取得黄球的概率仍为$\frac{2}{5}$. 如将第一个人取得的黄球不放回袋中，则由“抽签原理”可知，第二个人取得黄球的概率仍为$\frac{2}{5}$. 如不清楚“抽签原理”，则可以利用全概率公式求得结果.

[解法 1] 由“抽签原理”立刻可知第二个抽得黄球的概率仍为$\frac{2}{5}$.

[解法 2] 设

$$A=\{第一个人取出的是黄球\},$$
$$B=\{第一个人取出的是白球\},$$
$$C=\{第二个人取出的是黄球\},$$

则
$$P(A)=\frac{2}{5},\ P(B)=\frac{3}{5},\ P(C|A)=\frac{19}{49},\ P(C|B)=\frac{20}{49}.$$

由全概率公式知

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{19}{49} + \frac{3}{5} \times \frac{20}{49} = \frac{2}{5}.$$

［典型错误］ 不知道“抽签原理”，也不会全事件划分，而是直接把第一个人取得的球去掉后，求第二个人取得黄球的概率为$\frac{19}{49}$.

例 3.1.2　设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为$\frac{1}{9}$．A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等．则 $P(A)=$ ________.

［答案］ $\frac{2}{3}$.

［提示］ 本题主要考查事件的独立性及事件的运算法则，应注意独立与不相容是两个不同的概念.

［解］ 根据题意．事件 A，B 相互独立．且 $P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}$，$P(\bar{A}B)=P(\bar{B}A)$．根据 A 与 B 的相互独立性及$P(\bar{A}B)=P(\bar{B}A)$，有$P(\bar{A})P(B)=P(\bar{B})P(A)$，即$[1-P(A)]P(B)=[1-P(B)]P(A)$，化简得 $P(A)=P(B)$．因而 $P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=[1-P(A)]^2$．而 $P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}$．故 $P(A)=\frac{2}{3}$.

［典型错误］ 误认为独立性与不相容是相同的含义．从而有部分考生如下计算：

$$\frac{1}{9} = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = 1 - 2P(A).$$

于是 $P(A)=\frac{4}{9}$.

例 3.1.3　从数 1，2、3、4 中任取一个数，记为 X，再从 1，$\cdots$，X 中任取一个数，记为 Y，则 $P\{Y=2\}=$ ________.

［答案］ $\frac{13}{48}$.

［提示］ 本题主要考查全概率公式及必然事件的划分．根据题意．X 可能的取值为 1，2，3、4 中的任一个且必居其一，于是可以按 X 的取值把必然事件做一个划分，即 $\Omega=\{X=1\}\cup\{X=2\}\cup\{X=3\}\cup\{X=4\}$.

［解］ 按题意．X 的取值为 1，2，3，4 中的一个且必居其一，于是有如下的划分：

$$\Omega = \{X=1\} \cup \{X=2\} \cup \{X=3\} \cup \{X=4\},$$

且这四个事件的概率均为$\frac{1}{4}$.

另外．由题意知

$$P\{Y=k \mid X=m\} = \frac{1}{m} \quad (k=1,2,\cdots,m;\ m=1,2,3,4),$$
$$P\{Y=k \mid X=m\} = 0 \quad (k>m;\ m=1,2,3,4),$$

于是

$$P\{Y=2\} = P\{X=1\}P\{Y=2 \mid X=1\} + P\{X=2\}P\{Y=2 \mid X=2\}$$
$$+ P\{X=3\}P\{Y=2 \mid X=3\} + P\{X=4\}P\{Y=2 \mid X=4\}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{13}{48}.$$

例 3.1.4　设 A，B 是任意两个随机事件，则 $P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\}=$ ________.

［答案］ 0.

［提示］ 本题主要考查随机事件的基本运算.

［解］ 因为

$$(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})$$
$$= (\bar{A}+B)(A+\bar{B})(A+B)(\bar{A}+\bar{B})$$
$$= (\bar{A}A + \bar{A}\bar{B} + BA + B\bar{B})(A\bar{A} + A\bar{B} + B\bar{A} + B\bar{B})$$

$$
\begin{aligned}
&= (\bar{A}\bar{B}+BA)(A\bar{B}+B\bar{A}) \\
&= \bar{A}\bar{B}A\bar{B}+\bar{A}\bar{B}B\bar{A}+BAA\bar{B}+BAB\bar{A} \\
&= \varnothing,
\end{aligned}
$$

所以
$$P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\}=0.$$

［典型错误］ 展开$(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})$不小心而出错.

例 3.1.5　对于任意两个事件 A 和 B，(　　).

(A) 若 $AB\neq\varnothing$，则 A，B 一定独立　　(B) 若 $AB\neq\varnothing$，则 A，B 有可能独立

(C) 若 $AB=\varnothing$，则 A，B 一定独立　　(D) 若 $AB=\varnothing$，则 A，B 一定不独立

［答案］ (B).

［提示］ 本题主要考查事件的不相容与独立性之间的关系.

［解］ 如果事件 A，B 互不相容，则不能断定 A，B 一定相互独立或不独立，则选项(A)、(C)、(D)未必成立，故选(B).

［典型错误］ 误认为不相容必不独立.

例 3.1.6　对于任意二事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是(　　).

(A) $A\subset B$　　(B) $\bar{B}\subset\bar{A}$　　(C) $A\bar{B}=\varnothing$　　(D) $\bar{A}B=\varnothing$

［答案］ (D).

［提示］ 本题主要考查事件的基本运算. 通过文氏图可以很容易得到正确答案.

［解］ 从事件的运算来看，$A\cup B=B$ 意味着 $A\subset B$. 而前三个选项均是此命题的另一种写法，故只有选项(D)是正确的.

［典型错误］ 误认为本题要选的是与 $A\cup B=B$ 等价的结论.

例 3.1.7　设 A，B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B|A)=P(B|\bar{A})$，则必有(　　).

(A) $P(A|B)=P(\bar{A}|B)$　　(B) $P(A|B)\neq P(\bar{A}|B)$

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$

［答案］ (C).

［提示］ 本题主要考查条件概率及事件的基本运算.

［解］ 由条件概率公式以及条件 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$，知

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}.$$

所以
$$
\begin{aligned}
P(AB)[1-P(A)] &= P(A)P(\bar{A}B) \\
&= P(A)[P(B)-P(AB)],
\end{aligned}
$$

所以
$$P(AB)=P(A)P(B),$$

因此，(C)为正确选项.

［典型错误］ 误认为由 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$可推出选项(A).

例 3.1.8　设 A，B，C 是三个相互独立的随机事件，且 $0<P(C)<1$，则在下列给定的四对事件中不相互独立的是(　　).

(A) $\overline{A+B}$与C　　(B) $\overline{AC}$与$\bar{C}$　　(C) $\overline{A-B}$与$\bar{C}$　　(D) $\overline{AB}$与$\bar{C}$

［答案］ (B).

［提示］ 本题主要考查随机事件相互独立的概念及性质. 对于两个相互独立的事件，其逆事件也是相互独立的，故此题中的(A)、(C)、(D)均不符合要求.

［解］ 由于 A，B，C 是三个相互独立的随机事件，故其中任意两个事件的和、差、交、并、逆与另一个事件或其逆是相互独立的，根据这一性质，选项(A)、(C)、(D)中的两事件是相互独立的，因而均为干扰项.

［典型错误］ 从四个选项的结构看，只有(A)是考查事件 C 而其余三个考查事件$\bar{C}$，故部分同学错误地选

了(A).

例 3.1.9 在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电. 以 E 表示事件"电炉断电"，而 $T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于(   ).

(A) $\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$　　(B) $\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$　　(C) $\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$　　(D) $\{T_{(4)} \geqslant t_0\}$

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查事件等价的条件.

[解] "电炉断电"这一事件 E 发生意味着 4 个温控器至少有两个显示的温度值大于或等于 t_0，即若将 4 个温控器上的值 t_1，t_2，t_3，t_4 从小到大排序的话，排在第 3 的温度值一定大于或等于 t_0. 于是 $E = \{T_{(3)} \geqslant t_0\}$.

例 3.1.10 设 A，B，C 三个事件两两独立，则 A，B，C 相互独立的充分必要条件是(   ).

(A) A 与 BC 独立　　(B) AB 与 $A \cup C$ 独立

(C) AB 与 AC 独立　　(D) $A \cup B$ 与 $A \cup C$ 独立

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查三个事件相互独立的条件. 三个事件 A，B，C 相互独立有两个条件：①两两相互独立；②$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

[解] 显然，在 A，B，C 三个事件两两独立的前提下，A，B，C 相互独立的充要条件是选项(A)，因为若 A 与 BC 独立，则

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(BC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

故 A，B，C 相互独立，反之亦然. 其余各项都无法推出以上结果.

[典型错误] 不理解多个事件相互独立的条件.

例 3.1.11 设 A，B 是任意两个事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1，证明

$$P(B|A) = P(B|\bar{A})$$

是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

[提示] 本题主要考查条件概率、事件的独立性. 在证明充分性时，可以利用事件独立性的定义；在证明必要性时，则要应用下面的结论：如果事件 A 与 B 相互独立，则事件 $\bar{A}$ 与 B，A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 均是相互独立的.

[证] 由于 A 的概率不等于 0 和 1，故题中两个条件概率都存在.

必要性. 由事件 A 与 B 独立，知事件 $\bar{A}$ 与 B 也独立，因此 $P(B|A) = P(B)$，$P(B|\bar{A}) = P(B)$. 从而

$$P(B|A) = P(B|\bar{A}).$$

充分性. 由 $P(B|A) = P(B|\bar{A})$，可知

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)},$$

$$P(AB) - P(A)P(AB) = P(A)P(B) - P(A)P(AB),$$

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

因此 A 和 B 独立.

[典型错误] 不会利用事件 A 与 B 独立性的定义及其性质.

例 3.1.12 设有来自 3 个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.

(Ⅰ) 求先抽到的一份是女生表的概率 p；

(Ⅱ) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q.

[提示] 本题主要考查条件概率及全概率公式. 首先定义事件，再利用全概率公式即可求得 p 与 q.

[解] 设 $H_i = \{$报名表是第 i 区考生的$\}$ $(i = 1,2,3)$，$A_j = \{$第 j 次抽到的报名表是男生表$\}$ $(j = 1,2)$，则

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3},$$

$$P(A_1|H_1)=\frac{7}{10},\ P(A_1|H_2)=\frac{8}{15},\ P(A_1|H_3)=\frac{20}{25}.$$

（Ⅰ）$p=P(\overline{A}_1)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}|H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}.$

（Ⅱ）由全概率公式得

$$P(A_2|H_1)=\frac{7}{10},\ P(A_2|H_2)=\frac{8}{15},\ P(A_2|H_3)=\frac{20}{25},$$

$$P(\overline{A_1}A_2|H_1)=\frac{7}{30},\ P(\overline{A_1}A_2|H_2)=\frac{8}{30},\ P(\overline{A_1}A_2|H_3)=\frac{5}{30},$$

$$P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_2|H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90},$$

$$P(\overline{A_1}A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}A_2|H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}\right)=\frac{2}{9},$$

因此 $$q=P(\overline{A}_1|A_2)=\frac{P(\overline{A}_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\frac{20}{61}.$$

[典型错误] 在计算 q 时，不会计算各条件概率及对“抽签原理”不熟悉.

二、随机变量及其分布

随机变量及其概率分布是概率论中的重要概念．这两个概念的引入，就使随机事件及其概率的研究数量化．这部分的主要内容有：

(1) 理解随机变量的概率分布函数的概念及其性质，掌握离散型概率分布，连续型概率密度，分布函数的概念和性质，会根据概率分布计算有关事件的概率.

(2) 掌握下面的概率分布：0－1分布，二项分布，几何分布，超几何分布，泊松分布，均匀分布，正态分布和指数分布等，包括分布的表达式、性质和数字特征等.

(3) 会求随机变量函数的分布.

·考试内容与要求·

考试内容

随机变量　随机变量分布函数的概念及其性质　离散型随机变量的概率分布　连续型随机变量的概率密度　常见随机变量的分布　随机变量函数的分布

考试要求

1．理解随机变量的概念，理解分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

的概念及性质，会计算与随机变量相联系的事件的概率.

2．理解离散型随机变量及其概率分布的概念，掌握0－1分布、二项分布、几何分布、超几何分布、泊松分布及其应用.

3．掌握泊松定理的结论和应用条件，会用泊松分布近似表示二项分布.

4．理解连续型随机变量及其概率密度的概念，掌握均匀分布、正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$、指数分布及其应用，其中参数为 $\lambda\ (\lambda>0)$ 的指数分布的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

5．会求随机变量函数的分布.