$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3},$$

$$P(A_1|H_1)=\frac{7}{10},\ P(A_1|H_2)=\frac{8}{15},\ P(A_1|H_3)=\frac{20}{25}.$$

（Ⅰ）$p=P(\overline{A}_1)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}|H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}.$

（Ⅱ）由全概率公式得

$$P(A_2|H_1)=\frac{7}{10},\ P(A_2|H_2)=\frac{8}{15},\ P(A_2|H_3)=\frac{20}{25},$$

$$P(\overline{A_1}A_2|H_1)=\frac{7}{30},\ P(\overline{A_1}A_2|H_2)=\frac{8}{30},\ P(\overline{A_1}A_2|H_3)=\frac{5}{30},$$

$$P(A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A_2|H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90},$$

$$P(\overline{A_1}A_2)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(\overline{A_1}A_2|H_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{30}+\frac{8}{30}+\frac{5}{30}\right)=\frac{2}{9},$$

因此
$$q=P(\overline{A}_1|A_2)=\frac{P(\overline{A}_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{61}{90}}=\frac{20}{61}.$$

[典型错误] 在计算 q 时，不会计算各条件概率及对“抽签原理”不熟悉．

二、随机变量及其分布

随机变量及其概率分布是概率论中的重要概念．这两个概念的引入，就使随机事件及其概率的研究数量化．这部分的主要内容有：

(1) 理解随机变量的概率分布函数的概念及其性质，掌握离散型概率分布，连续型概率密度，分布函数的概念和性质，会根据概率分布计算有关事件的概率．

(2) 掌握下面的概率分布：0-1分布，二项分布，几何分布，超几何分布，泊松分布，均匀分布，正态分布和指数分布等，包括分布的表达式、性质和数字特征等．

(3) 会求随机变量函数的分布．

·考试内容与要求·

考试内容

随机变量　随机变量分布函数的概念及其性质　离散型随机变量的概率分布　连续型随机变量的概率密度　常见随机变量的分布　随机变量函数的分布

考试要求

1．理解随机变量的概念，理解分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

的概念及性质，会计算与随机变量相联系的事件的概率．

2．理解离散型随机变量及其概率分布的概念，掌握0-1分布、二项分布、几何分布、超几何分布、泊松分布及其应用．

3．掌握泊松定理的结论和应用条件，会用泊松分布近似表示二项分布．

4．理解连续型随机变量及其概率密度的概念，掌握均匀分布、正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$、指数分布及其应用，其中参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

5．会求随机变量函数的分布．

·考试内容解析·

（一）随机变量及其概率分布

1. 基本概念

（1）随机变量：顾名思义，随机变量即为会随机改变的量，它是基本事件(样本点)的函数，常以大写拉丁字母，如 $X,Y,\cdots$ 表示．为了清楚表明它是基本事件的函数，也常用 $X(\omega)$ $(\omega\in\Omega)$表示随机变量．

（2）概率分布：随机变量 X 的概率分布，指 X 的"一切可能值的集合"及它取各可能值或在值域内各部分取值的"概率"二者的总称．

（3）分布函数：对于随机变量 X 和任意实数 x，称函数 $F(x)=P\{X\leqslant x|x\in\mathbf{R}\}$ 为随机变量 X 的分布函数．它在点 x 处的值是事件 $\{X\leqslant x\}$ 的概率．即 X 在 $(-\infty,x]$ 上取值的概率．

2. 分布函数的性质

随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 有如下性质：

（1）$F(x)$ 是一个单调不减的函数．

（2）$F(x)$ 右连续，即对任意的 $x\in\mathbf{R}$．有 $F(x)=F(x+0)=\lim\limits_{t\to x^+}F(t)$．

（3）$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$．

（二）离散型随机变量

1. 离散型随机变量及其概率分布

如果一个随机变量的一切可能的取值为有限个或可列无穷多个，则称它为离散型随机变量．

设 X 是一离散型随机变量，其一切可能值为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，且 X 取各值的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots,$$

其中 $p_k\geqslant 0\ (k=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$，则称上式为 X 的概率分布，常记为

$$X\sim\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots\end{pmatrix}.$$

对于任意实数 $a<b$，有

$$P\{a\leqslant X\leqslant b\}=\sum_{a\leqslant x_k\leqslant b}P\{X=x_k\},$$

其中 $\sum$ 表示对于满足 $a\leqslant x_k\leqslant b$ 的一切 $\{X=x_k\}$ 发生的概率求和．

2. 常用的离散型概率分布

（1）0－1分布：设随机变量 X 只可能取 0 和 1 两个值，它的概率分布为

$$P\{X=0\}=1-p,\ P\{X=1\}=p\quad(0<p<1),$$

也可写成

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,\ 1,\ p\in(0,1),$$

则称 X 服从 0－1 分布．

（2）二项分布：设事件 A 在任一次试验中出现的概率为 p $(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数 k 可能的取值为 $0,1,2,\cdots,n$，且它的概率分布为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n,$$

则称 X 服从参数为 n，p 的二项分布，记为 $X\sim B(n,p)$．

（3）几何分布：如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\ 0<p<1,\ k=1,2,\cdots.$$

则称 X 服从几何分布．

（4）超几何分布：如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ k=0,1,\cdots,n,$$

其中 N，M，n 均为正整数．且 $M\leqslant N$，$n\leqslant N$，则称 X 服从参数为 N．M，n 的超几何分布．

(5) 泊松分布：如果随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda>0,\ k=0,1,2,\cdots,$$

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim P(\lambda)$．

3．几个分布之间的关系

(1) 二项分布与超几何分布：当 N 和 M 充分大，而 n 相对 N 较小时，超几何分布与二项分布有如下的近似：

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\approx\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}.$$

(2) 二项分布与 0－1 分布：如果随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且都服从 0－1 分布，则 $X=X_1+\cdots+X_n$ 服从二项分布 $B(n,p)$．

(3) 二项分布与泊松分布：如果 X 服从二项分布 $B(n,p)$，且 n 充分大($n\geqslant100$)，p 充分小($p<0.1$)，而 np 适中，则有如下的近似公式：

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-np},\ k=0,1,\cdots,n.$$

(三) 连续型随机变量

1．连续型随机变量及其概率密度

对于随机变量 X，以 $F(x)$ 记其分布函数．如存在非负可积函数 $f(x)$，使得对于任意实数 x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt,$$

则称 X 为连续型随机变量，$f(x)$ 称为 X 的概率密度．

概率密度 $f(x)$ 是非负函数，在整个数轴上的积分等于 1．连续型随机变量 X 取任何给定值的概率等于 0，即 $P\{X=a\}=0$．因此在计算 X 在某一区间内取值的概率时，不必区分是开区间还是闭区间或半开半闭区间．另外，改变 X 的概率密度 $f(x)$ 在某个区间内有限个点的函数值，并不改变 X 在此区间取值的概率．

对于一个连续型随机变量 X，其分布函数 $F(x)$ 与概率密度 $f(x)$ 之间有如下关系：对于 $f(x)$ 的任一连续点 x，均有 $f(x)=F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}$．

2．常用的连续型随机变量及其概率密度

(1) 均匀分布：如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 内服从均匀分布，记为 $X\sim U(a,b)$，其中 $a<b$ 是分布参数，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

(2) 指数分布：如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant0,\end{cases}$$

则称 X 服从参数为 $\lambda\ (\lambda>0)$ 的指数分布，记为 $X\sim e(\lambda)$，其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

(3) 正态分布：如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in\mathbf{R}.$$

则称 X 服从参数为 μ，σ 的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中参数 $\mu\in\mathbf{R}$，$\sigma^2>0$. 特别地，当 $\mu=0$. $\sigma=1$ 时，称 X 服从标准正态分布，记为 $X\sim N(0,1)$，且标准正态分布的随机变量的概率密度和分布函数分别用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示，即

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in\mathbf{R},$$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,\ x\in\mathbf{R}.$$

3. 正态分布的性质

(1) 对于标准正态分布的随机变量 X，其密度函数 $\varphi(x)$ 是偶函数，即 $\varphi(x)=\varphi(-x)$，$x\in\mathbf{R}$，其分布函数 $\Phi(x)$ 满足 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$，$x\in\mathbf{R}$.

(2) 如果随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，且其分布函数为

$$F(x)=\Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right),\ x\in\mathbf{R}.$$

(3) 设 $X\sim N(0,1)$，对于给定的 $\alpha\ (0<\alpha<1)$，如果 μ_α 满足

$$P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha,$$

即

$$\Phi(\mu_\alpha)=1-\alpha,$$

则称 μ_α 为标准正态分布的上侧 α 分位数；

如果 μ_α 满足

$$\Phi(\mu_\alpha)-\Phi(-\mu_\alpha)=1-\alpha,$$

则称 μ_α 为标准正态分布的双侧分位数.

为便于应用，标准正态分布的分位数已有表可查.

(4) 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，c 为任意实数，则 $X+c\sim N(\mu+c,\sigma^2)$，$cX\sim N(c\mu,c^2\sigma^2)$.

(5) 若 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2,\cdots,n$，且相互独立，则对于不全为零的常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i,\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2\right).$$

(四) 随机变量函数的概率分布

1. 离散型情形

设 X 是离散型随机变量，概率分布为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots,$$

则随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 取值 $g(x_k)$ 的概率为

$$P\{Y=g(x_k)\}=p_k,\ k=1,2,\cdots.$$

如果在函数值 $g(x_k)$ 中有相同的数值，则将它们相应的概率之和作为随机变量 $Y=g(X)$ 取该值的概率，就可以得到 $Y=g(X)$ 的概率分布.

2. 连续型情形

一般地，根据函数 $g(x)$ 的形式及 X 的分布函数，求 $Y=g(X)$ 的分布函数. 特别地，若 $y=g(x)$ 是严格单调的连续函数，其值域为 (c,d)，且 $x=h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的唯一反函数，则 $Y=g(X)$ 也是连续型随机变量，其概率密度可通过 X 的概率密度 $f(x)$ 表示为

$$p(y)=\begin{cases}f(h(y))\,|h'(y)|, & 若\ c<y<d,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

·例 题 详 解·

例 3.2.1 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\mu=$ ________.

[答案] 4.

[提示] 本题主要考查将一般正态分布标准化，并用此计算概率. 本题的难点在于利用二次方程的判别式小于零，即 $X>4$ 的概率为 $\frac{1}{2}$ 确定 μ 的取值.

[解] 由代数的知识知道，二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的充要条件是 $4-X<0$. 故由已知条件有

$$P\{X>4\}=\frac{1}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}&=P\{X>4\}=1-P\{X\leqslant 4\}\\&=1-P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{4-\mu}{\sigma}\right\}=1-P\left\{Y\leqslant\frac{4-\mu}{\sigma}\right\}\\&=1-\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right),\end{aligned}$$

其中 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. 由此可知

$$\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2},$$

再由标准正态分布函数的性质可知，$\Phi(0)=\frac{1}{2}$. 于是 $\mu=4$.

[典型错误] 不会利用标准正态分布的分布函数的对称性及 $\Phi(0)=\frac{1}{2}$ 进行计算.

例 3.2.2 设随机变量 X 服从参数为$(2,p)$的二项分布，随机变量 Y 服从参数为$(3,p)$的二项分布. 若 $P\{X\geqslant 1\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{Y\geqslant 1\}=$ ________.

[答案] $\frac{19}{27}$.

[提示] 本题主要考查二项分布的概率计算. 由 $P\{X\geqslant 1\}=\frac{5}{9}$ 可求出 p 的取值，之后再由 $Y\sim B(3,p)$ 求出 $P\{Y\geqslant 1\}$ 的值.

[解] 由 $\frac{5}{9}=P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X=0\}=1-q^2$，故 $q=1-p=\frac{2}{3}$，

从而
$$P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-q^3=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{19}{27}.$$

[典型错误] 不知如何利用 $P\{X\geqslant 1\}=\frac{5}{9}$ 这一条件及计算错误.

例 3.2.3 设一次试验成功的概率为 p，进行 100 次独立重复试验. 当 $p=$ ________ 时，成功次数的标准差的值最大，其最大值为________.

[答案] $\frac{1}{2}$，5.

[提示] 本题主要考查二项分布及其数字特征.

[解] 设 X 表示 100 次独立重复试验，则 X 服从二项分布，均值 $EX=100p$，标准差 $\sqrt{DX}=\sqrt{100p(1-p)}$. 简单计算便知 $p=\frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{DX}$ 最大，且最大值为 5.

[典型错误] 不知道二项分布的方差.

例 3.2.4 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 若\ x\in[0,1],\\ \frac{2}{9}, & 若\ x\in[3,6],\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

若 k 使得 $P\{X\geqslant k\}=\frac{2}{3}$，则 k 的取值范围是________.

[答案] $[1,3]$.

[提示] 本题主要考查随机变量的概率密度、概率分布的概念.

[解] 只要作出 $f(x)$的图形，并理解概率 $P\{X\geqslant k\}$表示 $x\geqslant k$ 时 $f(x)$与 x 轴围成的面积即知 $k\in[1,3]$，如图 3.2.1 所示.

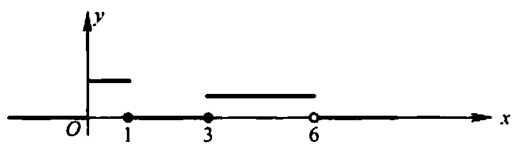

图 3.2.1

[典型错误] 直接用积分求 $P\{X\geqslant k\}$时，不会考虑 k 的取值.

例 3.2.5 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$和 $F_2(x)$，则(　　).

(A) $f_1(x)+f_2(x)$必为某一随机变量的概率密度　　(B) $f_1(x)f_2(x)$必为某一随机变量的概率密度

(C) $F_1(x)+F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数　　(D) $F_1(x)F_2(x)$必为某一随机变量的分布函数

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查随机变量的分布函数及概率密度函数的性质. 利用分布函数及概率密度函数的性质很容易给出判断.

[解] 连续型随机变量的分布函数 $F(x)$有如下特点：$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，当 $x\in(-\infty,+\infty)$时 $F(x)$单调增加. 由此可见(A)与(C)均不满足. 例如(C)，令 $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$，$F(+\infty)=2$，不满足要求. 对于(B)，设$f_1(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1],\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}e^x, & x\in(-\infty,0],\\ 0, & 其他,\end{cases}$从而 $f_1(x)f_2(x)=0$，不能作为概率密度. 只有(D)满足前述特点.

事实上，设 $X_{(2)}=\max\{X_1,X_2\}$，则 $X_{(2)}$的分布函数为

$$\begin{aligned}F(x)&=P\{X_{(2)}<x\}=P\{\max\{X_1,X_2\}<x\}\\&=P\{X_1<x,X_2<x\}=P\{X_1<x\}\cdot P\{X_2<x\}\\&=F_1(x)\cdot F_2(x).\end{aligned}$$

[典型错误] 由密度函数的非负性及积分等于 1 的性质，误认为(B)正确.

例 3.2.6 设 $F_1(x)$与 $F_2(x)$分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数. 为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取(　　).

(A) $a=\frac{3}{5}$，$b=-\frac{2}{5}$　　(B) $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{2}{3}$　　(C) $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$　　(D) $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{3}{2}$

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查随机变量分布函数的基本性质. 由分布函数的规范性可知选项(A)正确.

[解] 根据分布函数的性质：$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，因此，$1=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=a\lim\limits_{x\to+\infty}F_1(x)-b\lim\limits_{x\to+\infty}F_2(x)=a-b$. 只有(A)中的 a 和 b 值满足 $a-b=1$.

[典型错误] 只考虑分布函数的非负性，而选择(D).

例 3.2.7 假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布，平均无故障工作的时间(EX)为 5 小时．设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机．试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$．

[提示] 本题主要考查指数分布．先由平均无故障工作时间确定 X 的参数，之后利用 $Y=\min\{X,2\}$ 求出 Y 的分布．

[解] 设 X 的分布参数为 λ．由于 $EX=\frac{1}{\lambda}=5$，可见 $\lambda=\frac{1}{5}$．显然，有

$$Y=\min\{X,2\}.$$

对于 $y<0$，$F(y)=0$；对于 $y\geqslant 2$，$F(y)=1$；对于 $0\leqslant y<2$，有

$$\begin{aligned}F(y)&=P\{Y\leqslant y\}\\&=P\{\min\{X,2\}\leqslant y\}\\&=P\{X\leqslant y\}=1-\mathrm{e}^{-\frac{y}{5}}.\end{aligned}$$

于是，Y 的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & 若\ y<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{y}{5}}, & 若\ 0\leqslant y<2,\\ 1, & 若\ y\geqslant 2.\end{cases}$$

[典型错误] 不清楚指数分布的期望即为未知参数的倒数，不清楚如何划分 Y 的取值范围．

例 3.2.8 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 若\ x\in[1,8],\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$F(x)$是 X 的分布函数．求随机变量 $Y=F(X)$的分布函数．

[提示] 本题主要考查随机变量函数的分布．要计算 $Y=F(X)$的分布函数．必须先求得 X 的分布函数，之后利用单调函数的密度函数公式，计算 $Y=F(X)$的密度函数，然后再由分布函数的定义求得 Y 的分布函数．

[解法 1] 易见当 $x<1$ 时，$F(x)=0$；当 $x>8$ 时，$F(x)=1$；对于 $x\in[1,8]$，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{1}^{x}\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t=\sqrt[3]{x}-1.$$

设 $G(y)$是随机变量 $Y=F(X)$的分布函数．显然，当 $y\leqslant 0$ 时，$G(y)=0$；当 $y\geqslant 1$ 时，$G(y)=1$；对于 $y\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}G(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}\\&=P\{\sqrt[3]{X}-1\leqslant y\}=P\{X\leqslant(y+1)^3\}\\&=\int_{1}^{(y+1)^3}\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t=y,\end{aligned}$$

故

$$G(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ y, & 0<y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$$

[解法 2] 当 $x<1$ 时，$F(x)=0$；当 $x>8$ 时，$F(x)=1$；当 $1\leqslant x\leqslant 8$ 时，

$$F(x)=\int_{1}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{3\sqrt[3]{t^2}}=\sqrt[3]{x}-1.$$

设 $G(y)$是随机变量 $Y=F(X)$的分布函数，$F(x)$在[1,8]上严格单调递增．且 $F(1)=0$，$F(8)=1$．记 $h(y)=F^{-1}(y)=(y+1)^3$，根据随机变量函数的密度函数公式

$$g_Y(y)=\begin{cases} f(h(y))\,|h'(y)|, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则当 $y<0$ 时，$G(y)=0$；当 $y>1$ 时，$G(y)=1$；当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$G(y)=\int_{-\infty}^{y} g_Y(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^y \mathrm{d}t=y$.

也可以由

$$\begin{aligned} G(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}\\ &=P\{X\leqslant F^{-1}(y)\}=F[F^{-1}(y)]=y, \end{aligned}$$

故

$$G(y)=\begin{cases} 0, & y\leqslant 0,\\ y, & 0<y<1,\\ 1, & y\geqslant 1. \end{cases}$$

［典型错误］ 不会用定义及求连续型随机变量函数的概率密度函数的定理求解．另外，也有部分考生不会定积分的计算．

例 3.2.9 假设随机变量 X 的绝对值不大于 1；$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$；$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$；在事件$\{-1<X<1\}$出现的条件下，X 在$(-1,1)$内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比．试求：

（Ⅰ）X 的分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$；

（Ⅱ）X 取负值的概率 p．

［提示］ 本题主要考查随机变量的分布及条件分布．由题设知 $P\{-1\leqslant X\leqslant 1\}=1$，且知道 $P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，故 $P\{-1<X<1\}=\frac{5}{8}$．由于 X 在$(-1,1)$内任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比，则当 $-1<x<1$ 时，$F(x)$是一直线，且 $x=-1$ 时，$F(-1)=\frac{1}{8}$；$x=1$ 时，$F(1)=\frac{3}{4}$．故 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$F(x)=\frac{1}{16}(5x+7)$；$x<-1$ 时，$F(x)=0$；$x\geqslant 1$ 时，$F(x)=1$．以上是分析法，也可以用条件概率公式求解．正确写出 $F(x)$后，$p=P\{X<0\}=P\{X\leqslant 0\}-P\{X=0\}=F(0)-P\{X=0\}$．

［解］（Ⅰ）由条件可知，当 $x<-1$ 时，$F(x)=0$．又 $F(-1)=\frac{1}{8}$，$F(1)=\frac{1}{4}$．故有

$$P\{-1<X<1\}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

易见，在 X 的值属于$(-1,1)$的条件下，事件$\{-1<X\leqslant x\}$（$-1<x<1$）的条件概率为

$$P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}=\frac{x+1}{2},$$

于是，对于 $-1<x<1$，有

$$\begin{aligned} P\{-1<X\leqslant x\}&=P\{-1<X\leqslant x,\ -1<X<1\}\\ &=P\{-1<X<1\}\cdot P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}\\ &=\frac{5}{8}\cdot\frac{x+1}{2}=\frac{5x+5}{16},\\ F(x)&=P\{X\leqslant -1\}+P\{-1<X\leqslant x\}\\ &=\frac{1}{8}+\frac{5x+5}{16}=\frac{5x+7}{16}. \end{aligned}$$

对于 $x\geqslant 1$，有 $F(x)=1$．从而

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{若 } x<-1,\\ \dfrac{5x+7}{16}, & \text{若 } -1\leqslant x<1,\\ 1, & \text{若 } x\geqslant 1. \end{cases}$$

（Ⅱ）X 取负值的概率

$$p=P\{X<0\}=F(0)-P\{X=0\}=F(0)=\frac{7}{16}.$$

[典型错误] 不能充分理解所给的已知条件及条件概率.

三、多维随机变量的分布

在许多问题中，一个随机试验的结果要用两个或两个以上的随机变量来描述，而每个随机变量的概率分布只能描述其自身的行为，它不能反映变量之间的联系与相互关系. 多个随机变量的联合概率分布是描绘变量间统计相依关系的重要工具，通过它不仅可以描绘变量间的联合行为、性质和特征，还可以决定每个随机变量的概率分布.

多个随机变量的联合分布、边缘分布、相关性与独立性是概率论中的重要概念，也是数理统计的基础. 本节的重点是：

(1) 理解多维随机变量的分布函数的基本概念和性质；离散型随机变量的联合分布、边缘分布和条件分布；连续型随机变量的联合概率密度、边缘密度和条件密度；会利用二维概率分布求有关事件的概率.

(2) 理解随机变量的独立性和不相关性的概念及联系，掌握随机变量独立的条件.

(3) 掌握二维均匀分布，了解二维正态分布的概率密度，理解其中参数的概率意义.

(4) 掌握根据两个随机变量的概率分布求其简单函数的概率分布的基本方法；会根据多个独立随机变量的概率分布求其函数的概率分布.

·考试内容与要求·

考试内容

多维随机变量及其分布函数　二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布　二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度　随机变量的独立性和不相关性　常见二维随机变量的分布　两个及两个以上随机变量的函数的分布

考试要求

1. 理解多维随机变量的分布函数的概念和基本性质.

2. 理解二维离散型随机变量的概率分布和二维连续型随机变量的概率密度，掌握二维随机变量的边缘分布和条件分布.

3. 理解随机变量的独立性和不相关性的概念，掌握随机变量相互独立的条件；理解随机变量的不相关性与独立性的关系.

4. 掌握二维均匀分布和二维正态分布，理解其中参数的概率意义.

5. 会根据两个随机变量的联合分布求其函数的分布，会根据多个相互独立随机变量的联合分布求其函数的分布.

·考试内容解析·

(一) 多维随机变量及其分布函数

1. 基本概念

(1) 联合分布函数：称 n 元函数

$$F(x_1,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,\cdots,X_n\leqslant x_n\}$$

为 n 维随机变量(或随机向量)$X=(X_1,\cdots,X_n)$的分布函数或随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的联合分布函数.

(2) 边缘分布函数：随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 中任意 $k\,(1\leqslant k<n)$个的联合分布函数，称为 $F(x_1,\cdots,x_n)$的边缘分布函数.

2. 联合分布的性质

以两个随机变量 X 和 Y 的联合分布函数 $F(x,y)$为例：

(1) $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，且对每一个自变量单调不减.

(2) $F(x,y)$对于每一自变量右连续.

(3) $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$.