$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\pi^2\sin\pi x}{2\pi^2}\quad（洛必达法则）$$
$$=\frac{1}{\pi},$$

所以补充定义，令

$$f(1)=\frac{1}{\pi},$$

则可使 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)$，即 $f(x)$在 $x=1$ 处左连续，从而使 $f(x)$在闭区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续.

［典型错误］ 不少考生在求极限 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$时，将三项一起通分、使分子、分母的形式更为复杂，用洛必达法则后分子、分母的项数较多，最后因太复杂而导致结果出错.

例 1.1.44 在经济学中，称函数 $Q(x)=A[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}$为固定替代弹性生产函数，而称函数$\overline{Q}=AK^{\delta}L^{1-\delta}$为 Cobb－Douglas 生产函数(简称 C－D生产函数).

试证明：当 $x\to0$ 时，固定替代生产函数变为C－D生产函数，即有$\lim\limits_{x\to0}Q(x)=\overline{Q}$.

［提示］ 本题主要考查极限概念在实际中的应用以及"1^∞"型极限的求法．在求解"1^∞"型极限时，常可将它化为重要极限"$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$"的形式.

［证］

$$\lim_{x\to0}Q(x)$$
$$=\lim_{x\to0}A\left[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}\right]^{-\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}AL\left[1+\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)\right]^{\frac{1}{-x}}$$
$$=\lim_{x\to0}AL\left[\left(1+\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)\right)^{\frac{1}{\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)}}\right]^{\frac{\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)}{-x}}.$$

由于

$$\lim_{x\to0}\left[1+\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)}}=\mathrm{e}\quad（重要极限），$$

且

$$\lim_{x\to0}\frac{\delta\left(\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}-1\right)}{-x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\delta\left(\frac{K}{L}\right)^{-x}\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{-1}=\ln\left(\frac{K}{L}\right)^{\delta},$$

所以

$$\lim_{x\to0}Q(x)=AL\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{K}{L}\right)^{\delta}}$$
$$=AL\left(\frac{K}{L}\right)^{\delta}=AL^{1-\delta}K^{\delta}=\overline{Q}.$$

二、一元函数微分学

·考试内容与要求·

考试内容

导数和微分的概念 导数的几何意义和经济意义 函数的可导性与连续性之间的关系 平面曲线的切线与法线 导数和微分的四则运算 基本初等函数的导数 复合函数、反函数和隐函数的微分法 高阶导数 一阶微分形式的不变性 微分中值定理 洛必达(L'Hospital)法则 函数单调性的判别 函数的极值 函数图形的凹凸性、拐点及渐近线 函数图形的描绘 函数的最大值与最小值

考试要求

1. 理解导数的概念及可导性与连续性之间的关系，了解导数的几何意义与经济意义(含边际与弹性的概念)，会求平面曲线的切线方程和法线方程.

2. 掌握基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则，会求分段函数的导数，会求反函数与隐函数的导数.

3. 了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数.

4. 了解微分的概念，导数与微分之间的关系以及一阶微分形式的不变性．会求函数的微分.

5. 理解罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理，了解柯西(Cauchy)中值定理．掌握这三个定理的简单应用.

6. 会用洛必达法则求极限.

7. 掌握函数单调性的判别方法、了解函数极值的概念．掌握函数极值、最大值和最小值的求法及其应用.

8. 会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点和渐近线.

9. 会描绘简单函数的图形.

・考试内容解析・

(一) 导数与微分

1. 导数与微分的有关定义

(1) 导数的定义：设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义．如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称该极限值为 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数，记为$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，或 $\left.y'\right|_{x=x_0}$，或 $f'(x_0)$，此时，称 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处可导，否则称不可导.

(2) 导数定义的等价形式：设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义．如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称该极限值为 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数．记法同上.

(3) 左、右导数的定义：设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的左(或右)邻域内有定义，如果$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0^-\\(\text{或}\Delta x\to 0^+)}}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称此极限值为 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的左(或右)导数．记为 $f'_-(x_0)$(或 $f'_+(x_0)$).

(4) 区间内可导：若 $f(x)$在(a,b)内处处可导，则称 $f(x)$在(a,b)内可导．若有 $f(x)$在 $x=a$ 处右导数存在，在 $x=b$ 处左导数存在，则称 $f(x)$在$[a,b]$上可导.

(5) 导函数：若$f(x)$在(a,b)内可导，则对任何 $x\in(a,b)$，有$f'(x)$与 x 对应，由函数的定义知 $f'(x)$是 x 的函数，称之为$f(x)$的导函数.

(6) 微分的定义：设 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义，$x_0+\Delta x$ 也属于该邻域．如果 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，$o(\Delta x)$是比 Δx 高阶的无穷小量(当 $\Delta x\to 0$ 时)，则称 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可微分，并称 $A\Delta x$ 为 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的微分.

(7) 高阶导数的定义：设在 $x=x_0$ 的邻域内 $f'(x)$存在，若在 $x=x_0$ 处 $f'(x)$可导，则称 $f'(x)$在 $x=x_0$ 处的导数为函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的二阶导数，记为$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$，或 $f''(x_0)$，或 $\left.y''\right|_{x=x_0}$.

类似地，可定义更高阶导数$\left.\dfrac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=x_0}$等.

(8) 区间内的高阶导数：若 $f(x)$在区间(a,b)内处处有二阶导数．则称 $f(x)$在(a,b)内二阶可导．类似地，可定义 $f(x)$在(a,b)内 n 阶可导.

2. 导数与微分的几何意义及物理意义

(1) 导数的几何意义：函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数值 $f'(x_0)$等于曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处切线的斜率，即 $k=f'(x_0)$，曲线 $y=f(x)$在该点处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

(2) 微分的几何意义：函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$ 表示当自变量有改变量 Δx 时，曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处切线上纵坐标的改变量.

(3) 导数的物理意义：设作变速直线运动的路程 s 与时间 t 的关系式为 $s=s(t)$. 则 $s'(t)$表示在 t 时刻物体的速度，$s''(t)$表示在 t 时刻物体运动的加速度.

3. 函数的求导法则

(1) 求导的四则运算法则：设 $u=u(x)$，$v=v(x)$在 x 处可导，则

$$(u\pm v)'=u'\pm v',$$
$$(uv)'=u'v+v'u,$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\ (v\neq 0).$$

特别地，$(Cu)'=Cu'$（C 为常数）.

(2) 反函数的求导法则：设 $y=f(x)$的反函数存在，记为 $x=\varphi(y)$，且 $f'(x)\neq 0$，则 $x=\varphi(y)$在对应点 y 处也可导，而且

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

(3) 复合函数的求导法则：设 $u=\varphi(x)$在 x 处可导，$y=f(u)$在对应点 $u=\varphi(x)$处可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$在 x 处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\varphi'(x).$$

(4) 隐函数的求导：设 $y=y(x)$是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数. 则在方程 $F(x,y)=0$ 两端对 x 求导，将 y 看成 x 的函数，然后解出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$即可. 也可借助于二元函数的偏导数，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y},$$

其中 F'_x 是将 $F(x,y)$的 y 看成常数对 x 求导的结果，F'_y 是将 $F(x,y)$的 x 看成常数对 y 求导的结果.

(5) 参数方程确定的函数的求导：设 $y=y(x)$是由 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定的函数，$\varphi(t)$，$\psi(t)$可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$. 则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

(6) 对数求导法：如果函数 y 的表达式由多个因式的乘除、乘幂构成，或是幂指函数的形式，则可先将函数取对数，化成隐函数形式再求导数. 例如，设 $y=f(x)^{g(x)}$ （$f(x)>0$），则 $\ln y=g(x)\ln f(x)$. 两边求导，得 $\frac{y'}{y}=g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$，从而 $y'=f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$.

(7) 求高阶导数的莱布尼茨公式：设 $u=u(x)$，$v=v(x)$在 x 处有直到 n 阶导数，则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}.$$

4. 函数的微分法则

(1) 函数微分存在的充要条件：函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可微的充分必要条件是 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可导，且

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x.$$

这也是计算函数微分的公式.

(2) 函数微分的四则运算法则：设 $u=u(x)$，$v=v(x)$可微分，则

$$d(u\pm v)=du\pm dv,$$

$$d(uv)=vdu+udv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\quad(v\neq 0).$$

(3) 一阶微分形式的不变性：设 $u=\varphi(x)$在 x 处可微，$y=f(u)$在对应点 $u=\varphi(x)$处可微，则

$$dy=f'(u)du=f'(u)\varphi'(x)dx.$$

5. 基本初等函数的导数公式与微分公式

(1) 求导公式：

$$(C)'=0\quad(C\text{ 是常数}).$$

$$(x^{a})'=ax^{a-1}\quad(a\text{ 是实数}).$$

$$(a^x)'=a^x\ln a\quad(a>0,a\neq 1).$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\quad(a>0,a\neq 1).$$

$$(\sin x)'=\cos x.$$

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

$$(\tan x)'=\sec^2 x.$$

$$(\cot x)'=-\csc^2 x.$$

$$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x.$$

$$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x.$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

(2) 微分公式：

$$d(C)=0\quad(C\text{ 为常数}).$$

$$d(x^{a})=ax^{a-1}dx\quad(a\text{ 是实数}).$$

$$d(a^x)=a^x\ln a\,dx\quad(a>0,a\neq 1).$$

$$d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx\quad(a>0,a\neq 1).$$

$$d(\sin x)=\cos x\,dx.$$

$$d(\cos x)=-\sin x\,dx.$$

$$d(\tan x)=\sec^2 x\,dx.$$

$$d(\cot x)=-\csc^2 x\,dx.$$

$$d(\sec x)=\sec x\cdot\tan x\,dx.$$

$$d(\csc x)=-\csc x\cdot\cot x\,dx.$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

$$d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx.$$

$$d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}dx .$$

(3) 简单函数的高阶导数公式：

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n .$$

$$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}.$$

6. 常见题目类型

(1) 用导数的定义表示有关函数的极限.

例如，已知 $f'(0)=a$ ，求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(-h)}{h}$. 此类题型有很多，需要用导数的定义来解决：

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(-h)}{h} &= 2\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}\\ &= 2f'(0)+f'(0)=3f'(0)=3a .\end{aligned}$$

(2) 按公式和法则求初等函数的导数与微分.

(3) 按导数的定义求一些函数在某点的导数，尤其是求分段函数在分界点处的导数.

(4) 求分段函数的导函数.

(5) 求平面曲线在某点的切线方程与法线方程.

(6) 求隐函数的一阶导数与二阶导数.

(7) 求复合函数的一阶导数与二阶导数，尤其是求抽象函数与具体函数复合而成的函数的导数. 例如，求 $y=f(\sin x)$的二阶导数：$\frac{dy}{dx}=f'(\sin x)\cos x$，$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(\sin x)\cos^2 x - f'(\sin x)\sin x$.

(8) 用对数求导法求乘除因子较多的函数、有指数运算的函数或幂指函数的导数.

(9) 求一些函数的高阶导数. 例如，多项式函数，$\sin x$，$\cos x$，$\ln x$，$\frac{1}{(x+a)(x+b)}$，e^{ax}等.

(10) 利用莱布尼茨公式求一些函数的高阶导数.

（二）微分中值定理

1. 罗尔定理

(1) 费尔马引理：设 $f(x)$在 $x=x_0$ 的邻域内连续，在 $x=x_0$ 处可导，如果 $f(x_0)$是极值，则有 $f'(x_0)=0$.

(2) 罗尔定理：如果 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)$，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

2. 拉格朗日中值定理

(1) 拉格朗日中值定理：如果 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$（或 $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$.其中 $0<\theta<1$).

(2) 有限增量公式：设 $f(x)$在 x 的邻域内可导，$x+\Delta x$ 也属于该邻域，则有

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

(3) 拉格朗日中值定理的推论：

① 若 $f(x)$在(a,b)内恒有 $f'(x)=0$ ，则在(a,b)内 $f(x)$为常数.

② 若 $f(x)$，$g(x)$在(a,b)内恒有 $f'(x)=g'(x)$，则在(a,b)内 $f(x)$，$g(x)$之间最多只相差一个常数，即 $f(x)=g(x)+C$.

3. 柯西中值定理

如果 $f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $g'(x)$在(a,b)内处处不为零，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

4. 泰勒公式

(1) 带皮亚诺余项的泰勒公式：设 $f(x)$在 $x=x_0$ 的邻域内连续，在 $x=x_0$ 处有直到 n 阶导数，则在该邻域内

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

(2) 带拉格朗日型余项的泰勒公式：设 $f(x)$在 $x=x_0$ 的邻域内有直到 $n+1$ 阶导数，则在该邻域内

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 介于 x 和 x_0 之间.

5. 常见题目类型

(1) 对连续函数 $f(x)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

此题型若不能用连续函数的零点存在定理证明，则可按以下思路考虑：

思路一：寻找辅助函数 $F(x)$，使 $F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内有 $F'(x)=f(x)$，再验证 $F(a)=F(b)$，若成立，用罗尔定理可证之.

思路二：寻找辅助函数 $F(x)$，使 $F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内有 $F'(x)=f(x)$，说明 $F(x)$的最大值或最小值在(a,b)内取得，若是，则用费尔马引理证之.

在寻找 $F(x)$时注意下列等式常常是有用的：

$$[xf(x)]'=xf'(x)+f(x),$$
$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\left(\frac{f(x)}{x}\right)',$$
$$[f'(x)+f(x)]e^x=[e^xf(x)]',$$
$$[f'(x)-f(x)]e^{-x}=[e^{-x}f(x)]'.$$

(2) 证明的等式或不等式中有函数的差值出现.

此时常用拉格朗日中值定理证明.

(3) 证明的等式或不等式中有函数的差值之比出现.

此时一般可用柯西中值定理证明.

(4) 证明存在两个中值 ξ，$\eta\in(a,b)$，使某等式成立.

此时往往是分别利用拉格朗日中值定理和柯西中值定理证明.

(5) 证明的问题是利用高阶导数的性质推出函数的某性质.

此类问题往往可以考虑应用泰勒公式来证明. 在用泰勒公式时，应注意在区间的端点、中间点或导数为零的点的展开式.

(三) 导数的应用

1. 洛必达法则(利用导数求极限)

(1) “$\frac{0}{0}$”型极限：设 $f(x)$, $g(x)$满足条件：

① $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=0$;

② 在 x_0 的某去心邻域内(或 $|x|$ 充分大时)可导，且 $g'(x)\neq 0$;

③ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (或∞).

则必有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (或∞).

(2) “$\frac{\infty}{\infty}$”型极限：设 $f(x)$，$g(x)$满足条件：

① $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\infty$；

② 在 x_0 的某去心邻域内(或 $|x|$ 充分大时)可导，且 $g'(x)\neq 0$；

③ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (或 ∞).

则必有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (或 ∞).

(3) "$0\cdot\infty$" 型极限：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ $(f(x)\neq 0)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，则可将极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 化为 "$\dfrac{0}{0}$" 型或 "$\dfrac{\infty}{\infty}$" 型的极限：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\quad\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}\right).$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\quad\left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}\right).$$

对于"$\dfrac{0}{0}$"、"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型极限，再用洛必达法则求解.

(4) "$\infty-\infty$" 型极限：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$(两者同为正无穷大或负无穷大)，则通常可通过通分将 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$化为 "$\dfrac{0}{0}$" 或 "$\dfrac{\infty}{\infty}$" 型极限，再用洛必达法则求解.

(5) "1^∞"，"0^0"，"∞^0" 型极限：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$是 "$1^\infty$" 或 "$0^0$" 或 "$\infty^0$" 型极限，且 $f(x)>0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}.$$

而 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)$是 "$0\cdot\infty$" 型极限，化为 "$\dfrac{0}{0}$" 型或 "$\dfrac{\infty}{\infty}$" 型极限，再用洛必达法则求解.

2. 利用导数研究函数的性态

(1) 确定函数的单调性：

① 单调性的判别定理：设 $y=f(x)$在区间(a,b)内可导，如果对于任意 $x\in(a,b)$，有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$在(a,b)内单调增加；如果对于任意 $x\in(a,b)$，有 $f'(x)<0$，则 $f(x)$在(a,b)内单调减少.

在此定理中，若再加上"$f(x)$在端点 a，b 连续"这一条件，则所得的结论在闭区间$[a,b]$上成立.

② 求函数单调区间的方法：

(a) 写出 $f(x)$的定义域；

(b) 求 $f'(x)$，解方程 $f'(x)=0$，得驻点；

(c) 用驻点和导数不存在的点将 $f(x)$的定义域分成若干个子区间，在每个子区间上用导数 $f'(x)$的符号判断$f(x)$的单调性.

(2) 确定函数的极值：

① 极值的定义：设 $f(x)$在(a,b)内有定义，$x_0\in(a,b)$，如果存在 $\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$是 $f(x)$的极小值；若当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$是 $f(x)$的极大值，$x=x_0$ 称为 $f(x)$ 的极值点.

② 极值的必要条件：设 $f(x)$在 $x=x_0$ 处取得极值，且 $f'(x_0)$存在，则必有 $f'(x_0)=0$.

③ 极值的第一充分条件：设 $f(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内可导，且 $f'(x_0)=0$，若在$(x_0-\delta,x_0)$内 $f'(x)>0$，在$(x_0,x_0+\delta)$内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 处取得极大值 $f(x_0)$；若在$(x_0-\delta,x_0)$内 $f'(x)<0$，在$(x_0,x_0+\delta)$内$f'(x)>0$，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 处取得极小值 $f(x_0)$；若在$(x_0,x_0-\delta)$和$(x_0,x_0+\delta)$内 $f'(x)$符号相同，则 $f(x_0)$不是极值.

④ 极值的第二充分条件：设 $f(x)$在 $x=x_0$ 处二阶可导，且 $f'(x_0)=0$. 若$f''(x)<0$.则 $f(x_0)$是极大值；若$f''(x_0)>0$,则 $f(x_0)$是极小值；若 $f''(x_0)=0$，则此定理不能判定 $f(x_0)$是否为极值.

⑤ 确定函数极值的方法：

(a) 求 $f(x)$的定义域；

(b) 求 $f'(x)$，解方程 $f'(x)=0$ 得驻点；

(c) 对驻点和导数不存在的点逐个用充分条件判断，选出极值点；

(d) 求极值点处的函数值.

(3) 确定函数在区间上的最值：

① 函数最值的定义：设 $f(x)$在$[a,b]$上有定义，$x_0\in[a,b]$. 若对于任意 $x\in[a,b]$，恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值；若对于任意 $x\in[a,b]$，恒有 $f(x)\geqslant f(x_0)$，则称 $f(x_0)$是$f(x)$在$[a,b]$上的最小值. $x=x_0$ 称为最值点.

② 求$[a,b]$上$f(x)$的最值的方法：

(a) 求$f'(x)$，解方程$f'(x)=0$，得驻点；

(b) 将$[a,b]$上的驻点和导数不存在的点处的函数值算出；

(c) 比较驻点处、导数不存在点处、端点处的函数值. 求出最大值、最小值.

(4) 确定曲线的凹凸性与拐点：

① 曲线凹凸性与拐点的定义：设 $y=f(x)$在$[a,b]$上连续，如果对于任意 x_1、$x_2\in[a,b]$，都有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$上是凹的；如果对于任意 x_1、$x_2\in[a,b]$，都有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$上是凸的. 如果曲线 $y=f(x)$在$[a,x_0]$与$[x_0,b]$上的凹凸性相反，则称$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

② 曲线 $y=f(x)$的凹凸性的判定法：设 $y=f(x)$在(a,b)内二阶可导. 若在(a,b)内恒有$f''(x)>0$. 则曲线 $y=f(x)$在(a,b)内是凹的；若在(a,b)内恒有$f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$在(a,b)内是凸的.

在此定理中. 若再加上"$f(x)$在端点 a，b 连续"这一条件，则所得的结论在闭区间$[a,b]$上成立.

③ 曲线 $y=f(x)$的拐点的判定法：设 $y=f(x)$在(a,b)内二阶可导，且 $x_0\in(a,b)$、$f''(x_0)=0$. 若在 x_0 的左右侧$f''(x)$异号，则$(x_0,f(x_0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点；若在 x_0 的左右侧$f''(x)$同号. 则$(x_0,f(x_0))$不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

④ 求曲线 $y=f(x)$的凹凸区间及拐点的方法：

(a) 写出 $y=f(x)$的定义域；

(b) 求$f''(x)$，解方程$f''(x)=0$ 得到根；

(c) 以方程$f''(x)=0$ 的根和二阶导数不存在的点将定义域分成若干子区间. 在每个子区间上用$f''(x)$的正负来得到曲线 $y=f(x)$的凹凸性；

(d) 写出曲线 $y=f(x)$的凹区间和凸区间以及拐点.

(5) 函数图形的描绘：

① 曲线 $y=f(x)$的渐近线的求法：

(a) 若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$，则 $y=b$ 是曲线$y=f(x)$的一条水平渐近线；

(b) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$的一条铅直渐近线；

(c) 若$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$，且$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$，则直线 $y=ax+b$ 是曲线$y=f(x)$的一条斜渐近线.

② 函数图形描绘的方法：

(a) 求出$f(x)$的定义域；

(b) 求$f'(x)$，得驻点和导数不存在的点；

(c) 求$f''(x)$，得二阶导数的零点和二阶导数不存在的点；

(d) 用上面求出的所有特殊点将定义域分成若干个子区间，在每个子区间上用$f'(x)$、$f''(x)$的符号判定函数的单调性和凹凸性；

(e) 求出曲线的渐近线；

(f) 求出上述特殊点处的函数值(可另加几个)；

(g) 作图.

3. 导数在经济学中的应用

(1) 经济学中常见的函数

① 需求函数：设某产品的需求量为 x，价格为 p，一般地，需求量 x 作为价格 p 的函数 $x=\varphi(p)$，称为需求函数，并且价格 p 上升(下降)，需求量 x 下降(上升)．需求函数的反函数 $p=\varphi^{-1}(x)$称为价格函数，也常称为需求函数.

② 供给函数：设某产品的供给量为 x，价格为 p．一般地，供给量 x 作为价格 p 的函数 $x=\psi(p)$，称为供给函数，并且价格上升(下降)，供给量上升(下降).

③ 成本函数：成本 $C=C(x)$是生产产品的总投入．它由固定成本C_1(常量)和可变成本$C_2(x)$两部分组成，其中 x 表示产量．即

$$C=C(x)=C_1+C_2(x).$$

称$\dfrac{C}{x}$为平均成本，记为$\overline{C}$或AC：

$$AC=\overline{C}=\frac{C}{x}=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2(x)}{x}.$$

④ 收益(入)函数：收益 $R=R(x)$是产品售出后所得的收入，是销售量 x 与销售单价 p 之积．即收益函数为

$$R=R(x)=px.$$

⑤ 利润函数：利润 $L=L(x)$是收益扣除成本后的余额，由总收益减去总成本组成．即利润函数为

$$L=L(x)=R(x)-C(x)\qquad(x:\text{销售量}).$$

(2) 边际函数与边际分析

① 边际函数的有关概念：设 $y=f(x)$可导，则在经济学中称$f'(x)$为边际函数，$f'(x_0)$称为$f(x)$在$x=x_0$处的边际值．$f'(x_0)$在经济学中的解释为：在 $x=x_0$ 点，当 x 改变一个单位时，函数$f(x)$的近似改变量为$f'(x_0)$(实际问题中,经常略去“近似”二字).

② 经济学中常用的边际分析：

(a) 边际成本：设成本函数为 $C=C(q)$ (q 是产量)，则边际成本函数 MC 为 $MC=C'(q)$，它的经济学解释是：当产量在 q 的基础上改变一个单位时，成本将改变$C'(q)$单位.

(b) 边际收益：设收益函数为 $R=R(q)$ (q 是销售量)，则边际收益函数 MR 为 $MR=R'(q)$，它的经济学解释是：当销售量在 q 的基础上改变一个单位时，收益将改变$R'(q)$单位.

(c) 边际利润：设利润函数为 $L=L(q)$ (q 是销售量)．则边际利润函数 ML 为 $ML=L'(q)$，它的经济学解释是：当销售量在 q 的基础上改变一个单位时，利润将改变$L'(q)$个单位.

(3) 弹性函数与弹性分析

① 弹性函数的有关概念：设 $y=f(x)$可导，则称$\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$为函数$f(x)$当 x 从 x 变到 $x+\Delta x$ 时的相对弹性，称 $\eta=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=f'(x)\dfrac{x}{y}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}x$ 为函数$f(x)$的弹性函数，记为$\dfrac{Ey}{Ex}$，即

$$\eta=\frac{Ey}{Ex}=f'(x)\frac{x}{f(x)}.$$

它在经济学上解释为函数$f(x)$在 x 处的相对变化率.

② 经济学中常用的弹性分析：

(a) 需求的价格弹性：设需求函数 $Q=\varphi(p)$ (p 为价格)，则需求对价格的弹性为 $\eta_d=\dfrac{p}{\varphi(p)}\varphi'(p)$．由

于$\varphi(p)$是单调减少函数．故$\varphi'(p)<0$．从而 $\eta_d<0$．其经济学中的解释为：当价格为 p 时，若提价(或降价)1%，则需求量将减少(或增加)$|\eta_d|$%．

需要注意的是，很多试题中规定需求对价格的弹性 $\eta_d>0$，此时应该有公式 $\eta_d=-\frac{p}{\varphi(p)}\varphi'(p)$．

(b) 供给的价格弹性：设供给函数 $Q=\psi(p)$ (p 为价格)，则供给对价格的弹性为 $\eta_s=\frac{p}{\psi(p)}\psi'(p)$．由于供给函数$\psi(p)$单调增加，故$\psi'(p)>0$，从而 $\eta_s>0$．其经济学中的解释为：当价格为 p 时，若提价(或降价)1%，则供给量将增加(或减少)η_s%．

4．常见题目类型

(1) 证明某函数在某区间内有几个零点．

此类题往往是先利用导数研究函数的单调性、极值个数及大小等性态，然后由此得出所需的结论．

(2) 给出导函数的图形．要求判别函数的某些性态．

(3) 给出函数的图形，要求判断导函数的图形．

(4) 求函数的增减区间、凹凸区间．

(5) 求函数的极值、拐点、图形的渐近线．

(6) 利用单调性证明不等式．

(7) 利用拉格朗日定理证明不等式．

(8) 利用最大值、最小值证明不等式．

导数在实际问题中的应用方面，常见的题型是：

(9) 求由某含有参变量 a 的曲线和其他曲线所围成的图形的面积S，并求当 a 为何值时 S 达到最大(或最小)．

(10) 求由某含有参变量 a 的曲线所围平面图形绕着x(或 y)轴旋转所成旋转体体积 V．并求当 a 为何值时 V 达到最大(或最小)．

(11) 求实际问题中的“用料最省”、“花费最小”、“获利最大”等问题．

(12) 解决导数在经济学中的若干应用问题．常见的是：销售价(销量)为多少时利润最大、销量为多少时成本最小．求收益对价格的弹性，求需求对价格的弹性和求边际成本、边际利润等问题．

·例 题 详 解·

例 1.2.1 已知$f'(x_0)=-1$．则$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$________．

［答案］ 1．

［提示］ 本题主要考查导数的定义．题设条件是$f'(x_0)$存在．要求的是一个与$f(x)$有关的表达式的极限，且是“$\frac{0}{0}$”型的，这类题目常常提示是用$f'(x_0)$的定义来求极限，常用的方法是将表达式化为与

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

有关的形式．再用$f'(x_0)=-1$代入求出极限．

［解］ 由于

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{[f(x_0+(-2x))-f(x_0)]-[f(x_0-x)-f(x_0)]}{x}\\&=\lim_{x\to0}\left[(-2)\frac{f(x_0+(-2x))-f(x_0)}{-2x}+\frac{f(x_0+(-x))-f(x_0)}{-x}\right]\\&=-2f'(x_0)+f'(x_0)\\&=-f'(x_0)=1,\end{aligned}$$

所以，原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}}=1$.

［典型错误］ 有人按如下方法求此题：

因为
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-x+(-x))-f(x_0-x)}{-x}\\&=-f'(x_0-x),\end{aligned}$$
所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=-\frac{1}{f'(x_0-x)},$$
错误的原因在于没有掌握$f'(x_0)$的定义.

还有人用洛必达法则做此题：

因为
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x_0-2x)(-2)+f'(x_0-x)}{1}\\&=-f'(x_0)=1,\end{aligned}$$
所以 原式$=1$.

虽然得出的结果是正确的，但是过程是错误的，用到了“$f'(x)$在x_0的邻域内存在且在x_0处连续”这一本题没有的条件.

例 1.2.2 设函数$f(x)$有连续的导数，$f(0)=0$，且$f'(0)=b$. 若函数
$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$
在$x=0$处连续，则常数$A=$__________.

［答案］ $a+b$.

［提示］ 本题主要考查函数在一点处连续的定义和可导的定义. 主要条件是$F(x)$在$x=0$处连续，由此条件出发，则可确定A所应满足的条件.

［解］ 由于$F(x)$在$x=0$处连续，有
$$\lim_{x\to 0}F(x)=F(0)=A.$$
而
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}F(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}+a\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+a\\&=f'(0)+a=a+b.\end{aligned}$$
所以
$$A=a+b.$$

［典型错误］ 部分考生填写错误答案，原因可能是求极限错误所致.

例 1.2.3 曲线$y=x+\sin^2 x$在点$\left(\dfrac{\pi}{2},1+\dfrac{\pi}{2}\right)$处的切线方程是__________.

［答案］ $y=x+1$.

［提示］ 本题主要考查函数在一点处导数的几何意义以及初等函数的求导运算. 这是一道基本题.

［解］ 由于
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=1+2\sin x\cos x\\&=1+\sin 2x,\end{aligned}$$

则
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=1,$$
所以，曲线在点$\left(\frac{\pi}{2},\ 1+\frac{\pi}{2}\right)$处切线的斜率 $k=1$，切线方程为 $y-1-\frac{\pi}{2}=x-\frac{\pi}{2}$，即
$$y=x+1.$$

例 1.2.4 设曲线$f(x)=x^3+ax$ 与$g(x)=bx^2+c$ 都通过点$(-1,0)$，且在点$(-1,0)$处有公共切线．则 $a=$ ______，$b=$ ______，$c=$ ______．

［答案］ -1，-1，1．

［提示］ 本题主要考查导数的几何意义以及对两曲线的公共切线的理解．

［解］ 由题设知
$$\begin{cases}f(-1)=0,\\ g(-1)=0,\\ f'(-1)=g'(-1),\end{cases}$$
即
$$\begin{cases}-1-a=0,\\ b+c=0,\\ 3+a=-2b,\end{cases}$$
解得
$$a=-1,\ b=-1,\ c=1.$$

例 1.2.5 设(x_0,y_0)是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的一点，若在该点的切线过原点，则系数应满足的关系是______________．

［答案］ $\frac{c}{a}\geqslant 0$，b 任意(或 $ax_0^2=c$，b 任意)．

［提示］ 本题主要考查导数的几何意义以及曲线在一点切线的求法．

［解］ 曲线在(x_0,y_0)处的切线方程为
$$y-y_0=(2ax_0+b)(x-x_0).$$
由题设该切线过原点，于是有
$$-y_0=(2ax_0+b)(-x_0),$$
即
$$y_0=2ax_0^2+bx_0.$$
又由于(x_0,y_0)是曲线上的一点，所以有
$$y_0=ax_0^2+bx_0+c.$$
显然有
$$2ax_0^2+bx_0=ax_0^2+bx_0+c,$$
即
$$ax_0^2=c.$$
这便是 a，c 应满足的条件．而由题设条件没能推出 b 应满足的条件．故 b 任意．所以系数应满足的关系为：$ax_0^2=c$，b 任意．

由于上述的 x_0 的取值范围是$(-\infty,+\infty)$，所以 a，b，c 的关系可写成
$$\frac{c}{a}\geqslant 0,\ b\text{ 任意}.$$

［典型错误］ 填写 $y_0=2ax_0^2+bx_0$，c 任意．原因是没有注意到点(x_0,y_0)在曲线上．它应满足曲线的方程．

例 1.2.6 设曲线$f(x)=x^n$ 在点$(1,1)$处的切线与 x 轴的交点为$(\xi_n,0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ __________．

［答案］ $\frac{1}{\mathrm{e}}$．

［提示］ 本题主要考查导数的几何意义、曲线在一点切线的求法以及重要极限“$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$”的应用．按照题意先要求出 ξ_n．而 ξ_n 是曲线$f(x)=x^n$ 在$(1,1)$点处的切线与 x 轴交点的横坐标，所以，此题应先求曲线在$(1,1)$处的切线方程，再求 ξ_n，最后可求$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)$．

[解] 由题设，可求得曲线在(1,1)处的切线方程为

$$y-1=n(x-1).$$

令 $y=0$，可求得相应的 x，即 $\xi_n=1-\dfrac{1}{n}$.

代入 $f(x)=x^n$ 中，有

$$\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}.$$

例 1.2.7 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可通过 a 表示为 $b^2=$ ________.

[答案] $4a^6$.

[提示] 本题主要考查导数的几何意义以及对"曲线与 x 轴相切"这一条件的理解.

[解] 由题设知曲线过 x 轴上一点$(x_0,0)$，且

$$y'\Big|_{x=x_0}=0,$$

即

$$\begin{cases}x_0^3-3a^2x_0+b=0,\\3x_0^2-3a^2=0,\end{cases}$$

由此可得

$$x_0^2=a^2,$$

$$\begin{aligned}b^2&=(x_0^3-3a^2x_0)^2\\&=(x_0^3-3x_0^3)^2\\&=4x_0^6=4a^6.\end{aligned}$$

例 1.2.8 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$，则 $f'(t)=$ ________.

[答案] $(2t+1)e^{2t}$.

[提示] 本题主要考查含参变量的极限的求法以及分段函数的导数的求法.

[解] 由于当 $t\neq0$ 时，

$$\begin{aligned}f(t)&=t\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+t}{x-t}\right)^x\\&=t\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2t}{x-t}\right)^x\quad(\text{“}1^\infty\text{”型})\\&=t\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2t}{x-t}\right)^{\frac{x-t}{2t}}\right]^{\frac{2tx}{x-t}}\quad(\text{重要极限})\\&=te^{2t},\end{aligned}$$

则

$$f'(t)=(2t+1)e^{2t}.$$

当 $t=0$ 时，显然 $f(t)=0$，则

$$f'(0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to0}e^{2t}=1,$$

所以

$$\begin{aligned}f'(t)&=\begin{cases}(2t+1)e^{2t}, & t\neq0,\\1, & t=0\end{cases}\\&=(2t+1)e^{2t},\ t\ \text{任意}.\end{aligned}$$

例 1.2.9 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$ ________.

[答案] $\dfrac{3\pi}{4}$.

[提示] 本题主要考查复合函数的求导法则.

[解]

$$\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\frac{12}{(3x+2)^2},$$

而 $$f'(-1)=\arctan(-1)^2=\frac{\pi}{4},$$

所以 $$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f'(-1)\cdot\frac{12}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

[典型错误] 有的考生填$\frac{\pi}{4}$，原因可能是对复合函数的求导法则没有掌握好，在求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$时漏掉一个因子$\frac{12}{(3x+2)^2}$.

例 1.2.10 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中$f(x)$可微，则 $\mathrm{d}y=$__________.

[答案] $e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]\mathrm{d}x$.

[提示] 本题主要考查乘积的求导法则、复合函数的求导法则以及微分的计算.

[解] 由题设，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(\ln x)\frac{1}{x}e^{f(x)}+f(\ln x)e^{f(x)}f'(x)$$
$$=e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right],$$

所以 $$\mathrm{d}y=e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]\mathrm{d}x.$$

[典型错误] 不少同学将答案错写成$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的表达式. 虽然它们只差一个因子 $\mathrm{d}x$. 但是它们是不同的概念. 出错原因是将导数与微分的概念混淆.

例 1.2.11 设 $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$，则$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$__________.

[答案] $\frac{e-1}{e^2+1}$.

[提示] 本题主要考查复合函数的求导法则以及对数函数在求导运算中的特殊作用. 如注意到这个作用，可将运算化简，否则运算就会很复杂.

[解] 因为

$$y=\arctan e^x-\frac{1}{2}[2x-\ln(e^{2x}+1)],$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^x}{1+e^{2x}}-1+\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1},$$

故 $$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{e-1}{1+e^2}.$$

[典型错误] 一些考生填写了错误答案，原因可能是在对 $\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$求导时没有先变形、化简计算，而是直接用复合函数的求导法则，由于计算复杂导致了错误.

例 1.2.12 设方程 $e^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 y 为 x 的函数，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

[答案] $-\frac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}$.

[提示] 本题主要考查隐函数的求导法则.

[解] 方程 $e^{xy}+y^2=\cos x$ 两边对x求导，将 y 看成x 的函数，得

$$e^{xy}(y+xy')+2yy'=-\sin x.$$

解得 $$y'=-\frac{ye^{xy}+\sin x}{xe^{xy}+2y}.$$

例 1.2.13 设方程 $x=y^y$ 确定 y 是x 的函数，$\mathrm{d}y=$__________.

[答案] $\frac{1}{x(1+\ln y)}\mathrm{d}x\left(或\frac{1}{y^y(1+\ln y)}\mathrm{d}x\right)$.

[提示] 本题主要考查隐函数的求导方法、反函数的求导法则或幂指函数的求导法则.

[解法 1] 两端先取对数，得

$$\ln x = y\ln y.$$

两边对 x 求导，y 是 x 的函数，有

$$\frac{1}{x}=y'\ln y+y\cdot\frac{1}{y}y',$$

即

$$y'=\frac{1}{x(1+\ln y)},$$

所以

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{x(1+\ln y)}\mathrm{d}x.$$

[解法 2] 由于 $x=e^{y\ln y}$，故

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=e^{y\ln y}(\ln y+1)=y^y(\ln y+1).$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y^y(\ln y+1)}=\frac{1}{x(\ln y+1)}.$$

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{x(\ln y+1)}\mathrm{d}x.$$

[典型错误] 将答案写成$\frac{1}{x(\ln y+1)}$，原因是将函数的导数与函数的微分混淆.

例 1.2.14 设 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，则 $y'''\Big|_{x=\sqrt{3}}=$__________.

[答案] $\frac{5}{32}$.

[提示] 本题主要考查初等函数高阶导数的运算，其中用到复合函数的求导法则.

[解]

$$\begin{aligned}
y'&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\\
y''&=(y')'=\left((1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'\\
&=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\\
&=-\frac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}.\\
y'''&=-\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3-\frac{3}{2}\sqrt{1+x^2}\cdot 2x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^6}\\
&=-\frac{1-2x^2}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^5},
\end{aligned}$$

所以

$$y'''\Big|_{x=\sqrt{3}}=\frac{5}{32}.$$

[典型错误] 本题在运算中，反复用到复合函数的求导法则，需要熟练掌握求导法则和公式. 否则，就会在中间某过程中出错而影响整题的计算结果.

例 1.2.15 设函数$f(x)$在 $x=2$ 的某邻域内可导，且$f'(x)=e^{f(x)}$，$f(2)=1$，则$f'''(2)=$__________.

[答案] $2e^3$.

[提示] 本题主要考查复合函数的求导运算，只要注意到在运算过程中代入“$f'(x)=e^{f(x)}$”即可计算出正确答案.

[解] $$f''(x)=e^{f(x)}f'(x)=e^{f(x)}e^{f(x)}=e^{2f(x)},$$
再对 $f''(x)$ 求导，得
$$f'''(x)=e^{2f(x)}2f'(x)=2e^{2f(x)}e^{f(x)}=2e^{3f(x)}.$$
代入 $x=2$，得 $f'''(2)=2e^3$.

[典型错误]

① 一些考生填写了"e^2+e^3"，可能是在求三阶导数时出现如下错误：
$$f''(x)=e^{f(x)}f'(x), f''(2)=e^2,$$
$$f'''(x)=e^{f(x)}f'(x)+e^{f(x)}f''(x).$$
由此得到错误结论 $f'''(2)=e^2+e^3$. 原因是对复合函数的求导运算不熟练.

② 少数考生填写了"e^{e^e}"，可能是有如下的错误运算：
$$f''(x)=(e^{f(x)})'=e^{f'(x)}=e^{e^{f(x)}},$$
$$f'''(x)=e^{(e^{f(x)})'}=e^{e^{e^{f(x)}}}.$$
代入 $x=2$，得 $f'''(2)=e^{e^e}$. 原因也显然是对复合函数的求导运算不熟练.

例 1.2.16 设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$________.

[答案] $\frac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

[提示] 本题主要考查高阶导数的运算方法，尤其是对任意正整数 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$. 其方法是对 $n=1,2,3,\cdots$ 进行计算，归纳出一般的 $f^{(n)}(x)$ 的公式.

[解] $f'(x)=\frac{-2}{(1+x)^2}$,

$f''(x)=\frac{(-2)(-2)}{(1+x)^3}$,

$f'''(x)=\frac{(-2)(-2)(-3)}{(1+x)^4}$,

$f^{(4)}(x)=\frac{(-2)(-2)(-3)(-4)}{(1+x)^5}$,

……

所以，$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.

[典型错误] 一些考生错填为 $\frac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^n}$ 或 $\frac{(-1)^n 2^n}{(1+x)^{n+1}}$，原因是将低阶导数求错或归纳错误.

例 1.2.17 某商品的需求量 Q 与价格 p 的函数关系为 $Q=ap^b$. 其中 a 和 b 为常数，且 $a\neq 0$. 则需求量对价格 p 的弹性是________.

[答案] b.

[提示] 本题主要考查弹性的定义，直接用公式"$\eta=\frac{Q'(p)}{Q(p)}p$"计算即可.

[解] 由于 $Q'(p)=abp^{b-1}$,

所以弹性
$$\eta=\frac{abp^{b-1}}{ap^b}\cdot p=b.$$

[典型错误] 一些考生没有填答案，原因是不知弹性的定义和计算方法.

例 1.2.18 设商品的需求函数为 $Q=100-5p$，其中 Q，p 分别表示需求量和价格. 如果商品需求弹性的绝对值大于 1，则商品价格的取值范围是________.

[答案] $(10,20]$.

[提示] 本题主要考查弹性的定义与计算. 先按定义写出弹性函数，令 $|\eta|>1$，反求出 p 的范围.

[解] 由于 $Q'=-5$，所以

$$\eta=\frac{Q'}{Q}p=\frac{-5p}{100-5p}.$$

令 $|\eta|>1$，解得 $p>10$.

又由 $Q\geqslant0$，即 $100-5p\geqslant0$，得 $p\leqslant20$，所以 p 的取值范围为 $(10,20]$.

[典型错误] 有的考生填 $(10,+\infty)$，原因为没有意识到 Q 是需求函数. 应有"$Q\geqslant0$"这一隐含条件.

例 1.2.19 设 $f(x)=xe^x$，则 $f^{(n)}(x)$ 在点 $x=$ ________ 处取极小值 ________.

[答案] $-(n+1)$，$-e^{-(n+1)}$.

[提示] 本题主要考查高阶导数的运算以及函数极值的概念与求法. 本题先要根据 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$ 等归纳出 $f^{(n)}(x)$ 的表达式，再对 $f^{(n)}(x)$ 求极小值点与极小值.

[解] 由

$$f'(x)=(x+1)e^x.$$
$$f''(x)=(x+2)e^x,$$
$$f'''(x)=(x+3)e^x,$$
$$\cdots\cdots$$

归纳出
$$f^{(n)}(x)=(x+n)e^x.$$

令
$$f^{(n+1)}(x)=(x+n+1)e^x=0,$$

解得函数 $f^{(n)}(x)$ 的驻点
$$x_0=-(n+1).$$

又
$$f^{(n+2)}(x_0)=(n+2-n-1)e^{-(n+1)}=e^{-(n+1)}>0.$$

所以 $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 处取得极小值，极小值为

$$f^{(n)}(x_0)=(-n-1+n)e^{-(n+1)}=-e^{-(n+1)}.$$

[典型错误] 一些考生误填 $-n$，$-e^{-n}$，原因是令 $f^{(n)}(x)=0$ 来求驻点了.

例 1.2.20 设函数 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，$-\infty<x<+\infty$，

(Ⅰ) $f'(x)=$ ________；

(Ⅱ) $f(x)$ 的单调性：________；

(Ⅲ) $f(x)$ 的奇偶性：________；

(Ⅳ) $f(x)$ 图形的拐点：________；

(Ⅴ) $f(x)$ 的图形的凹凸性：________；

(Ⅵ) $f(x)$ 的图形的水平渐近线：________.

[答案] $e^{-\frac{x^2}{2}}$；单调增加；奇函数；$(0,0)$；$x<0$ 时凹而 $x>0$ 时凸；$y=\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

[提示] 本题主要考查变上限函数的求导和利用导数研究函数性态的方法. 是一道考查综合知识的题目.

[解] 由于 $f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}>0$，所以 $f(x)$ 单调增加.

又
$$f(-x)=\int_0^{-x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\quad(u=-t)$$
$$=-\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$$
$$=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

由于
$$f''(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

所以当 $x<0$ 时，$f''(x)>0$，$f(x)$ 的图形凹；

当 $x>0$ 时，$f''(x)<0$，$f(x)$ 的图形凸，

因而点 $(0,0)$ 是 $f(x)$ 的图形的拐点.

又由于

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\quad\left(由\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}\right),$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

所以函数$f(x)$的图形有水平渐近线 $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$和 $y=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

[典型错误] 有的考生不会求水平渐近线，或写错为 $y=0$，其原因是没有记住积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi},$$

或不会应用这个结果来求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

还有的考生将(Ⅲ)填为偶函数，原因是对积分上限的函数表达式理解不正确，采用如下方法判断：

$$f(-x)=\int_0^x e^{-\frac{(-t)^2}{2}}dt$$

$$=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt=f(x).$$

例 1.2.21 设函数$f(x)$对任意 x 均满足等式$f(1+x)=af(x)$，且有$f'(0)=b$，其中 a，b 为非零常数，则( ).

(A) $f(x)$在 $x=1$ 处不可导　　(B) $f(x)$在 $x=1$ 处可导，且$f'(1)=a$

(C) $f(x)$在 $x=1$ 处可导，且$f'(1)=b$　　(D) $f(x)$在 $x=1$ 处可导，且$f'(1)=ab$

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查函数在一点可导的定义．由于四个选项中均涉及$f'(1)$，故应从$f'(1)$的定义入手．一旦写出$f'(1)$的定义，将不难用题设条件使问题得到解决．

[解] 由题知$f(1+x)=af(x)$，$f(1)=f(1+0)=af(0)$，考察极限

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{af(x)-af(0)}{x}$$

$$=a\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=af'(0)=ab,$$

所以$f'(1)$存在，且为 ab．应选择(D).

[典型错误] 部分考生不会做本题，原因是对导数的定义不熟，不会应用条件“$f(1+x)=af(x)$”，尤其是不会从中推出$f(1)$的表达式.

例 1.2.22 设函数$f(x)$在 $x=0$ 处连续，且$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$，则( ).

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$存在　　(B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$存在

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$存在　　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$存在

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查连续函数的定义、导数的定义及左、右导数的定义.

[解] 由$\lim\limits_{h\to0}=\frac{f(h^2)}{h^2}=1$ 可知

$$\lim_{h\to0}f(h^2)=0.$$

又 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，故$\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=f(0)$，所以$f(0)=0$，从而又有

$$1=\lim_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f(h^2)-f(0)}{h^2}=f'_+(0),$$

故$f'_+(0)=1$，所以 (C) 正确，而(A)不正确.

(B)、(D)显然不正确：若$f(0)=1$，则$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=\infty$，与题设不符.

[典型错误] 部分考生选择(D)，这是对函数连续性的概念没有掌握，概念模糊所致.

例 1.2.23 设$f(x)$为不恒为零的奇函数，且$f'(0)$存在．则函数$g(x)=\frac{f(x)}{x}$(　　).

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在　　(D) 有可去间断点 $x=0$

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查导数的定义以及函数在一点连续的概念．分析四个选项知，它们都与$g(x)$在 $x=0$ 处的极限有关系．根据极限$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$的情况，可做出正确的选择．故应从极限$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$入手.

[解]

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}g(x)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\quad(\text{由 } f(x)\text{为奇函数,有 } f(0)=0)\\&=f'(0).\end{aligned}$$

由$\lim\limits_{x\to 0}g(x)$存在，知前三个选项都不对．故(D)正确.

[典型错误] 部分考生选择错误．原因是对导数的定义掌握不熟练，因而不会求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$；有的可能是对间断点的分类理解不清，不会区分跳跃间断点与可去间断点.

例 1.2.24 设函数$f(x)$在点 $x=a$ 处可导，则函数$|f(x)|$在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是(　　).

(A) $f(a)=0$ 且$f'(a)=0$　　(B) $f(a)=0$ 且$f'(a)\neq 0$

(C) $f(a)>0$ 且$f'(a)>0$　　(D) $f(a)<0$ 且$f'(a)<0$

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查导数的定义、导数存在与连续性的关系以及连续函数的性质.

[解] 由于$f(x)$在 $x=a$ 处可导，故$f(x)$必在点 $x=a$ 处连续.

如果$f(a)\neq 0$，则在 $x=a$ 的某邻域内有$f(x)$也不为零且与$f(a)$同号，此时$|f(x)|=f(x)$，或$|f(x)|=-f(x)$，而$f(x)$在 $x=a$ 处可导，故$|f(x)|$在 $x=a$ 处可导．因此，(C)、(D)两选项的条件不是$|f(x)|$在 $x=a$ 不可导的充分条件.

如果$f(a)=0$ 且$f'(a)=0$，即选项(A)，也不能保证$|f(x)|$在 $x=a$ 处不可导．例如$f(x)=x^3$，$a=0$，满足(A)的条件．但是

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^3}{x}=0.$$

即$|f(x)|=|x^3|$在 $x=0$ 处可导．所以(A)也不对.

再来看(B)，$f(a)=0$，$f'(a)\neq 0$，考察极限

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}\\&=\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|}{-|x-a|}=-\lim_{x\to a^-}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=-|f'(a)|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}\\&=\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|}{|x-a|}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=|f'(a)|.\end{aligned}$$

由于$f'(a)\neq 0$，所以$-|f'(a)|\neq|f'(a)|$，即极限

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$$

不存在，故$|f(x)|$在 $x=a$ 处不可导．(B)正确.

[典型错误] 有考生选择(A). 可能只是考虑了当$f(a)=0$时，在$x=a$处函数$f(x)$与$|f(x)|$的性态会不同，可能会导致$|f(x)|$不可导，没有仔细考虑条件“$f'(a)=0$”和“$f'(a)\neq 0$”的含义.

例 1.2.25 设函数$f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中$\varphi(x)$在$x=1$处连续，则$\varphi(1)=0$是$f(x)$在$x=1$处可导的(　　).

(A) 充分必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充分但非必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查函数在一点处可导的定义. 依题意只需考虑“$\varphi(1)=0$”在“$f'(1)$”存在性中的作用. 先依定义写出$f'(1)$的表达式，从中可看出“$\varphi(1)=0$”所起的作用.

[解] 考虑极限

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x^3-1|\varphi(x)}{x-1}.$$

由于$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^3-1|}{x-1}$不存在(左、右极限不相等)，但$\dfrac{|x^3-1|}{x-1}$在$x=1$的某去心邻域内是有界变量，所以容易看出：

若$\varphi(1)=0$，即$\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^3-1|\varphi(x)}{x-1}=0$(有界变量乘无穷小量还是无穷小量)；

若$\varphi(1)\neq 0$，即$\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=\varphi(1)\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^3-1|\varphi(x)}{x-1}$不存在(左、右极限不相等).

综上可知，$\varphi(1)=0$是极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$存在的充分必要条件. 所以(A)正确.

[典型错误] 有的考生选择(C). 原因是没有注意到极限“$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^3-1|\varphi(x)}{x-1}$”当$\varphi(1)\neq 0$时是不存在的，没有验证一下左、右极限在此时是不相等的，误以为它还可能存在.

例 1.2.26 设$f(x)$为可导函数，且满足条件

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1,$$

则曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线斜率为(　　).

(A) 2　　(B) -1　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) -2

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查导数的几何意义以及导数的定义.

[解] 由导数的几何意义知，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的斜率$k=f'(1)$.

又由题设条件，有

$$\begin{aligned}-1&=\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(-x))-f(1)}{-x}\\&=\frac{1}{2}f'(1),\end{aligned}$$

所以有

$$f'(1)=-2,$$

即有$k=-2$. 故(D)正确.

[典型错误] 有考生选择(A). 原因是对导数定义掌握不好或不熟练，误以为下式成立：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{x}=f'(1),$$

导致结果相差一个负号.

例 1.2.27 设周期函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，周期为 4．又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$．则曲线 $y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的切线的斜率为(　　)．

(A) $\dfrac{1}{2}$　　　(B) 0　　　(C) -1　　　(D) -2

[答案] (D)．

[提示] 本题主要考查导数的几何意义、函数在一点可导的定义以及函数的周期性．由函数的周期为 4 可知，曲线 $y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的切线的斜率应与它在点$(1,f(1))$处的斜率相同．只要求出$(1,f(1))$处的切线斜率即可．

[解] 由题设条件可知

$$
\begin{aligned}
-1&=\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}\\
&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+(-x))-f(1)}{-x}\\
&=\frac{1}{2}f'(1),
\end{aligned}
$$

所以有　$f'(1)=-2$，即在点$(5,f(5))$处的切线斜率为-2，故(D)正确．

例 1.2.28 若函数 $f(x)$在区间(a,b)内可导，x_1 和 x_2 是(a,b)内任意两点，且 $x_1<x_2$，则至少存在一点 ξ，使(　　)．

(A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，其中 $a<\xi<b$

(B) $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1)$，其中 $x_1<\xi<b$

(C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，其中 $x_1<\xi<x_2$

(D) $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a)$，其中 $a<\xi<x_2$

[答案] (C)．

[提示] 本题主要考查拉格朗日中值定理的条件．四个选项只是在不同的区间上应用拉格朗日中值定理，只需看在哪个区间上满足拉格朗日中值定理的条件．

[解] 由题设知 $f(x)$在(a,b)内可导，当然在$[x_1,x_2]$上连续，在(x_1,x_2)内可导，故在$[x_1,x_2]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故(C)正确．

由题设并不能推知 $f(x)$在 a，b 两点上的连续性．故在其他三个闭区间上 $f(x)$的连续性不能保证，(A)、(B)、(D)不正确．

[典型错误] 有考生选择(A)．原因是没有弄清拉格朗日中值定理的条件，也没有再看其他选项．其实若考生再往下看看其他选项，就知若(A)正确，则(B)、(D)都正确，这是不可能的，再经过仔细考虑，就知(C)是正确的．

例 1.2.29 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义，在开区间(a,b)内可导，则(　　)．

(A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$

(B) 对任何 $\xi\in(a,b)$，有$\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$

(C) 当 $f(a)=f(b)$时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$

(D) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

[答案] (B)．

[提示] 本题主要考查对连续函数的零点存在定理、罗尔定理和拉格朗日中值定理的条件的掌握．

[解] 对于任取的 $\xi\in(a,b)$，$f(x)$在 $x=\xi$ 处可导．故 $f(x)$在 ξ 处连续，所以有

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]&=\lim_{x\to\xi}f(x)-f(\xi)\\
&=f(\xi)-f(\xi)=0.
\end{aligned}
$$

所以(B)正确．

对于其他三个选项，它们都需要“$f(x)$在$[a,b]$上连续”这个条件，而题设的条件“$f(x)$在(a,b)内可

导”并不能保证 $f(x)$ 在 a、b 两个端点的连续性．故(A)、(C)、(D)不正确．

[典型错误] 选择(A)．原因是从“$f(x)$ 在 (a,b) 内可导”这一条件误认为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由零点定理知(A)正确，这是因为考生没有将其他选项看完．若看完后就会知道，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则(A)、(C)、(D)都正确，这是不可能的．所以考生在做选择题时，应最好将选项都看一遍，以免类似情况出现．

例 1.2.30 设 $f(x)$ 处处可导，则(　　)．

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$　(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$　(D) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查拉格朗日中值定理的应用．此题四个选项中都是涉及 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的关系问题，而拉格朗日中值定理可以将 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 联系起来．故此题可从拉格朗日中值定理入手，将 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 联系起来，看看能推出哪个结论．

[解] 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$，则存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，$f'(x)>1$．

取 $x>x_0>X$，由拉格朗日中值定理，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0)+(x-x_0). \tag{*}$$

令 $x\to+\infty$，有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$，所以(A)正确．

由(*)式还可看出，要使 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，不一定要有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$，只需 $f'(\xi)$ 大于某个正数即可．例如 $f(x)=2x$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=2$．故(B)不正确．

再取 $f(x)=x^2$，则有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty$，但是 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$．故(C)不正确．

取 $f(x)=2x$，可看出(D)也不正确．

例 1.2.31 以下四个命题中，正确的是(　　)．

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查对连续函数性质的理解和拉格朗日中值定理的应用．

[解] 若取 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，由此容易看出(A)、(B)均不正确．

若取 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，由此可知(D)不正确．

下面说明(C)的正确性．

任取 x_0，$x\in(0,1)$，由题意知 $f(x)$ 在 $[x_0,x]$(或 $[x,x_0]$)上满足拉格朗日中值定理的条件，于是有

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0),$$

因而有

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant|f(x_0)|+|f'(\xi)|\,|x-x_0|\\&\leqslant|f(x_0)|+|f'(\xi)|,\end{aligned}$$

由此可看出，由 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内的有界性即可推出 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的有界性，故(C)正确．

[典型错误] 在考试中，有不少的考生选择(B)．原因可能是将“闭区间上的连续函数必在该区间上有界”这一性质用在了开区间上所导致的．此题需要考生正确理解闭区间上连续函数的性质，还要能迅速找出反例来排除错误选项．

例 1.2.32 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是(　　)．

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$　(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$　　(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$

［答案］ (D).

［提示］ 本题主要考查考生对闭区间上连续函数的零点存在定理、函数在一点可导的定义等概念的掌握程度及运用能力．注意本题是选出错误选项．

［解］ 由 $f'(a)>0$，知

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0.$$

由极限的性质可知，在 $x=a$ 的某右邻域内必有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

而
$$x-a>0,$$
所以有
$$f(x)-f(a)>0,$$
即在 $x=a$ 的某右邻域内 $f(x)>f(a)$，故(A)的结论正确．同理，由 $f'(b)<0$ 可知(B)的结论也正确．

由闭区间上连续函数的零点存在定理可知(C)的结论正确．

对于(D)，由题设条件不能保证存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=0$．例如，取 $f(x)=1-x^2$，区间取 $[-1,1]$，此时的 $f(x)$ 完全满足题设条件，但在 $(-1,1)$ 内 $f(x)>0$，(D)的结论不成立．

所以，符合题目要求的选项是(D).

［典型错误］ 有的考生选择(C)，原因可能是没看清题意，而在四个选项中挑选正确的结论了．由 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上的连续性，再用零点定理，选择(C).

例 1.2.33　设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则下列选项正确的是(　　).

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(D) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

［答案］ (D).

［提示］ 本题主要考查利用导数判断曲线拐点和函数单调性的方法以及函数的极值等概念．仅由题设“$f'(x_0)=f''(x_0)=0$”这一个条件，(A)、(B)、(C)、(D)的结论都可能出现，容易举出相应的例子．所以，欲作出正确判断，应从条件“$f'''(x_0)>0$”入手，这是一个关键的条件．

［解］ 由题设条件，有

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0.$$

由极限的保号性，在 $x=x_0$ 的某去心邻域内有

$$\frac{f''(x)}{x-x_0}>0.$$

在上述邻域内，当 $x<x_0$ 时，$f''(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$f''(x)>0$.

由曲线凹凸性的判别法知，在 x_0 的左邻域内，曲线 $y=f(x)$ 是凸的；在 x_0 的右邻域内，曲线 $y=f(x)$ 是凹的．又显然 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，故 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，(D)正确．

又由 $x<x_0$ 时，$f''(x)<0$，可知 $f'(x)$ 单调递减；由 $x>x_0$ 时，$f''(x)>0$，可知 $f'(x)$ 单调递增．所以在上述邻域内，$f'(x)>f'(x_0)=0$，即 $f(x)$ 在该邻域内单调增加，故(A)、(B)、(C)都不正确．

［典型错误］ 选择(A)．原因是记错了极值的判别条件，又不会应用条件“$f'''(x_0)>0$”来推出在 $x=x_0$ 左、右侧的二阶导数 $f''(x)$ 的符号情况．

例 1.2.34　设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是(　　).

(A) $f(0)$ 是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极小值　　(B) $f(0)$ 是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极大值

(C) $f(0)$ 是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值　　(D) $f(0)$ 是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值

［答案］ (B).

[提示] 本题主要考查考生对求函数极值方法的掌握情况，通过基本计算即可作出判断.

[解]
$$f'(x)=x\cos x,$$
则
$$f'(0)=0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$
又
$$f''(x)=\cos x-x\sin x,$$
则
$$f''(0)=1>0,\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0.$$

由函数极值判别的必要条件和充分条件知，$x=0$ 是 $f(x)$的极小值点，$x=\frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$的极大值点. 故(B)正确.

例 1.2.35　设 $f(x)$的导数在 $x=a$ 处连续，又$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1$，则(　　).

(A) $x=a$ 是$f(x)$的极小值点

(B) $x=a$ 是$f(x)$的极大值点

(C) $(a,f(a))$是曲线 $y=f(x)$的拐点

(D) $x=a$ 不是$f(x)$的极值点，$(a,f(a))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查考生对函数极值概念和曲线拐点概念的掌握情况，还考查到一些极限的性质. 本题的主要条件是"$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1$"，应从此条件入手，应用极限的性质，推出所要的结论.

[解] 由于
$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1,$$
由极限的性质可知，存在 $x=a$ 的邻域，使
$$\frac{f'(x)}{x-a}<0.$$

进一步可推出，在此邻域内：当 $x<a$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>a$ 时，$f'(x)<0$. 又 $f(x)$在 $x=a$ 处连续、可导. 所以，由极值判别的充分条件知，$f(x)$在 $x=a$ 处取得极大值，故(B)正确.

例 1.2.36　设函数 $y=f(x)$具有二阶导数，且$f'(x)>0,f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为$f(x)$在 x_0 处对应的增量与微分. 若 $\Delta x>0$，则(　　).

(A) $0<dy<\Delta y$　　　(B) $0<\Delta y<dy$

(C) $\Delta y<dy<0$　　　(D) $dy<\Delta y<0$

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查应用导数判断函数单调性、凹凸性的能力以及对微分的几何意义的掌握程度等，综合性较强.

[解] 由题设条件知函数 $y=f(x)$的图像是单调增加且是凹的. 再由微分的几何意义得到如图 1.2.1 所示的图形.

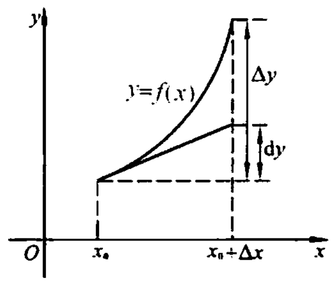

图 1.2.1

由此图可知 Δy，$dy>0$，且 $dy<\Delta y$，故只有(A)正确，其他选项均错误.

本题也可以用分析的方法求解.

由 $\Delta x>0$ 和$f(x)$单调增加可知 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>0$,且 $dy=f'(x_0)\Delta x>0$，故(C)、(D)是错误的. 下面再判断 $\Delta y-dy$ 的符号即可：
$$\begin{aligned}\Delta y-dy&=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x\\&=f'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x-f'(x_0)\Delta x\quad\text{（拉格朗日中值定理）}\\&=f''(x_0+\theta_1\theta_2\Delta x)\theta_1\Delta x^2\quad\text{（拉格朗日中值定理）},\end{aligned}$$
其中,$0<\theta_1,\theta_2<1$.由$f''(x)>0$ 知 $\Delta y-dy>0$. 故(A)正确，而(B)不正确.

[典型错误] 部分考生选择(B)，原因可能是将函数的凹凸性弄反了. 还有考生选择其他错误选项，原因

是不清楚微分的几何意义.

例 1.2.37　确定常数 a 和 b，使函数 $f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>1,\\ x^2, & x\leqslant 1\end{cases}$ 处处可导.

[提示]　本题主要考查函数可导的定义以及可导与连续性的关系. 对于分段函数，在分界点处可导就意味着在分界点处的左导数等于右导数，此外，还必须具备左极限等于右极限的前提条件，由此，可推出 a，b 满足的条件，从而求出 a，b 的值.

[解]　由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，所以有

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1).$$

即有

$$a+b=1.$$

又由于 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，所以有

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1},$$

即有

$$a=2.$$

从而当 $a=2$，$b=-1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，进而处处可导.

[典型错误]　有的考生采取如下做法：

当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^2$，所以 $f'(x)=2x$，从而 $f'_-(1)=2$；当 $x>1$ 时，$f(x)=ax+b$. 所以 $f'(x)=a$，从而 $f'_+(1)=a$. 要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，应有 $f'_-(1)=f'_+(1)$，即 $a=2$. 所以，当 $a=2$，b 任意时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，进而在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导.

显然，当 $b\neq -1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，当然也不可导. 所以上述解法是错误的. 错误产生的原因是：

① 没有设定分段函数在分界点处的连续性.

② 如上求左、右导数的方法不是一个一般情况下就正确的方法.

例 1.2.38　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t, & x>0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

[提示]　本题主要考查函数在一点处连续、可导的定义以及定积分变上限函数的导数的求法. 对于分段函数，在分界点处的连续性要看在该点的“左极限 = 右极限 = 函数值”是否成立，在分界点处的导数要看在该点处“左导数 = 右导数”是否成立，分别予以判断即可.

[解]

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(1-\cos x)}{x^2}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x^2}{1}=1,$$

显然有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x-2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(\cos x-1)}{6x}=0,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t-x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x^2 - 1}{2x} = 0,$$

有

$$f'_-(0) = f'_+(0),$$

故 $f(x)$在 $x=0$ 处可导.

[典型错误] 部分考生在求左、右导数 $f'_-(0)$和 $f'_+(0)$时，用以下方法做：

当 $x<0$ 时，

$$f'(x) = \frac{2x\sin x - 4(1-\cos x)}{x^3},$$

所以

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 2\lim_{x\to 0^-} \frac{x\cos x - \sin x}{3x^2} = 2\lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sin x}{6x} = 0;$$

当 $x>0$ 时，

$$f'(x) = \frac{x\cos x^2 - \int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{x^2},$$

所以

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^2\sin x^2}{2x} = 0,$$

$$f'_-(0) = f'_+(0),$$

故 $f(x)$在 $x=0$ 处可导. 以上求 $f'_-(0)$和 $f'_+(0)$的方法不是一个在一般情况下都正确的方法.

例 1.2.39 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - \mathrm{e}^{-x}}{x}, & 若\ x\neq 0, \\ 0, & 若\ x=0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$有二阶连续导数，且 $g(0)=1$，$g'(0)=-1$.

（Ⅰ）求 $f'(x)$；

（Ⅱ）讨论 $f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的连续性.

[提示] 本题主要考查分段函数的导函数的求法、导数的定义以及分段函数的连续性的判断. 对于分段函数，在定义区间内若函数是初等函数，可用公式求导. 在定义区间的分界点处的导数，则要用导数的定义求解.

[解] （Ⅰ）当 $x\neq 0$ 时，$f'(x) = \dfrac{xg'(x) - g(x) + (x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$；

当 $x=0$ 时，

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - \mathrm{e}^{-x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g'(x) + \mathrm{e}^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g''(x) - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2}.$$

所以，

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xg'(x) - g(x) + (x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}, & x\neq 0, \\ \dfrac{g''(0) - 1}{2}, & x=0. \end{cases}$$

（Ⅱ）由于

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xg''(x) - x\mathrm{e}^{-x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g''(x) - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{g''(0) - 1}{2},$$

显然

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0),$$

所以 $f'(x)$在 $x=0$ 处连续，而 $x\neq 0$ 时 $f'(x)$显然连续，故 $f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

[典型错误] 部分考生在解(Ⅱ)时，用“可导必连续”来作为 $f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续的理由．错误原因是没有理解“可导必连续”的真正含义是“若 $f'(x_0)$存在，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 处连续”，而不是“若 $f'(x_0)$存在，则$f'(x)$在 $x=x_0$ 处连续”．

例 1.2.40　已知函数 $y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$，试求其单调区间、极值点及图形的凹凸性、拐点和渐近线，并画出函数的图形．

[提示] 本题主要考查考生应用导数来研究函数性态的能力．依题意，需要用到函数数值、拐点、单调性、凹凸性等概念以及相应的计算方法，所以，本题是一道综合题目．依导数应用的相关内容，本题应首先将满足方程“$y'=0$ 和 $y''=0$”的点求出，用这些点将函数的定义域划分成单调性和凹凸性不变的子区间．经过分析得出所求．

[解]
$$y'=\frac{4x}{(1-x)^3},\qquad y''=\frac{8x+4}{(1-x)^4}.$$

令 $y'=0$，得 $x=0$；令 $y''=0$，得 $x=-\dfrac{1}{2}$．列表及分析如下：

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	(0,1)	$(1,+\infty)$
y'	−		−		+	−
y''	−		+		+	+
y	↘	拐点	↘	极小值	↗	↘

从表中可知，单调增加区间为(0,1)，单调减少区间为$(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$；函数在 $x=0$ 处有极小值 $f(0)=0$；函数的图形在$\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$，$(1,+\infty)$内是凹的，在$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$内是凸的；点$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{9}\right)$是曲线的拐点．

又$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$，所以 $y=2$ 是图形的水平渐近线；由$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$，知 $x=1$ 是图形的铅直渐近线．

函数的图形见图 1.2.2．

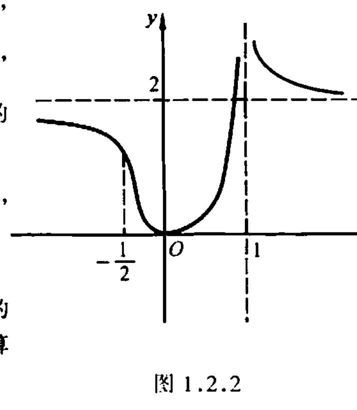

图 1.2.2

[典型错误] 部分考生在解题开始将 y'或y''算错，而导致后面的分析结果、图形都错了．所以，在解此类题时，必须保证 y'，y''的计算正确．

例 1.2.41　运用导数的知识作函数 $y=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$的图形．

[提示] 同例 1.2.40．

[解] $y'=\dfrac{x^2-x-6}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$，$y''=\dfrac{13x+6}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$．

令 $y'=0$，得 $x=-2$，$x=3$；令 $y''=0$，得 $x=-\dfrac{6}{13}$．列表及分析如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$\left(-2,-\frac{6}{13}\right)$	$-\frac{6}{13}$	$\left(-\frac{6}{13},0\right)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+		−		−		−		+
y''	−		−		+		+		+
y	╭	极大值	╮	拐点	╰		╰	极小值	╯

从表中可知，极大值为 $f(-2)=\frac{4}{\sqrt{e}}$，极小值为 $f(3)=9\sqrt[3]{e}$，拐点 $\left(-\frac{6}{13},\ \frac{72}{13}e^{-\frac{13}{6}}\right)$.

由 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ 知 $x=0$ 是铅直渐近线；

由

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+6)e^{\frac{1}{x}}}{x}=1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)&=\lim_{x\to\infty}\left[(x+6)e^{\frac{1}{x}}-x\right]\\&=\lim_{t\to0}\frac{(1+6t)e^{t}-1}{t}\quad\left(t=\frac{1}{x}\right)\\&=\lim_{t\to0}\frac{6e^{t}+(1+6t)e^{t}}{1}\quad(\text{洛必达法则})\\&=7,\end{aligned}$$

可知 $y=x+7$ 为斜渐近线.

综上可绘出函数的图形，见图 1.2.3.

[典型错误] 部分考生不考虑曲线的渐近线，或求错了，使得所作图形错误.

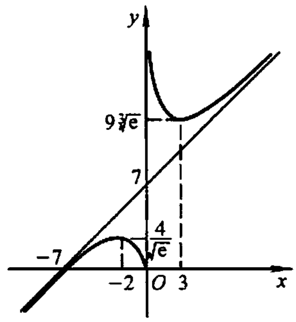

图 1.2.3

例 1.2.42 给定曲线 $y=\frac{1}{x^2}$.

(Ⅰ) 求曲线在横坐标为 x_0 的点处的切线方程；

(Ⅱ) 求曲线的切线被两坐标轴所截线段的最短长度.

[提示] 本题主要考查导数的几何意义以及求函数最值的方法. 依题意应先写出 $\left(x_0,\ \frac{1}{x_0^2}\right)$ 点处的切线方程，再求出题设线段的长度. 显然这个长度是 x_0 的函数. 最后，求该函数的最小值.

[解] (Ⅰ) 点 $\left(x_0,\ \frac{1}{x_0^2}\right)$ 处的切线的斜率为

$$y'\Big|_{x=x_0}=-\frac{2}{x_0^3}.$$

则该点处的切线方程为

$$y-\frac{1}{x_0^2}=-\frac{2}{x_0^3}(x-x_0).$$

(Ⅱ) 在上述切线方程中分别令 $x=0$ 和 $y=0$，得到该切线在两个坐标轴上的截距为

$$y=\frac{3}{x_0^2},\quad x=\frac{3}{2}x_0,$$

由此可得题设线段的长度的平方为

$$z=\frac{9}{x_0^4}+\frac{9}{4}x_0^2 \quad (x_0\neq 0).$$

令 $z'=0$. 得驻点 $x_0=\pm\sqrt{2}$.

又

$$z''\Big|_{x_0=\pm\sqrt{2}}=9\left(\frac{1}{2}+\frac{20}{8}\right)>0,$$

所以 z 在 $x_0=\pm\sqrt{2}$时取得极小值，亦即最小值. 因此，所求长度为$\sqrt{z}=\sqrt{9\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

也可用“均值不等式”求 z 的最小值：

$$\begin{aligned}z&=9\left(\frac{1}{x_0^4}+\frac{x_0^2}{8}+\frac{x_0^2}{8}\right)\\&\geqslant 9\times 3\sqrt[3]{\frac{1}{x_0^4}\cdot\frac{x_0^2}{8}\cdot\frac{x_0^2}{8}}=\frac{27}{4},\end{aligned}$$

所以，$\sqrt{z}$的最小值为$\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

例 1.2.43 将一长为 a 的铁丝切成两段，并将其中一段围成正方形、另一段围成圆形. 为使正方形与圆形面积之和最小，问两段铁丝的长各为多少?

[提示] 本题主要考查导数在求实际的最大值最小值问题中的应用. 在本题中，首先要将问题归结为数学中的函数求最值的问题，再用导数来解决.

[解] 设圆形的周长为 x，则正方形的周长为 $a-x$，两图形的面积之和为

$$\begin{aligned}A&=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{a-x}{4}\right)^2\\&=\frac{4+\pi}{16\pi}x^2-\frac{a}{8}x+\frac{a^2}{16},\quad 0<x<a.\end{aligned}$$

令 $A'=0$，得驻点 $x_0=\frac{\pi a}{4+\pi}$. 又 $A''=\frac{4+\pi}{8\pi}>0$，故 A 在 x_0 处取得极小值，亦即最小值. 因此，当圆周长为$\frac{\pi a}{4+\pi}$，正方形周长为$\frac{4a}{4+\pi}$时，两图形的面积之和为最小.

例 1.2.42 和例 1.2.43 中，都用到了“在开区间内的可导函数若在区间内有唯一的极值，则它就是该函数在该开区间内的最值，并且极小值即是最小值，极大值即是最大值”这一结论.

以下如再用到，不再提及.

例 1.2.44 设 $a>1$，$f(t)=a^t-at$ 在$(-\infty,+\infty)$内的驻点为 $t(a)$. 问 a 为何值时，$t(a)$最小? 并求出最小值.

[提示] 本题主要考查在开区间内求函数最值的方法. 本题应先求出 $t(a)$的表达式，再利用导数求 $t(a)$在$(1,+\infty)$内的最小值.

[解] $f'(t)=a^t\ln a-a$.

令 $f'(t)=0$，得驻点

$$t(a)=1-\frac{\ln\ln a}{\ln a},\quad 1<a<+\infty,$$

则

$$t'(a)=-\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\ln a}{\ln^2 a}=-\frac{1-\ln\ln a}{a\ln^2 a}.$$

令 $t'(a)=0$，得 $a=e^e$，这是唯一的驻点.

当 $1<a<e^e$ 时，有 $t'(a)<0$；当 $a>e^e$ 时，$t'(a)>0$. 所以 $a=e^e$ 是 $t(a)$的极小值点，亦即最小值点，最小值为$t(e^e)=1-\frac{1}{e}$.

例 1.2.45 一商家销售某种商品的价格满足关系 $p=7-0.2x$（万元/吨），x 为销售量（单位:吨），商品的成本函数是 $C=3x+1$（万元）.

（Ⅰ）若每销一吨商品，政府要征税 t（万元），求该商家获最大利润时的销售量；

（Ⅱ）t 为何值时，政府税收总额最大？

［提示］ 本题主要考查对导数在经济学中的应用的掌握程度．依题意首先要写出商家所获利润的函数，再依次求出使获利最大的销售量和使政府税收额最大的税率 t．

［解］ （Ⅰ）依题意，商品销售总收入为 $R=px=(7-0.2x)x$，总税收额为 $T=tx$，利润函数为

$$\pi=R-C-T=-0.2x^2+(4-t)x-1,$$

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}x}=-0.4x+4-t.$$

令$\dfrac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}x}=0$，得驻点

$$x=\frac{5}{2}(4-t).$$

又$\dfrac{\mathrm{d}^2\pi}{\mathrm{d}x^2}=-0.4<0$，故当 $x=\dfrac{5}{2}(4-t)$时，利润 π 为最大值，即使利润最大的销售量为$\dfrac{5}{2}(4-t)$．

（Ⅱ）将 $x=\dfrac{5}{2}(4-t)$代入 $T=tx$，得

$$T=t\cdot\frac{5}{2}(4-t)=10t-\frac{5}{2}t^2.$$

令$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=0$，得 $t=2$．

又$\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}=-5<0$，故 $t=2$ 是 T 的极大值点，亦即最大值点．所以，当税率为 2 时，政府税收总额最大．

［典型错误］ 一些考生在解(Ⅱ)时无从下手求函数 $T=tx$ 的最大值，原因是没有利用(Ⅰ)的结果，也就是没有认识到税收中的销售量是要受到商家最大利润的限制的，没有将 $x=\dfrac{5}{2}(4-t)$代入到税收总额函数中去．

例 1.2.46 设某商品的需求函数为 $Q=Q(p)$，收益函数为 $R=pQ$，其中 p 为商品价格，Q 为需求量(产品的产量)，$Q(p)$是单调减函数．如果当价格为 p_0，对应产量为 Q_0 时，边际收益$\left.\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0}=a>0$．收益对价格的边际效应$\left.\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_0}=c<0$，需求对价格的弹性为 $E_p=b>1$，求 p_0 和 Q_0．

［提示］ 本题主要考查导数在经济学中的应用以及函数的边际、弹性等概念．

［解］ 依定义，需求函数 $Q=Q(p)$对价格的弹性为 $E_p=-\dfrac{p}{Q}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$，

所以
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=p+Q\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}Q}=p-p\left(-\frac{Q}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}Q}\right)$$
$$=p\left(1-\frac{1}{E_p}\right),$$

由题设知
$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0}=p_0\left(1-\frac{1}{b}\right)=a.$$

所以有 $p_0=\dfrac{ab}{b-1}$．

又
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q+p\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=Q-Q\left(-\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\right)=Q(1-E_p),$$

由题设知
$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_0}=Q_0(1-b)=c,$$

所以有 $Q_0=\dfrac{c}{1-b}$．

［典型错误］ 一些考生将需求弹性的定义写成“$E_p=\dfrac{p}{Q}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$”，漏掉了负号，得到结果是 $p_0=\dfrac{ab}{1+b}$，Q_0

$=\frac{c}{1+b}$，原因是对弹性概念理解不深．没有注意到条件中已给出“$E_p=b>1$”．也即表明 E_p 的定义应为$E_p=-\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$，因为$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}<0$．只有加上负号才能使 $E_p>0$.

例 1.2.47 设某商品需求量 Q 是价格 p 的单调减少函数：$Q=Q(p)$．其需求弹性 $\eta=\frac{2p^2}{192-p^2}>0$.

（Ⅰ）设 R 为总收益函数．证明$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q(1-\eta)$；

（Ⅱ）求 $p=6$ 时总收益对价格的弹性，并说明其经济意义．

［提示］ 本题主要考查导数在经济学中的应用和函数的弹性及其经济意义．

［解法 1］（Ⅰ）由于 $R=R(p)=pQ(p)$，

所以
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q+p\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=Q-Q\left(-\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\right)=Q(1-\eta).$$

（Ⅱ）$\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{pQ}Q(1-\eta)=1-\eta=1-\frac{2p^2}{192-p^2}=\frac{192-3p^2}{192-p^2}$，

所以 $\left.\frac{ER}{Ep}\right|_{p=6}=\frac{7}{13}\approx0.54$．其经济意义是：当价格为 6（单位）时，若价格上涨 1%．则总收益将增加 0.54%．

［解法 2］（Ⅰ）由 $\eta=\frac{2p^2}{192-p^2}>0$，知
$$-\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\frac{2p^2}{192-p^2}.$$

整理得
$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=\frac{-2p}{192-p^2}\mathrm{d}p,$$

两边积分得
$$\ln Q=\ln(192-p^2)+\ln C.$$

得需求函数
$$Q=C(192-p^2).$$

所以总收益函数
$$R=Qp=C(192-p^2)p,$$
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}&=C(192-3p^2)\\&=C(192-p^2)\left(1-\frac{2p^2}{192-p^2}\right)\\&=Q(1-\eta).\end{aligned}$$

（Ⅱ）同解法 1.

［典型错误］ 部分考生将需求弹性写成“$\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$”，就证不出（Ⅰ）中所要求证明的等式；另外，还有一些考生对弹性的经济学意义解释不清楚．原因都是对弹性，尤其是需求弹性的概念理解不深．

例 1.2.48 设某商品的需求函数为 $Q=100-5p$，其中价格 $p\in(0,20)$，Q 为需求量．

（Ⅰ）求需求量对价格的弹性 E_d （$E_d>0$）；

（Ⅱ）推导$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q(1-E_d)$（其中 R 为收益），并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时．降低价格反而使收益增加．

［提示］ 本题主要考查需求弹性的概念．并利用需求弹性说明总收益的变化．解题过程中需利用需求函数的弹性公式及需求弹性对总收益的变化说明降低价格反而使收益增加．

［解］（Ⅰ）$E_d=\left|\frac{p}{Q}Q'\right|=\frac{p}{20-p}$.

（Ⅱ）由 $R=pQ$，得

$$\frac{dR}{dp}=Q+p\frac{dQ}{dp}=Q\left(1+\frac{p}{Q}Q'\right)=Q(1-E_d).$$

又由 $E_d=\frac{p}{20-p}=1$，得 $p=10$.

当 $10<p<20$ 时，$E_d>1$，于是 $\frac{dR}{dp}<0$，
故当 $10<p<20$ 时，降低价格反而使收益增加.

[典型错误] 有些考生记不清需求弹性公式；或不会推导 $\frac{dR}{dp}=Q(1-E_d)$；或不会由 E_d 的大小，用导数的概念说明降低价格反而使收益增加；有些考生没有注意 $Q>0$，从而得 $10<p$，导致错误.

例 1.2.49 求证：当 $x\geqslant1$ 时，$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

[提示] 本题主要考查利用导数研究函数性态的能力. 本题实际是欲证一个函数在区间 $[1,+\infty)$ 上恒为 $\frac{\pi}{4}$. 由罗尔定理的推论"若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内有 $f'(x)=0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数"可以证明之.

[证] 设
$$f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2},$$
显然，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续.

又
$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{1+x^2}{x^2-1}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0,\quad x>1.$$
所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒为常数，即
$$f(x)=C,\quad x\geqslant1.$$
而
$$f(1)=\arctan 1-\frac{1}{2}\arccos 1=\frac{\pi}{4},$$
所以 $C=\frac{\pi}{4}$，故有 $f(x)=\frac{\pi}{4}$，$x\geqslant1$. 即当 $x\geqslant1$ 时，
$$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

[典型错误] 一些考生不会利用导数证明这个题，而是用三角函数的性质来推导，由于繁杂而半途而废.

例 1.2.50 证明不等式
$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x},\quad 0<x<+\infty.$$

[提示] 本题主要考查利用导数研究函数性态的方法. 一般地，证明一个与 x 有关的不等式可以方便地化为证明某函数满足 $f(x)>0$. 这样，可以利用导数研究 $f(x)$ 的性态，并以此来推出 $f(x)$ 的取值情况，达到证明的目的. 另外，若不等式中可凑成形如"$g(b)-g(a)$"的表达式，则可利用拉格朗日中值定理(或柯西中值定理)来证. 本题就有如下两种证法.

[证法 1] 设 $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$，$0<x<+\infty$，

则
$$f'(x)=-\frac{1}{x(1+x)^2}<0,\quad 0<x<+\infty,$$
因此，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少.

又由于
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]=0,$$
所以对于任意 $x\in(0,+\infty)$，均有 $f(x)>0$，即
$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}.$$

［证法 2］ 不等式可化为

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln 1>\frac{1}{1+x}.$$

令 $f(x)=\ln x$，在区间 $\left[1,\ 1+\dfrac{1}{x}\right]$ 上用拉格朗日中值定理，有

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln 1=\frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{x},$$

其中，$1<\xi<1+\dfrac{1}{x}$，亦即 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{1}{\xi}<1$. 所以有

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln 1=\frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{x}>\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{1+x},$$

即

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}.$$

［典型错误］ 一些考生在证法 1 中，缺少求极限"$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$"这一关键步骤而导致失分. 原因是没有理解利用单调性来证明不等式的原理.

例 1.2.51　证明不等式

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2},\qquad -\infty<x<+\infty.$$

［提示］ 本题主要考查利用导数研究函数性态的方法，可以借助于函数的单调性、函数的最值等来证明该不等式. 故本题也可考查函数的单调性判别、函数的最值求法等内容.

［证法 1］ 设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，$-\infty<x<+\infty$，
则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

由于当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加. 故有

$$f(x)>f(0)=0;$$

又由于当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少，故有

$$f(x)>f(0)=0.$$

综上可知，对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有

$$f(x)\geqslant 0,$$

即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}.$$

［证法 2］ 设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，
则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，可导，且

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$$

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=0$.

又

$$f''(0)=\left.\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=0}=1>0.$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，也是最小值点，故对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)\geqslant f(0)=0$，即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}.$$

［典型错误］ 一些考生在用证法 1 证明时，误认为对任意 x 都有 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant 0$，导致证明无法做下去.

例 1.2.52　设 p、q 是大于 1 的常数，并且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，证明：对于任意的 $x>0$，有 $\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}\geqslant x$.

[提示] 本题主要考查利用导数研究函数性态的方法．此类问题中，常可借助于函数的单调性、函数的最值来说明函数的取值情况．

[证] 设

$$f(x)=\frac{1}{p}x^{p}+\frac{1}{q}-x,\quad x>0.$$

则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且

$$f'(x)=x^{p-1}-1.$$

令 $f'(x)=0$，得唯一的驻点 $x=1$．

又

$$f''(1)=p-1>0.$$

所以 $f(1)=0$ 是 $f(x)$ 的极小值，也是最小值，因此，对任意 $x>0$，有 $f(x)\geqslant f(1)=0$，

即

$$\frac{1}{p}x^{p}+\frac{1}{q}\geqslant x.$$

[典型错误] 部分考生在求出 $f'(x)$ 后，继续求得 $f''(x)=(p-1)x^{p-2}>0$，判断 $f'(x)$ 单增．接着错误地判断 $f'(x)>0$，从而误判 $f(x)$ 单增，证得 $f(x)>f(0)=\frac{1}{q}>0$，原因是没有正确地掌握利用单调性证明不等式的方法．

例 1.2.53 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,c]$ 上连续，其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0,c)$ 内存在且单调减少．$f(0)=0$，试应用拉格朗日中值定理证明不等式：

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b).$$

其中常数 a，b 满足条件 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$．

[提示] 本题主要考查应用拉格朗日中值定理解决问题的能力．注意到拉格朗日中值定理是通过函数的差值与导数联系的，所以，证明本题的关键是在欲证不等式中凑出函数值相减的形式．再用拉格朗日中值定理证之．

[证] 当 $a=0$ 时，不等式变成

$$f(b)\leqslant f(0)+f(b).$$

由 $f(0)=0$．知上不等式成立．

当 $a>0$ 时，欲证不等式可写成

$$f(a+b)-f(b)\leqslant f(a)-f(0).$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,a]$，$[b,a+b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件．由拉格朗日中值定理有

$$f(a)-f(0)=f'(\xi_1)a,\qquad 0<\xi_1<a,$$
$$f(a+b)-f(b)=f'(\xi_2)a,\qquad b<\xi_2<a+b,$$

显然 $\xi_1<\xi_2$．

又由 $f'(x)$ 在区间 $(0,c)$ 内的单减性知

$$f'(\xi_1)>f'(\xi_2),$$

因而有

$$af'(\xi_1)\geqslant af'(\xi_2),$$

即

$$f(a+b)-f(b)\leqslant f(a)-f(0),$$

亦即

$$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b).$$

例 1.2.54 假设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在且大于零．记 $F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $(x>a)$．证明：$F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加．

[提示] 本题主要考查利用导数研究函数性态的理论和方法．对于可导函数，其单调性可用导函数的符号来判别．因此，本题应从考查 $F'(x)$ 的符号入手．

[证法 1]

$$F'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2}$$
$$=\frac{1}{x-a}\left[f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right].$$

显然 $f(x)$在$[a,x]$上满足拉格朗日中值定理的条件．由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(a,x)$，使得

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi),$$

所以
$$F'(x)=\frac{1}{x-a}[f'(x)-f'(\xi)].$$

由 $f''(x)>0$ 知 $f'(x)$在$[a,x]$上单调增加．所以有

$$f'(x)-f'(\xi)>0,$$

又 $x-a>0$，故

$$F'(x)=\frac{1}{x-a}[f'(x)-f'(\xi)]>0,$$

所以 $F(x)$在$(a,+\infty)$内单调增加．

[证法 2]
$$F'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-f(x)+f(a)}{(x-a)^2}.$$

设
$$\varphi(x)=f'(x)(x-a)-f(x)+f(a),$$

则有
$$\varphi'(x)=f''(x)(x-a)>0,$$

所以 $\varphi(x)$在$[a,+\infty)$上单增，$\varphi(x)>\varphi(a)=0$，$x>a$，
因而 $F'(x)>0$，$x>a$，所以 $F(x)$在$(a,+\infty)$内单调增加．

[典型错误] 一些考生在求得 $F'(x)$的表达式后，就做不下去了．原因是对拉格朗日中值定理的实质没有理解．

例 1.2.55 求证：方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根，其中 p，q 为常数，且 $0<q<1$．

[提示] 本题主要考查利用导数研究函数性态的方法．对于研究形如“$f(x)=0$”的方程根的存在性问题，往往要利用函数 $f(x)$的连续性说明根的存在性，利用对函数 $f(x)$的性态的了解来说明根的个数．而研究函数的性态往往可以利用导数．

[证] 设 $f(x)=x+p+q\cos x$，显然 $f(x)$是连续函数．

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$知，存在 a 使$f(a)<0$；

又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$知，存在 $b>a$，使 $f(b)>0$．

在$[a,b]$上用连续函数的零点定理，知必存在 $\xi\in(a,b)$使 $f(\xi)=0$．即原方程至少存在一个实根．

又 $f'(x)=1-q\sin x>0$，故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加，$f(x)$至多只有一次取值为零．

综上所述知，$f(x)$恰有一个零点，即方程

$$x+p+q\cos x=0$$

恰有一个实根．

[典型错误] 一些考生在证明 $f(x)$的零点存在性时，不能清楚地说明存在 a，b，使 $f(a)\cdot f(b)<0$，这是因为对极限的概念和性质不熟悉，不会应用．

例 1.2.56 设函数 $f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，试证必存在$\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$．

[提示] 本题主要考查闭区间上连续函数的性质及微分中值定理(罗尔定理或拉格朗日中值定理)．由要证明的结论知要用到罗尔定理(或拉格朗日中值定理)，而要说明其满足定理的条件则要用到闭区间上连续函数的性质．

[证法 1] 因为 $f(x)$在$[0,3]$上连续，所以 $f(x)$在$[0,2]$上连续，且在$(0,2)$内必有最大值 M 和最小值 m，于是

$$m\leqslant f(0)\leqslant M,$$
$$m\leqslant f(1)\leqslant M,$$
$$m\leqslant f(2)\leqslant M,$$

故
$$m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M.$$

由介值定理知，至少存在一点 $c\in[0,2]$，使

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1.$$

因为 $f(c)=1=f(3)$，且 $f(x)$在$[c,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

[证法 2] 反证法.

设在$[0,2]$上总有 $f(x)>1$，则 $f(0)+f(1)+f(2)>3$，与已知条件矛盾；同理可知在$[0,2]$上不可能总有 $f(x)<1$. 由于 $f(x)$在$[0,2]$上连续，故至少存在一点 $c\in[0,2]$，使 $f(c)=1$.

由于 $f(c)=f(3)=1$，又 $f(x)$在$[c,3]$上连续，在$(c,3)$内可导，由罗尔定理可知必存在一点 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

[证法 3] (i) 设 $f(x)$在$[0,3]$上是常数，$f(x)\equiv1$，则 $f'(x)=0$，$x\in(0,3)$.

(ii) 假设 $f(x)$在$[0,3]$上是单调递增的，则必有

$$f(0)+f(1)+f(2)<3f(3)=3,$$

与已知 $f(0)+f(1)+f(2)=3$ 矛盾.

假设 $f(x)$在$[0,3]$上是单调递减的，则必有

$$f(0)+f(1)+f(2)>3f(3)=3,$$

与已知 $f(0)+f(1)+f(2)=3$ 矛盾，所以 $f(x)$在$[0,3]$上不是单调函数. 又由于 $f(x)$在$[0,3]$上连续，则必存在两个不同点 a，$b\in[0,3]$，使

$$f(a)=f(b).$$

又由于 $f(x)$在(a,b)内可导，所以 $f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日定理条件，故至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

由于$[a,b]\subset[0,3]$，所以至少存在一点 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

[典型错误] 有些考生不知道怎么用已知条件 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，即没有先对 $f(x)$用闭区间上连续函数的最值定理和介值定理处理，从而得不到结论.

例 1.2.57 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f'(x)\neq0$. 试证存在 ξ，$\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}.$$

[提示] 本题主要考查柯西中值定理与拉格朗日中值定理的应用. 一般情况下，欲证存在两个值 ξ，$\eta\in(a,b)$，使某一等式(或不等式)成立，往往需要应用两次中值定理.

[证] 设 $g(x)=e^x$，则 $g(x)$，$f(x)$在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件. 由柯西中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)},$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta}.$$

又 $f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

将此式代入上式得

$$\frac{f'(\xi)(b-a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta}.$$

由于 $f'(x)\neq0$，所以有

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}.$$

[典型错误] 一些考生无从下手，另一些考生没有想到要用两次中值定理．这是因为这方面的训练较少，不熟悉．

例 1.2.58 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续．在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=1$．试证存在 ξ，$\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$．

[提示] 本题主要考查拉格朗日中值定理的应用和构造辅助函数的能力．此题中涉及两个中值 ξ 和 η，故应考虑用两次中值定理．由题中涉及函数 e^x，$f(x)$，$f(x)+f'(x)$，故应考虑 $e^xf(x)$为辅助函数．

[证] 设 $F(x)=e^xf(x)$，则 $F(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在 $\eta\in(a,b)$，使

$$F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a),\quad a<\eta<b,$$

即

$$e^bf(b)-e^af(a)=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)](b-a),\quad a<\eta<b.$$

因为 $f(a)=f(b)=1$，所以有

$$e^b-e^a=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)](b-a),\quad a<\eta<b.$$

又 e^x 在$[a,b]$上可用拉格朗日中值定理，有

$$e^b-e^a=e^\xi(b-a),\quad a<\xi<b.$$

比较上述两式得

$$e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]=e^\xi,\quad a<\xi,\ \eta<b,$$

即

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1.$$

[典型错误] 一些考生不会构造辅助函数；另一些构造辅助函数后，只用了一次中值定理，而没有想到在前一次应用的基础上再用一次．原因是对拉格朗日中值定理不熟悉．

例 1.2.59 设函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$．试证：

(Ⅰ) 存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$；

(Ⅱ) 对任何实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$$

[提示] 本题主要考查连续函数零点定理的应用、罗尔定理的应用以及辅助函数的构造．在(Ⅰ)中，由欲证结论的形式可知，只需证明 $F(x)=f(x)-x$ 在$\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$内存在零点；对于(Ⅱ)，根据导数的计算可知，只需证明 $\Phi(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$在$(0,\eta)$内存在 ξ，使 $\Phi'(\xi)=0$．

[证] (Ⅰ) 设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$在$\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$上连续，且

$$F(1)=f(1)-1=-1<0,\quad F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,$$

由连续函数的零点定理知，存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$，使得

$$F(\eta)=0,$$

即

$$f(\eta)=\eta.$$

(Ⅱ) 设 $\Phi(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$，则 $\Phi(x)$在$[0,\eta]$上连续，在$(0,\eta)$内可导，且

$$\Phi(0)=0,\quad \Phi(\eta)=0.$$

由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,\eta)$，使

$$\Phi'(\xi)=0,$$

而

$$\Phi'(x)=e^{-\lambda x}[f'(x)-1]-\lambda e^{-\lambda x}[f(x)-x],$$

于是有

$$e^{-\lambda\xi}[f'(\xi)-1-\lambda(f(\xi)-\xi)]=0,$$

即有

$$f'(\xi)-1-\lambda[f(\xi)-\xi]=0\quad(e^{-\lambda\xi}\neq0),$$

亦即

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$$

[典型错误] 主要是(Ⅱ)中的辅助函数构造错误或根本不会构造，使得对本题无从下手．原因是对导数

的运算不熟练.

例 1.2.60　假设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$与 $B(1,f(1))$的直线与曲线$y=f(x)$相交于点 $C(c,f(c))$，其中$0<c<1$. 证明：在$(0,1)$内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

[提示]　本题主要考查罗尔定理和拉格朗日中值定理的应用以及它们的几何意义. 由拉格朗日中值定理的几何意义知，在$(0,c)$内存在一点 ξ_1，使得该点对应的切线与直线 AC 平行. 在$(c,1)$内存在一点 ξ_2，使得该点对应的切线与直线 CB 平行，即有 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$. 再在$[\xi_1,\xi_2]$上用罗尔定理即可证得结论.

[证]　由题设知 $f(x)$在$[0,c]$，$[c,1]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在 $\xi_1\in(0,c)$，$\xi_2\in(c,1)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}.$$

由于 A、B、C 三点共线，故

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0},$$

即

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2).$$

函数 $f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上满足罗尔定理的条件，由罗尔定理知至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $f''(\xi)=0$.

[典型错误]　较多的考生对此题无从下手，原因是对拉格朗日中值定理掌握得不好，尤其是对它的几何意义不熟悉.

例 1.2.61　证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

[提示]　本题主要考查考生应用导数解决问题的能力，涉及的知识点有单调性的判定或拉格朗日中值定理.

[证法 1]　设$f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$，$x\in[0,\pi]$，

则

$$f'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x+\pi=x\cos x-\sin x+\pi,$$

$$f''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0,x\in(0,\pi),$$

故　$f'(x)$在$[0,\pi]$上单调减少，从而

$$f'(x)>f'(\pi)=0,\quad x\in(0,\pi),$$

因此$f(x)$在$[0,\pi]$上单调增加，从而当 $0<a<b<\pi$ 时，有

$$f(b)>f(a),$$

即

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

[证法 2]　设$\varphi(x)=x\sin x+2\cos x$，$x\in[0,\pi]$.

在$[a,b]$上应用拉格朗日中值定理，有

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b),$$

即

$$b\sin b+2\cos b-a\sin a-2\cos a$$
$$=(\xi\cos\xi-\sin\xi)(b-a).$$

再设

$$g(x)=x\cos x-\sin x,\quad x\in[0,\pi],$$

则

$$g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0,\ x\in(0,\pi).$$

因此　$g(x)$在$[0,\pi]$上单调减少，故对于 $\xi<\pi$，有

$$g(\xi)>g(\pi)=-\pi,$$

即

$$\xi\cos\xi-\sin\xi>-\pi,$$

所以有

$$b\sin b+2\cos b-a\sin a-2\cos a>-\pi(b-a),$$

移项得

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

[典型错误]

① 一些考生在判断$f'(x)=x\cos x-\sin x+\pi$的符号时，没有通过求二阶导数$f''(x)$来判断，而是通过一些并不“显然”的理由就直接得$f'(x)>0$.

② 一些考生从$f''(x)=-x\sin x<0$判断$f(x)$在$[0,\pi]$上是凸的，从而“推出”$f'(x)>0$，事实上这里并不能“推出”.

③ 一些考生从$f''(x)=-x\sin x<0$推出函数满足

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

但是由此也不能推出欲证的不等式.

例 1.2.62 试确定 A，B，C 的值，使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中$o(x^3)$是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量.

[提示] 本题主要考查无穷小量阶的概念、“$\frac{0}{0}$”型极限的性质以及洛必达法则的应用. 从记号$o(x^3)$入手，再用洛必达法则，就不难解出此题.

[解法 1] 根据题设和洛必达法则，有

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+B+Bx+2Cx+Cx^2)-A}{3x^2}.\end{aligned}\tag{*}$$

由此得

$$\lim_{x\to 0}e^x(1+B+Bx+2Cx+Cx^2)=A.$$

即

$$1+B=A;$$

再对(*)式应用洛必达法则，有

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{e^x[2C+1+2B+(B+4C)x+Cx^2]}{6x},\tag{**}$$

由此得

$$\lim_{x\to 0}e^x[2C+1+2B+(B+4C)x+Cx^2]=0.$$

即

$$2B+2C+1=0;$$

对(**)式应用洛必达法则，注意将 $2B+2C+1=0$ 先代入(**)式，有

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{B+4C+2Cx}{6},$$

据此有

$$B+4C=0.$$

综上，有

$$\begin{cases}1+B=A,\\2B+2C+1=0,\\B+4C=0,\end{cases}$$

解得 $A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{2}{3}$，$C=\frac{1}{6}$.

若学过泰勒公式，可有如下更简洁的方法.

[解法 2] 由泰勒公式，有

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3),$$

将其代入题设中的等式，整理得

$$1+(1+B)x+\left(\frac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C\right)x^3=1+Ax+o(x^3),$$

比较等式两边的系数，有

$$\begin{cases}1+B=A,\\\frac{1}{2}+B+C=0,\\\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C=0,\end{cases}$$

解得 $A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}$.

[典型错误]

① 部分考生采用对等式“$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$”两端反复求导，再令 $x\to 0$ 的方法，也可求得三个等式：$1+B=A$，$2B+2C+1=0$，$B+4C=0$，也可解出答案．但是这种做法中，不加分析地用到导数公式：

$$[o(x^n)]'=o(x^{n-1}),$$

这是不对的．首先，$o(x^n)$不一定可导；其次，上述公式也不一定正确．例如，若取$f(x)=x^4\sin\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)=o(x^3)$，但中，$f'(x)\neq o(x^2)$．因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(4x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

不存在．所以，通过这种方法虽然可以得到正确的结果，但过程却反映出一些较模糊的认识．

② 部分考生对

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)}{1+Ax+o(x^3)}$$

反复应用洛必达法则，也可求出正确的 A,B,C，但这种做法也是错误的，因为上述极限不是“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，不能采用洛必达法则，而且，在求导过程中也用到$[o(x^3)]'$．

三、一元函数积分学

・考试内容与要求・

考试内容

原函数和不定积分的概念　不定积分的基本性质　基本积分公式　定积分的概念和基本性质　定积分中值定理　积分上限的函数及其导数　牛顿－莱布尼茨(Newton－Leibniz)公式　不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法　反常(广义)积分　定积分的应用

考试要求

1．理解原函数与不定积分的概念，掌握不定积分的基本性质和基本积分公式，掌握不定积分的换元积分法与分部积分法．

2．了解定积分的概念和基本性质，了解定积分中值定理，理解积分上限的函数并会求它的导数，掌握牛顿－莱布尼茨公式以及定积分的换元积分法和分部积分法．

3．会利用定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值，会利用定积分求解简单的经济应用问题．

4．了解反常积分的概念，会计算反常积分．

・考试内容解析・

(一) 不定积分

1．基本概念

(1) 原函数

若在某区间 I 内$F'(x)=f(x)$或 $dF(x)=f(x)dx$，则称$F(x)$为$f(x)$在该区间内的一个原函数(有时区间略而不提)．

若$f(x)$有一个原函数$F(x)$，则$f(x)$必有无穷多个原函数，并且所有原函数皆为$F(x)+C$ 的形式．

原函数存在定理：若函数$f(x)$在某区间内连续，则它在该区间内必有原函数．

因为初等函数在定义区间内连续，故初等函数在其定义区间内一定存在原函数．