解得　$A=\frac{1}{3}, B=-\frac{2}{3}, C=\frac{1}{6}$.

[典型错误]

① 部分考生采用对等式“$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$”两端反复求导，再令 $x\to 0$ 的方法，也可求得三个等式：$1+B=A$，$2B+2C+1=0$，$B+4C=0$，也可解出答案．但是这种做法中，不加分析地用到导数公式：

$$[o(x^n)]'=o(x^{n-1}),$$

这是不对的．首先，$o(x^n)$不一定可导；其次，上述公式也不一定正确．例如，若取$f(x)=x^4\sin\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)=o(x^3)$，但中，$f'(x)\neq o(x^2)$．因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(4x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

不存在．所以，通过这种方法虽然可以得到正确的结果，但过程却反映出一些较模糊的认识．

② 部分考生对

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)}{1+Ax+o(x^3)}$$

反复应用洛必达法则，也可求出正确的 A,B,C，但这种做法也是错误的，因为上述极限不是“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，不能采用洛必达法则，而且，在求导过程中也用到$[o(x^3)]'$．

三、一元函数积分学

·考试内容与要求·

考试内容

原函数和不定积分的概念　不定积分的基本性质　基本积分公式　定积分的概念和基本性质　定积分中值定理　积分上限的函数及其导数　牛顿－莱布尼茨(Newton－Leibniz)公式　不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法　反常(广义)积分　定积分的应用

考试要求

1．理解原函数与不定积分的概念，掌握不定积分的基本性质和基本积分公式，掌握不定积分的换元积分法与分部积分法．

2．了解定积分的概念和基本性质，了解定积分中值定理，理解积分上限的函数并会求它的导数，掌握牛顿－莱布尼茨公式以及定积分的换元积分法和分部积分法．

3．会利用定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值，会利用定积分求解简单的经济应用问题．

4．了解反常积分的概念，会计算反常积分．

·考试内容解析·

(一) 不定积分

1．基本概念

(1) 原函数

若在某区间 I 内$F'(x)=f(x)$或 $dF(x)=f(x)dx$，则称$F(x)$为$f(x)$在该区间内的一个原函数(有时区间略而不提)．

若$f(x)$有一个原函数$F(x)$，则$f(x)$必有无穷多个原函数，并且所有原函数皆为$F(x)+C$ 的形式．

原函数存在定理：若函数$f(x)$在某区间内连续，则它在该区间内必有原函数．

因为初等函数在定义区间内连续，故初等函数在其定义区间内一定存在原函数．

(2) 不定积分

函数$f(x)$的全体原函数称为$f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)\,\mathrm{d}x$，其中"$\int$"称为积分号，x称为积分变量，$f(x)$称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$称为被积式．

若$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

(3) 不定积分的几何意义

$f(x)$的不定积分$\int f(x)\,\mathrm{d}x$表示具有斜率为$f(x)$的"平行"曲线族．

2．基本性质

(1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$　或　$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$.

(2) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$　或　$\int \mathrm{d}f(x) = f(x) + C$.

(3) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$，其中$k$为非零常数．

(4) $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$.

3．基本积分表(式中C为任意常数,$a\neq 0$)

(1) $\int 0\mathrm{d}x = C$.

(2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$，$\alpha \neq -1$.

(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$.

(4) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$，$a > 0$且$a \neq 1$.

(5) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$.

(6) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

(7) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

(8) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$.

(9) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$.

(10) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$.

(11) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$.

(12) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases}\arcsin x + C;\\ -\arccos x + C.\end{cases}$

(13) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \begin{cases}\arctan x + C;\\ -\operatorname{arccot} x + C.\end{cases}$

(14) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$.

(15) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$.

(16) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$.

(17) $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$.

(18) $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$.

(19) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$.

(20) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$.

4．基本积分法

(1) 直接积分法

直接利用或将被积函数适当恒等变形后，再利用基本积分表以及积分的性质与法则，可以求解一些较简单的不定积分，此法称为直接积分法．

(2) 换元积分法

换元积分法的公式为：设$u = \varphi(x)$，有

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u.$$

由左向右称为第一换元法或凑微分法；由右向左称为第二换元法或变量代换法．

① 第一换元法

设$f(u)$是u的连续函数，$u = \varphi(x)$及其导数$\varphi'(x)$是x的连续函数，若

$$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C.$$

则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C.$$

[凑微分法常见类型及换元关系]

* $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$，$a \neq 0$，$u = ax+b$.

* $\int f(ax^b)x^{b-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{ab}\int f(ax^b)\mathrm{d}(ax^b)$，$ab \neq 0$，$u = ax^b$.

* $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$，$u = \mathrm{e}^x$.

* $\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$，$u = \ln x$.

* $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$，$u = \sin x$.

* $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$，$u = \cos x$.

* $\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$，$u = \arctan x$.

* $\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$，$u = \tan x$.

* $\int f(\cot x)\csc^2 x\mathrm{d}x = -\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$，$u = \cot x$.

* $\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$，$u = \arcsin x$.

* $\int \sin\alpha x\sin\beta x\mathrm{d}x$，$\int \sin\alpha x\cos\beta x\mathrm{d}x$，$\int\cos\alpha x\cos\beta x\mathrm{d}x$，先积化和差再凑微分.

* $\int \sin^n x\cos^m x\mathrm{d}x$，$m$ 与 n 皆为偶数，用倍角公式；m 与 n 中至少有一个奇数，把奇次幂因子拆成一个一次幂因子并与 $\mathrm{d}x$ 凑微分，所剩偶次幂因子利用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，其中 m、n 为非负整数.

② 第二换元法

设 $f(x)$ 连续，而 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 难于计算，可选择连续可微且导数无零点的函数 $x=\varphi(t)$，如果

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(t) + C,$$

则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F[\varphi^{-1}(x)] + C,$$

其中 $\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

[第二换元法常见类型及换元关系]

* 被积函数中含有 $\sqrt[n]{ax+b}$，可试用 $\sqrt[n]{ax+b}=u$，这里 n 为自然数.

* 被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，可试用 $x=a\sin u$.

* 被积函数中含有 $\sqrt{x^2+a^2}$，可试用 $x=a\tan u$.

* 被积函数中含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，可试用 $x=a\sec u$.

* 令 $u=\frac{1}{x}$ 并称之为倒置换. 当被积函数以商的形式出现且分子的次数比分母的次数小得较多时，不少积分不妨用此法一试.

* 被积函数中同时含有 $(ax+b)^{\alpha},\cdots,(ax+b)^{\lambda}$，其中 $\alpha,\cdots,\lambda$ 为分数，可试用 $\sqrt[m]{ax+b}=u$，这里 m 为 $\alpha,\cdots,\lambda$ 的分母的最小公倍数.

(3) 分部积分法

设 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 一阶连续可微，则有

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int vu'\mathrm{d}x \qquad \text{或} \qquad \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u,$$

称为分部积分公式.

用分部积分法求 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 的关键在于恰当地选择 u 与 $\mathrm{d}v$. 先把 $f(x)$ 看成两个因子之积，即 $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$，再把其中一个因子与 $\mathrm{d}x$ 合成 $\mathrm{d}v$（求其积分得 v），另一个因子为 u.

当被积函数为不同类的两个函数之积时，通常要考虑分部积分法. 特别地，若被积函数中含有 a^x，e^x，$\sin x$，$\cos x$ 型的函数因子，一般将该因子与 $\mathrm{d}x$ 合成 $\mathrm{d}v$，余者为 u；而当被积函数中含有 $\ln x$，$\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，$\mathrm{arccot}\, x$ 型的函数因子，一般将该因子取作 u，余者与 $\mathrm{d}x$ 合成 $\mathrm{d}v$.

5. 有理分式的积分

称 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 为有理分式. 其中 $P_n(x)$ 为 n 次多项式，$Q_m(x)$ 为 m 次多项式. 并且 $n<m$ 称为真分式，$n\geqslant m$ 称为假分式.

假分式总可以表示成多项式与真分式之和，多项式不难求积分，故只要会做有理真分式积分，就会做整个有理分式积分了.

有理真分式 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 的积分，由分解部分分式与求积分两步完成.

（1）将真分式 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 分解成部分分式的方法. 若 $Q_m(x)$ 的因式分解式中，含有因式 $(x-a)^k$，则其部分分式对应地有

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 为待定系数.

若 $Q_m(x)$ 中含有因式 $(x^2+px+q)^r\ (p^2-4q<0)$，则其部分分式对应地有

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_rx+C_r}{(x^2+px+q)^r}.$$

其中 B_i、$C_j\ (i,j=1,2,\cdots,r)$ 皆为待定系数.

具体分解时，先写出形式分解式，然后将右边通分求和，并令两端分子相等，定出待定系数.

（2）由分解式可见，有理真分式的积分归结为下面四种形式的积分：

(i) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a}$. (ii) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^s}$.

(iii) $\displaystyle\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$. (iv) $\displaystyle\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}\mathrm{d}x\quad(s\geqslant 2)$.

其中(iii)与(iv)中 $p^2-4q<0$.

前三种已讨论过，对第四种配方可得

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(4q-p^2).$$

因 $4q-p^2>0$，记 $\frac{1}{4}(4q-p^2)=a^2$，得

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2.$$

令 $u=x+\dfrac{p}{2}$，则

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x,\ x^2+px+q=u^2+a^2,\ Bx+C=Bu+R,$$

其中 $R=C-\dfrac{Bp}{2}$，因此

$$\begin{aligned}\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}\mathrm{d}x&=\int\frac{Bu+R}{(u^2+a^2)^s}\mathrm{d}u\\&=\int\frac{Bu\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^s}+R\int\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^s}\\&=\frac{B}{2(1-s)(u^2+a^2)^{s-1}}+R\int\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^s}.\end{aligned}\qquad(*)$$

记 $I_s=\int\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+a^2)^s}$，有递推公式

$$I_s=\frac{1}{2(s-1)a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{s-1}}+(2s-3)I_{s-1}\right]\quad(s\geqslant2),$$

容易推出 I_s．只要将 I_s 代入(*)式中，再用 $u=x+\frac{p}{2}$ 回代即可．

6．关于不定积分的注释

(1) 求导数与求积分是互逆的．已知一个函数求其导数是唯一的，但其逆运算——求不定积分的结果则不是唯一的．积分结果的对与错只能用求导验证．

(2) 连续函数一定有原函数，但未必能用初等函数表示出来，例如，

$$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\ \int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\ln x},\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$$

等都不能用初等函数表示出来．用我们讲过的方法积不出来．其表达式可用级数形式或变上限积分形式给出．

(3) 求一个已给的积分，一般先考虑直接积分法，行不通时，再考虑凑微分法．当被积函数为两个不同类型函数之积时，较多地应优先考虑分部积分法；而被积函数中含有根号时，经常考虑第二换元法，去掉根号．

(4) 两种常见积分的求解途径．

① 形如 $\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}\left(\text{或}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)$ 的积分，总是对二次三项式 ax^2+bx+c 配方，使之转化成如下形式之一，再积分：

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2\pm A^2}\left(\text{或}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2\pm A^2}}\right),\ \int\frac{\mathrm{d}u}{A^2-u^2}\left(\text{或}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{A^2-u^2}}\right).$$

② 形如

$$\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x\quad\text{或}\quad\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$$

的积分，总是拆成两项之和．第一项中分子是二次三项式 ax^2+bx+c 的导数，第二项则转化成上述①的形式．分别求积分．

(二) 定积分

1．定积分的概念

(1) 定积分的定义

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，任取分法 Δ，即在 (a,b) 内任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

将区间 $[a,b]$ 分成 n 个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$．在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i $(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 称为积分微元，和式

$$\sigma(\Delta,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

称为积分和．记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，如果当 $\lambda\to0$ 时，不论对 $[a,b]$ 的分法如何，也不论对 $[x_{i-1},x_i]$ 上 ξ_i 的取法如何，和式 σ 恒有同一极限．则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并称此极限值为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$．即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

其中“$\int$”称为积分号，$f(x)$称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积式，x 称为积分变量，a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a,b]$称为积分区间.

注 ① 定积分与不定积分是两个截然不同的概念．定积分是一个数，定积分存在时，其值只与被积函数$f(x)$及积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量用什么字母无关．如

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

② 无界函数一定不可积．因为总可以借助 ξ_i 的选择使积分和成为无穷大．换言之，可积必有界，但有界函数未必可积．例如，狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\ 是有理数,\\ 0, & 若\ x\ 是无理数.\end{cases}\quad x\in[0,1]$$

就是如此．可见，有界是可积的必要条件但不是充分条件.

③ 在上述定积分的定义中我们认为 $a<b$，若 $a>b$，则规定

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

即定积分的上限与下限互换时，定积分变号．特别地，当 $a=b$ 时，$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(2) 定积分的几何意义

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示介于 x 轴、曲线 $y=f(x)$与直线 $x=a$ 和 $x=b$ 之间各部分面积的代数和，其中在 x 轴上方的规定为正，下方的规定为负.

(3) 可积的充分条件

① 闭区间$[a,b]$上的连续函数必在$[a,b]$上可积.

② 闭区间$[a,b]$上的只有有限个间断点的有界函数必在$[a,b]$上可积.

③ 闭区间$[a,b]$上的单调函数必定在$[a,b]$上可积.

2. 定积分的基本性质

以下性质均认为被积函数在所论区间上可积.

(1) 常数因子可以提到积分号外，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (k\ 为常数).$$

(2) 代数和的积分等于积分的代数和，即

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 有限可加性

若积分区间$[a,b]$被点 c 分成两个子区间$[a,c]$与$[c,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 c 可以在(a,b)内，也可以在$[a,b]$外，只需$f(x)$在最长区间上可积.

(4) 若在$[a,b]$上，$f(x)\equiv 1$，则

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$$

(5) 设在$[a,b]$上，$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b).$$

特别地，若$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$上连续，$f(x)\leqslant g(x)$且至少存在一点 $x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)<g(x_0)$，

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(6) 估值定理

设 M 与 m 分别为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值与最小值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \quad (a < b).$$

(7) 积分中值定理

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续．则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b).$$

函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值定义为

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

3．微积分的基本公式

(1) 积分上限函数

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，则称

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

为积分上限函数或变上限积分．

(2) 积分上限函数的导数

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

在$[a,b]$上可导，且其导数为

$$\Phi'(x) = \left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]' = f(x).$$

由此可知：

① 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t = -f(x).$$

② 若$f(x)$连续，$\varphi(x)$可导，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

③ 若$f(x)$连续，$\varphi(x)$与$\psi(x)$可导，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x).$$

(3) 原函数存在定理

若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

为$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数．

(4) 微积分的基本公式(牛顿－莱布尼茨公式)

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$的任意一个原函数，即$F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

该公式指出了求连续函数定积分的一般方法，把求定积分的问题，转化成求原函数的问题．作为积分和

的极限的定积分，与作为微分运算的逆运算的不定积分之间这种内在联系的发现，是微积分学产生与发展的契机，是微积分学有如此广泛应用的关键.

4. 定积分的计算

(1) 直接积分法

(2) 定积分的换元法

设①函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续；②函数$x=\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上单调且有连续导数；③$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$. 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(3) 定积分的分部积分法

设函数$u=u(x)$，$v=v(x)$在区间$[a,b]$上有连续导数，则有定积分的分部积分公式

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b u'v\mathrm{d}x.$$

5. 几个常用公式

(1) 设$f(x)$在$[-a,a]$上连续，则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$$
$$=\begin{cases}0, & \text{当} f(-x)=-f(x)\text{，即} f(x)\text{ 为奇函数时，}\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{当} f(-x)=f(x)\text{，即} f(x)\text{ 为偶函数时.}\end{cases}$$

(2) 设$f(x)$是以T为周期的连续函数，a为任意实数，则

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2m-1}{2m}\cdot\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2m\text{ 时，}\\ \dfrac{2m}{2m+1}\cdot\dfrac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}, & n=2m+1\text{ 时}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2m\text{ 时，}\\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1\text{ 时.}\end{cases}$$

(4) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x.$$

(5) 设$f(x)$连续，则

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

6. 定积分的应用

(1) 平面图形的面积

常用的面积公式：

① 由曲线$y=f(x)$，直线$x=a$，$x=b$ $(a<b)$与x轴所围成的平面图形的面积为

$$S=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

② 由曲线$y=f(x)$，$y=g(x)$与直线$x=a$，$x=b$ $(a<b)$所围成的平面图形的面积为

$$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$$

③ 由曲线$x=\varphi(y)$，直线$y=c$，$y=d$ $(c<d)$与y轴所围成的平面图形的面积为

$$S = \int_c^d |\varphi(y)| \mathrm{d}y.$$

④ 由曲线 $x=\varphi(y)$，$x=\psi(y)$与直线 $y=c$，$y=d$ $(c<d)$所围成的平面图形的面积为

$$S = \int_c^d |\varphi(y) - \psi(y)| \mathrm{d}y.$$

(2) 旋转体的体积

① 设平面图形由连续曲线 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ $(a<b)$与 x 轴围成，则该图形绕 x 轴旋转一周生成的旋转体体积 V_x 为

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

② 若平面图形由连续曲线 $x=\varphi(y)$，$y=c$，$y=d$ $(c<d)$与 y 轴围成，则该图形绕 y 轴旋转一周生成的旋转体体积 V_y 为

$$V_y = \int_c^d \pi x^2 \mathrm{d}y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y.$$

③ 若平面图形由连续曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$，$x=a$，$x=b$ $(0\leqslant a<b)$与 x 轴围成，则该图形绕 y 轴旋转一周生成的旋转体体积 V_y 为

$$V_y = \int_a^b 2\pi xy \mathrm{d}x = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 积分学在经济中的应用

总成本函数 $C=C(q)$，总收益函数 $R=R(q)$等，统称总函数．用微分法对总函数求导数可得边际函数、边际成本 $MC=\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q}$、边际收益 $MR=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}q}$等；已知边际成本、边际收益等边际函数，用积分法对边际函数积分可得总函数，即总成本、总收益等．

① 用不定积分表示总函数

$$C(q) = \int (MC)\mathrm{d}q,$$

用$C(0)=C_0$(固定成本)确定积分常数 C；

$$R(q) = \int (MR)\mathrm{d}q,$$

用$R(0)=0$ 确定积分常数 C.

② 用定积分表示总函数

$$C(q) = \int_0^q (MC)\mathrm{d}q + C_0 \quad (C_0 \text{表示固定成本}),$$

$$R(q) = \int_0^q (MR)\mathrm{d}q.$$

③ q 由 a 个单位变化到 b 个单位，总成本的改变量、总收益的改变量分别为

$$\Delta C = \int_a^b (MC)\mathrm{d}q,$$

$$\Delta R = \int_a^b (MR)\mathrm{d}q.$$

7. 关于定积分的注释

(1) 间断函数也可能有原函数．例如，

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & \text{若 } x\neq 0, \\ 0, & \text{若 } x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处不连续，但显然

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{若 } x\neq 0, \\ 0, & \text{若 } x=0 \end{cases}$$

是$f(x)$的一个原函数．因为$f(x)$在$[0,1]$上为只有一个间断点$(x=0)$的有界函数，所以可积，从而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^1 = \sin 1.$$

这里实则将牛顿－莱布尼茨公式进行了推广：在积分区间$[a,b]$上只有有限个间断点的被积函数$f(x)$，只要原函数在$[a,b]$上连续，牛顿－莱布尼茨公式仍有效．在此处，原函数$F(x)$的理解是广义的，即$F(x)$在$[a,b]$上除有限个点外可导，并且有$F'(x)=f(x)$．

(2) 计算定积分时，一定要注意法则条件．例如，计算$\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$时，若用牛顿－莱布尼茨公式，令$t=\tan x$，则$x=\arctan t$，$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$，得

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} &= \int\frac{\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int\frac{\mathrm{d}t}{1+2t^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}t)}{1+(\sqrt{2}t)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)+C\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}.\end{aligned}$$

结果积分值为负，无疑是错误的．但错在哪里呢?

因为由函数$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)$在$x=\frac{\pi}{2}\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$处无意义，可知$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)$既不是$\frac{1}{1+\sin^2 x}$在整个积分区间$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$上的原函数，在积分区间$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$上也不是连续的，故不符合牛顿－莱布尼茨公式及其推广的条件．

若用换元法，令$t=\tan x$，则$\alpha=\tan 0=0$，$\beta=\tan\frac{3\pi}{4}=-1$，所以

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int_0^{-1}\frac{\mathrm{d}t}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}t)\Big|_0^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}.$$

这当然是错的，错在哪里呢？因为当$t\in[-1,0]$时，$x=\arctan t$之值不属于原积分区间$\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$上．

补救的办法是将积分区间拆开，

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}.$$

令$x=\frac{\pi}{2}-t$，得

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t};$$

令$x=\frac{\pi}{2}+t$，得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t},$$

由此，得

$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2} + \sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

（三）反常积分

定积分存在有两个必要条件，即积分区间有限与被积函数有界．破坏了积分区间有限，引出无穷区间上的反常积分；破坏了被积函数有界，引出无界函数的反常积分．

1．无穷区间上的反常积分

依区间不同，此类反常积分有三种形式：

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x,\ \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

若函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上有定义，并且对任意的 $A>a$，$f(x)$在$[a,A]$上均可积，则称符号$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$为$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的反常积分，并规定其意义为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x.$$

若极限存在，则称反常积分收敛；若极限不存在，则称反常积分发散．

类似地定义无穷区间$(-\infty,b]$上的反常积分，并规定

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)\mathrm{d}x.$$

对无穷区间$(-\infty,+\infty)$内的反常积分，则规定

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 c 为任意给定的实数．

由此可见$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与$\int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛，并且$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的收敛性与 c 的选择无关．

由定义可知，计算反常积分由计算一个定积分与取极限两步完成．若在$[a,+\infty)$上$F'(x)=f(x)$，则为了书写简便常记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

其中$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$．另两种也有类似记法．

显然当且仅当$F(+\infty)$存在时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛．

2．无界函数的反常积分

若函数$f(x)$在 $x=b$ 点有 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$，但对任一区间$[a,b-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<b-a)$，$f(x)$在$[a,b-\varepsilon]$上都可积，则称 b 为$f(x)$的奇点或瑕点，称符号$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 为区间$[a,b)$上无界函数$f(x)$的反常积分，并规定其意义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

若$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，此时$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 具有数值意义；若极限不存在，则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散，此时$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 无数值意义．

由定义可知，计算此类反常积分由计算一个定积分与取极限两步完成．若在$[a,b)$上$F'(x)=f(x)$，则为了书写简便常记成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{b^-} = F(b^-) - F(a),$$

其中$F(b^-)=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$．显然，当且仅当$F(b^-)$存在时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛．

若 a 为$f(x)$的瑕点，则无界函数$f(x)$的反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$可以类似定义，并规定

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若$f(x)$在$[a,b]$内部有一个瑕点 c，$a<c<b$，则无界函数反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$规定为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

此时$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$中至少有一个是无界函数的反常积分．不难看出$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$收敛的充要条件是$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$都收敛．

3．关于反常积分的注释

(1) 无界函数反常积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$与普通定积分形式一样，为了区分这两个不同的概念，对反常积分必须先指出瑕点，再进行计算．

(2) 只要换元前后的两个积分中有一个存在，分部积分公式中的三项有两项有意义，则定积分的换元法与分部积分法对两类反常积分仍然成立，同时利用倒置换两类反常积分可以互相转化．

(3) 主要结果

① $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$

② $\displaystyle\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^k} = \begin{cases}\dfrac{b^{1-k}}{1-k}, & 0<k<1,\\ +\infty, & k\geqslant 1.\end{cases}$

4．Γ函数与B函数

(1) Γ函数

可以证明当 $\alpha>0$ 时，反常积分$\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$收敛，从而在 $\alpha>0$ 的范围内，该积分确定了一个以 α 为自变量的函数，称为Γ函数，记为$\Gamma(\alpha)$，即

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \quad (\alpha>0).$$

若令 $x=t^2$，则得Γ函数的另一种表达式

$$\Gamma(\alpha) = 2\int_0^{+\infty}t^{2\alpha-1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

上式中取 $\alpha=\frac{1}{2}$，则

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

(2) B函数

可以证明当 $a>0$，$b>0$ 时，反常积分$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$是收敛的，从而在 $a>0$，$b>0$ 的范围内，该积分确定了一个以 a，b 为自变量的二元函数，称为B函数，记为$\mathrm{B}(a,b)$，即

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x \quad (a>0,b>0).$$

若令 $x=\sin^2 t$，则得 B 函数的另一种表达式

$$B(a,b)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2a-1}t\cos^{2b-1}t\,dt.$$

上式中取 $a=b=\frac{1}{2}$，则 $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$.

(3) Γ 函数与 B 函数的性质

① Γ 函数满足递推公式

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a).$$

特别地，$\Gamma(n+1)=n!$. 可见 Γ 函数是阶乘的推广.

② B 函数具有对称性：$B(a,b)=B(b,a)$.

③ Γ 函数与 B 函数有下述关系：

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

·例题详解·

例 1.3.1 设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$ ________.

[答案] $x+e^x+C$.

[提示] 本题主要考查函数关系式的确定及不定积分的性质与计算. 可令 $\ln x=t$，得 $f'(x)$，积分求得 $f(x)$.

[解] 令 $\ln x=t$，则 $x=e^t$，故 $f'(t)=1+e^t$，从而 $f'(x)=1+e^x$. 积分得

$$f(x)=x+e^x+C.$$

[典型错误] 将答案写成 $x+e^x$. 原因是忘了不定积分的积分常数 C.

例 1.3.2 $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=$ ________.

[答案] $-2\arctan\sqrt{1-x}+C$.

[提示] 本题主要考查不定积分的换元积分法. 当被积函数中含有根号，且根号内 x 为一次时，可令 $\sqrt{1-x}=t$. 本题亦可考虑凑微分法.

[解法 1] 令 $\sqrt{1-x}=t$，则 $x=1-t^2$，$dx=-2t\,dt$，

$$\begin{aligned}原式&=\int\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)\cdot t}=-2\int\frac{dt}{1+t^2}=-2\arctan t+C\\&=-2\arctan\sqrt{1-x}+C.\end{aligned}$$

[解法 2] $$\begin{aligned}原式&=\int\frac{dx}{[1+(1-x)]\sqrt{1-x}}=-2\int\frac{d\sqrt{1-x}}{1+(\sqrt{1-x})^2}\\&=-2\arctan\sqrt{1-x}+C.\end{aligned}$$

[典型错误] 将答案写成 $-\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1-x}+C$ 或 $2\arctan\sqrt{1-x}+C$ 或 $-2\arctan\sqrt{1-x}$. 原因是 dx 求错，或凑微分时系数弄错，或忘了不定积分的积分常数 C.

例 1.3.3 设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，则 $\int\frac{dx}{f(x)}=$ ________.

[答案] $-\frac{1}{3}(\sqrt{1-x^2})^3+C$.

[提示] 本题主要考查不定积分的性质及不定积分的换元积分法. 本题必须先求出 $f(x)$，然后用凑微分法或三角代换法(当被积函数含根号，且根号内 x 为二次时)求解.

[解] 对 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$ 两边求导，得

$$xf(x)=(\arcsin x+C)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}},$$

故
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$
$$=-\frac{1}{3}(\sqrt{1-x^2})^3+C.$$

也可令 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\sin t\cdot\cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=-\int\cos^2 t\,\mathrm{d}\cos t$$
$$=-\frac{1}{3}\cos^3 t+C=-\frac{1}{3}(\sqrt{1-x^2})^3+C.$$

［典型错误］ 将答案写成$\frac{1}{3}(\sqrt{1-x^2})^3+C$或$-\frac{2}{3}(\sqrt{1-x^2})^3+C$或$-\frac{1}{3}(\sqrt{1-x^2})^3$. 原因是凑微分时系数$(-1)$忘了，或$\frac{1}{2}$漏了，或忘了不定积分的积分常数 C.

例 1.3.4 $\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

［答案］ $-\frac{\ln x}{x}+C$.

［提示］ 本题主要考查不定积分的性质、凑微分法及分部积分法. 当被积函数为两类不同类型函数的乘积时，应考虑分部积分法. 就此题而言，利用积分性质更方便，但前提是对导数非常熟悉.

［解］
$$\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\ln x\,\mathrm{d}\frac{1}{x}-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}\ln x-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\ln x}{x}+C;$$

或
$$\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\mathrm{d}\frac{\ln x}{x}=-\frac{\ln x}{x}+C.$$

［典型错误］ 将答案写成$\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}+C$或$\frac{\ln x}{x}+C$或$-\frac{\ln x}{x}$. 原因是$\frac{1}{x^2}$或$\frac{\ln x-1}{x^2}$凑到微分号内时将$(-1)$漏了，或忘了加不定积分常数 C.

例 1.3.5 $\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

［答案］ $\ln 3$.

［提示］ 本题主要考查定积分的性质和计算. 遇到积分限关于原点对称的定积分，应考虑被积函数的奇偶性，即

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{为奇函数},\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{为偶函数}.\end{cases}$$

遇到被积函数中含有绝对值的定积分，应利用定积分的区间可加性，去掉绝对值符号，再积分.

［解］ 原式$=\int_{-2}^{2}\frac{x}{2+x^2}\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}\frac{|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x=0+2\int_0^2\frac{x}{2+x^2}\mathrm{d}x$
$$=\int_0^2\frac{\mathrm{d}(2+x^2)}{2+x^2}=\ln(2+x^2)\Big|_0^2=\ln 6-\ln 2=\ln 3.$$

［典型错误］ 将答案写成 $\arctan\sqrt{2}$或 0. 原因是积分公式记不清或性质用错，误认为积分限关于原点对称的定积分的值恒为 0.

例 1.3.6 设$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

［答案］ $\frac{\pi}{4-\pi}$.

［提示］ 本题主要考查定积分的概念及定积分的几何意义．由于定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 是一个常数．可设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = A$，原式两边从 0 到 1 作积分．得关于 A 的代数方程，解之即得答案．

［解］ 定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 是一个常数．设为 A，则

$$A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + A\cdot\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \arctan x\Big|_0^1 + A\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}A,$$

故 $A = \dfrac{\pi}{4-\pi}$.

［典型错误］ 用两边求导的方法去做，得不到结果．原因是 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 是定积分．其值是一个常数．而非积分上限函数．

例 1.3.7 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}, \\ -1, & x\geqslant\frac{1}{2}, \end{cases}$ 则 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)\mathrm{d}x =$ ________.

［答案］ $-\dfrac{1}{2}$.

［提示］ 本题主要考查定积分的换元积分法和奇函数在对称区间上积分的性质，还考查分段函数的定积分计算方法．

［解］ 设 $x-1=t$，则 $x=t+1$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$．当 $x=\frac{1}{2}$时，$t=-\frac{1}{2}$；当 $x=2$ 时，$t=1$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} te^{t^2}\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1(-1)\mathrm{d}t$$

$$=0-t\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

［典型错误］ 将答案写成 $-\dfrac{3}{2}$．原因是错将 $f(x-1)$与 $f(x)$看成一样，或者说定积分换元的同时没有换限．

例 1.3.8 设 $f(x)$有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\,\mathrm{d}x =$ ________.

［答案］ $\dfrac{4}{\pi}-1$.

［提示］ 本题主要考查原函数的概念及分部积分法．由于被积函数为 $xf'(x)$．应考虑分部积分法．

［解］ 由 $f(x)$有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，则

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

而

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x\cos x - \sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{\pi} - 1.$$

［典型错误］ 将答案写成 1．原因是没弄清谁是谁的原函数．错误地认为 $f'(x) = \dfrac{\sin x}{x}$，从而

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1.$$

例 1.3.9 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}=$ ________.

[答案] $\frac{\pi}{4e}$.

[提示] 本题主要考查反常积分的计算(类似定积分的计算). 本题可用凑微分法.

[解]
$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}=\int_1^{+\infty}\frac{e^x dx}{e^2+e^{2x}}=\int_1^{+\infty}\frac{d\,e^x}{e^2+(e^x)^2}$$
$$=\frac{1}{e}\int_1^{+\infty}\frac{d\left(\frac{e^x}{e}\right)}{1+\left(\frac{e^x}{e}\right)^2}=\frac{1}{e}\arctan\frac{e^x}{e}\Big|_1^{+\infty}$$
$$=\frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4e}.$$

[典型错误] 将答案写成$\frac{\pi}{4}$. 原因是凑微分时漏了平衡系数$\frac{1}{e}$.

例 1.3.10 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t dt$, 则常数 $a=$ ________.

[答案] 2.

[提示] 本题主要考查"1^∞"型极限的求法及反常积分的计算. 本题$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}$用第二个重要极限求解较快捷, 由于$\int_{-\infty}^{a}te^t dt$的被积函数为两类不同函数(幂函数与指数函数)之积, 用分部积分法求出, 得关于 a 的方程, 解之即得 a 的值.

[解]
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^a=e^a,$$
$$\int_{-\infty}^{a}te^t dt=\int_{-\infty}^{a}t\,d\,e^t=(te^t-e^t)\Big|_{-\infty}^{a}=ae^a-e^a,$$
于是 $e^a=ae^a-e^a$, 解得 $a=2$.

[典型错误] 将答案写成 1. 原因是错误地认为$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=0$, 或将$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}$误认为等于 1, 这样 $ae^a-e^a=1$ 为超越方程, 无法求解, 从而得不到答案.

例 1.3.11 下列反常积分发散的是( ).

(A) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$ (B) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (C) $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ (D) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$

[答案] (A).

[提示] 本题考查反常积分的收敛性. 可以通过计算, 或直接证明正确的结论, 或用举反例的方法排除错误选项.

[解]
$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sin x}dx+\int_0^1\frac{1}{\sin x}dx.$$

因为在 $0<x\leqslant 1$ 时, $\frac{1}{\sin x}>\frac{1}{x}$, 由反常积分$\int_0^1\frac{dx}{x}=+\infty$(发散), 得$\int_0^1\frac{dx}{\sin x}=+\infty$(也发散), 可见$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$ 发散.

也可用排除法, (B)、(C)、(D)都收敛, 应选(A).

[典型错误] 考生容易疏忽$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$ 中$[-1,1]$内的无穷间断点 $x=0$. 从而导致选择错误.

例 1.3.12 设函数 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2 dt$, $g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$, 则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$是$g(x)$的( ).

(A) 低阶无穷小量 (B) 高阶无穷小量

(C) 等价无穷小量 (D) 同阶但不等价的无穷小量

[答案]（B）.

[提示] 本题主要考查积分上限函数的导数，洛必达法则，无穷小量阶的比较等基本概念和运算．在求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$时，多次利用洛必达法则，并利用$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$或用等价无穷小量替换．

[解]
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\cdot\sin x}{x^4+x^5}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(1-\cos x)^2\cdot 2(1-\cos x)\cdot\sin x}{3x^2+4x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)}{3x+4x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{3+8x}=0;\end{aligned}$$

或
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\cdot\sin x}{x^4+x^5}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^3+x^4}\\&=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x}=0.\end{aligned}$$

[典型错误] 选（D）的考生不少，原因是将复合函数导数$(1-\cos x)'=\sin x$遗漏了，或用洛必达法则时分子积分上限求导了，而分母没求，或错将无穷小量当无穷大量做了（看成最高次系数之比）.

例 1.3.13　设$g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，其中$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1)，& 若\ 0\leqslant x<1，\\ \frac{1}{3}(x-1)，& 若\ 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$则$g(x)$在区间$(0,2)$内（　　）.

（A）无界　　（B）递减　　（C）不连续　　（D）连续

[答案]（D）.

[提示] 本题主要考查函数连续的概念．本题用积分上限函数的性质来判别连续性，或通过计算判别连续性.

[解] 尽管$f(x)$在区间$[0,2]$上存在不连续点$x=1$，但由于$f(x)$是有界的，因而积分上限函数$g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$是连续函数．故选（D）.

也可先求出$g(x)$的表达式：

当$0\leqslant x<1$时，$g(x)=\int_0^x\frac{1}{2}(u^2+1)\mathrm{d}u=\frac{1}{6}(x^3+3x)$；

当$1\leqslant x\leqslant 2$时，$g(x)=\int_0^1\frac{1}{2}(u^2+1)\mathrm{d}u+\int_1^x\frac{1}{3}(u-1)\mathrm{d}u=\frac{1}{6}(x^2-2x+5)$，

即
$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}(x^3+3x)，& 若\ 0\leqslant x<1，\\ \frac{1}{6}(x^2-2x+5)，& 若\ 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

由初等函数的连续性，显然$g(x)$在$0\leqslant x<1$与$1<x\leqslant 2$连续.

当$x=1$时，用连续定义．由于
$$g(1)=\frac{2}{3}，\quad \lim_{x\to 1^-}g(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{6}(x^3+3x)=\frac{2}{3}，$$

$$\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{6}(x^2-2x+5)=\frac{2}{3},$$

所以$g(x)$在 $x=1$ 处连续，即$g(x)$在$[0,2]$上连续．从而$g(x)$在$(0,2)$内连续．故选(D)．

[典型错误] 选(C)的考生不少．原因是错误地认为$f(x)$不连续导致$g(x)$也不连续，对积分上限函数的性质不清楚．

例 1.3.14 设函数$f(x)$连续，则在下列变上限积分定义的函数中，必为偶函数的是(　　)．

(A) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$　　(B) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$

(C) $\int_0^x f(t^2)dt$　　(D) $\int_0^x f^2(t)dt$

[答案] (A)．

[提示] 本题主要考查由被积函数的奇偶性得积分上限函数的奇偶性．本题利用“奇函数的原函数必为偶函数”及对任一函数$f(x)$(非常数函数)，$f(x)+f(-x)$是偶函数，$f(x)-f(-x)$是奇函数，即可得到正确的结论．

[解] 设 $F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$，则

$$F(-x)=\int_0^{-x} t[f(t)+f(-t)]dt \xlongequal{令u=-t} \int_0^x(-u)[f(-u)+f(u)](-du)$$

$$=\int_0^x u[f(u)+f(-u)]du=F(x),$$

即$F(x)$是偶函数，(A)是正确的．

类似方法可以证明(B)、(C)均为奇函数，而对(D)的函数，因为$\int_0^{-x} f^2(x)dt \xlongequal{u=-t} \int_0^x -f^2(-u)du$，当然不是偶函数(事实上不能断定其奇偶性)．

[典型错误] 选(B)或(C)的考生不少，原因是错误地认为当被积函数是偶函数时，其积分上限函数也是偶函数，显然概念不清．

例 1.3.15 设$f(x)$是连续函数，$F(x)$是$f(x)$的原函数，则(　　)．

(A) 当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必为偶函数　　(B) 当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必为奇函数

(C) 当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必为周期函数　　(D) 当$f(x)$是单调函数时，$F(x)$必为单调函数

[答案] (A)．

[提示] 本题主要考查原函数的概念及积分上限函数的表示法．本题要求考生熟知函数的奇偶性、周期性和单调性的概念，并会用举反例法排除干扰项．

[解] $f(x)$的原函数$F(x)$可以写成$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$，

则
$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C$$

$$\xlongequal{令u=-t}\int_0^x -f(-u)du+C.$$

当$f(x)$是奇函数时，$f(-u)=-f(u)$，从而有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)du+C=F(x),$$

故选(A)．至于(B)、(C)、(D)可分别举反例如下：

(B)的反例：$f(x)=\cos x$，$F(x)=\sin x+1$ 不是奇函数；

(C)的反例：$f(x)=\cos^2 x$，$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$，不论 C 取什么常数，$F(x)$都不是周期函数；

(D)的反例：$f(x)=x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调函数，但$F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数．

[典型错误] 考生选择(C)的达 58%，一方面说明多数考生对原函数的概念认识不透，不会用变上限函

数表示之；另一方面说明考生在无法举反例排除时，想当然地猜测((C)的反例较为难举，故猜(C)者多)．“周期函数的导函数是周期函数，但周期函数的原函数不一定是周期函数”是一个重要的知识点，考生知之甚少．

例 1.3.16 设$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$，则$F(x)$(　　)．

(A) 为正常数　(B) 为负常数　(C) 恒为零　(D) 不为常数

[答案] (A)．

[提示] 本题主要考查周期函数的积分性质．若$f(x)$是周期为 T 的周期函数，则对于任意常数 a，有$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$．再利用定积分的性质，即得结论．

[解]

$$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$$
$$=-\int_0^{2\pi} e^{\sin t}d\cos t=0+\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,e^{\sin t}dt>0,$$

故知$F(x)$为正常数．选(A)．

[典型错误] 选(D)的考生不少，原因是不清楚周期函数的积分性质，认为变限积分的值不为常数．

例 1.3.17 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$，则(　　)．

(A) $I_1>I_2>1$　(B) $1>I_1>I_2$　(C) $I_2>I_1>1$　(D) $1>I_2>I_1$

[答案] (B)．

[提示] 本题主要考查函数的单调性及定积分的比较性质．在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$内，$\frac{4}{\pi}>\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\tan x}$．

[解] 因为当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时，有$0<x<\tan x$，故

$$x^2<\tan^2 x，即\quad \frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\tan x},$$

所以

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx>\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx=I_2,$$

这便排除了选项(C)、(D)．

又令$f(x)=\frac{\tan x}{x}$，则$f'(x)=\frac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}=\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2 x}$．当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时，有$0<2x<\frac{\pi}{2}$，故$2x>\sin 2x$，从而$\left(\frac{\tan x}{x}\right)'>0$，即$f(x)=\frac{\tan x}{x}$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$内单调增加，有$\frac{\tan x}{x}<\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}$，故

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx<\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=1.$$

即选(B)．

也可由　$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}<1$，故选(B)．

[典型错误] 排除(C)、(D)后选(A)．原因是对$f(x)=\frac{\tan x}{x}$的单调性不清楚，粗略地由$\tan x>x$，推出$\frac{\tan x}{x}>1$，估计$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx>1$．

例 1.3.18 设$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则(　　)．

(A) $F(x)$在 $x=0$ 点不连续

(B) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，在 $x=0$ 点不可导

(C) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且满足$F'(x)=f(x)$

(D) $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，但不一定满足$F'(x)=f(x)$

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查定积分的计算方法及分段函数在分界点处连续性与可导性的判别方法．本题先求$F(x)$，然后考虑其在分界点 $x=0$ 处的连续性，并用导数的定义考虑其在分界点 $x=0$ 处的可导性．

[解]
$$F(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

因为$F(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，

所以$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续．

又
$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1,$$
$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1,$$

$F'_-(0)\neq F'_+(0)$，故$F(x)$在 $x=0$ 处不可导，即选项(B)正确．

[典型错误] 选(C)的考生不少，原因是忽略了$F(x)$为分段函数．要判定分段函数在分界点处的可导性，应用导数的定义判别，而不应该用初等函数的判别方法．

例 1.3.19 计算 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x$．

[提示] 本题主要考查不定积分的凑微分、分部积分等基本积分法．注意到$(\tan x+1)^2=1+\tan^2x+2\tan x=\sec^2x+2\tan x$，而 $\sec^2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\tan x$，则可利用分部积分公式求出此不定积分．

[解法 1]
$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\int e^{2x}\sec^2x\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x\\
&=\int e^{2x}\mathrm{d}\tan x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x\\
&=e^{2x}\tan x-\int\tan x\mathrm{d}\,e^{2x}+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x\\
&=e^{2x}\tan x-2\int\tan x e^{2x}\mathrm{d}x+2\int e^{2x}\tan x\mathrm{d}x\\
&=e^{2x}\tan x+C.
\end{aligned}$$

[解法 2]
$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{1}{2}\int(\tan x+1)^2\mathrm{d}\,e^{2x}\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}(\tan x+1)^2-\int e^{2x}(\tan x+1)\sec^2x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}(\tan x+1)^2-\int e^{2x}\tan x\cdot\sec^2x\mathrm{d}x-\int e^{2x}\sec^2x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}(\tan x+1)^2-\frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}\tan^2x-\int e^{2x}\sec^2x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}(\tan x+1)^2-\frac{1}{2}e^{2x}\tan^2x+\int e^{2x}\tan^2x\mathrm{d}x-\int e^{2x}\sec^2x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}(\tan x+1)^2-\frac{1}{2}e^{2x}\tan^2x-\int e^{2x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}(2\tan x+1)-\frac{1}{2}e^{2x}+C\\
&=e^{2x}\tan x+C.
\end{aligned}$$

[典型错误] 凑微分时系数没有保持平衡；或分部积分时，没将一部分函数放到微分号内，导致积不出来；或将分部积分公式中的减号粗心地写成了加号，导致错误．

例 1.3.20 设$f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$．

[提示] 本题主要考查不定积分的分部积分、凑微分等基本积分法．本题关键是应先求出$f(x)$的表达式，再充分利用凑微分、分部积分和初等函数的恒等变换等方法求解．

[解]　设 $\ln x = t$，则 $x = e^t$，故 $f(t) = \dfrac{\ln(1+e^t)}{e^t}$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}\mathrm{d}x = -\int \ln(1+e^x)\mathrm{d}\,e^{-x}$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int\left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -e^{-x}\ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C.$$

[典型错误]　凑微分时没有乘系数 -1；或 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$ 不知如何积分(应想方设法让分子出现 e^x 或 e^{-x}).

例 1.3.21　求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

[提示]　本题主要考查不定积分的换元积分法和凑微分法．当被积函数 $f(x)$ 中含有根号，而根号内 x 为二次时，作三角代换将根号去掉．本题可令 $x = \tan t$.

[解]　设 $x = \tan t$．则 $\mathrm{d}x = \sec^2 t\,\mathrm{d}t$.

$$\text{原式} = \int \frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{(2\tan^2 t+1)\sec t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(2\tan^2 t+1)\cos t}$$

$$= \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{2\sin^2 t + \cos^2 t} = \int \frac{\mathrm{d}\sin t}{1+\sin^2 t} = \arctan(\sin t) + C$$

$$= \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C.$$

[典型错误]　错误地令 $x = \sec t$，说明基本功不扎实；或 $\int \dfrac{\mathrm{d}t}{(2\tan^2 t+1)\cos t}$ 不会积分(应设法将 $\tan t$ 化为用 $\sin t$、$\cos t$ 表示的式子).

例 1.3.22　设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x \geqslant 0$ 时，

$$f(x)F(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2},$$

已知 $F(0)=1$、$F(x)>0$．试求 $f(x)$.

[提示]　本题主要考查原函数的基本概念及不定积分的基本运算．可利用 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，即将 $f(x)=F'(x)$ 代入所给的等式中，两边求不定积分，求出 $F(x)$.

[解]　由 $F'(x)=f(x)$，有

$$2F(x)F'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}.$$

于是，两边不定积分

$$\int 2F(x)F'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x,$$

得

$$F^2(x) = \int \frac{e^x}{1+x}\mathrm{d}x - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\,e^x}{1+x} - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^x}{1+x} + C.$$

由 $F(0)=1$，得 $C=0$．从而，由 $F(x)>0$，得

$$F(x) = \sqrt{\frac{e^x}{1+x}},$$

故

$$f(x) = \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

[典型错误] 有些考生没有利用$F(x)$是$f(x)$的原函数，没有将$f(x)=F'(x)$代入所给等式中，故无法求解；有些考生对$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$不会求解，说明积分的基本功还不扎实.

例 1.3.23 计算不定积分$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

[提示] 本题主要考查不定积分的换元积分法与分部积分法. 当被积函数含根号，且根号内x为二次的，则用三角代换；当被积函数为两个不同类型函数之积，可考虑分部积分法. 注意到本题被积函数含$\sqrt{1+x^2}$以及$\arctan x$，故可设$x=\tan t$，然后用分部积分法；若能看出$d\,e^{\arctan x}=e^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}dx$亦可直接分部积分. 但无论哪种解法，在用分部积分法后都将得到所求不定积分的方程，最后通过解方程而得到所求的解.

[解法 1] 设$x=\tan t$，则$dx=\sec^2 t\,dt$.

$$原式=\int \frac{\tan t\cdot e^t}{\sec^3 t}\sec^2 t\,dt=\int e^t \sin t\,dt.$$

又
$$\begin{aligned}\int e^t\sin t\,dt&=\int \sin t\,d\,e^t=e^t\sin t-\int e^t\cos t\,dt\\&=e^t\sin t-\int\cos t\,d\,e^t\\&=e^t\sin t-\left(e^t\cos t+\int e^t\sin t\,dt\right).\end{aligned}$$

故
$$\int e^t\sin t\,dt=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C,$$

因此
$$\begin{aligned}\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx&=\frac{1}{2}e^{\arctan x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C\\&=\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.\end{aligned}$$

[解法 2]
$$\begin{aligned}\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx&=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}d\,e^{\arctan x}\\&=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx\\&=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d\,e^{\arctan x}\\&=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,\end{aligned}$$

整理得
$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

[典型错误] 一些考生不会计算$\int e^t\sin t\,dt$，说明基本功不扎实. 有些考生在计算$\int e^t\sin t\,dt$时，要么两次放到微分号内的函数不同类(应该用同一类)，要么放入$\sin t$时少了(-1).

例 1.3.24 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{x(1-\cos x)}$.

[提示] 本题主要考查洛必达法则求极限，其中用到积分上限函数的求导法则. 本题为简化计算，可用等价无穷小量替换，即$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

[解法 1]
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{x(1-\cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \arctan(1+t)\mathrm{d}t}{1-\cos x + x\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(1+x^2)\cdot 2x}{\sin x + \sin x + x\cos x}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \arctan(1+x^2)\cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{2\sin x}{x} + \cos x}$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

［解法 2］

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x^3}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \arctan(1+t)\mathrm{d}t}{3x^2}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(1+x^2)\cdot 2x}{6x}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}.$$

［典型错误］ 积分上限函数的求导法则不能正确运用；或分母用等价无穷小量替换的同时错误地将分子求导了.

例 1.3.25 设函数$f(x)$连续，且$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan x^2$，已知$f(1)=1$，求$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$的值.

［提示］ 本题主要考查积分上限函数的导数. 从已给的等式直接计算$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$是很困难的，因为所给等式的左端变上限积分的被积函数中含有求导数的变量x，所以先作变量替换，再对等式两端关于自变量x求导，从而发现求出$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$的途径.

［解］ 令$u=2x-t$，则$t=2x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$.

$$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = -\int_{2x}^x (2x-u)f(u)\mathrm{d}u$$

$$= 2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - \int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u,$$

于是

$$2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u - \int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\arctan x^2,$$

上式两边对x求导，得

$$2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u + 2x[2f(2x)-f(x)] - [2xf(2x)\cdot 2 - xf(x)] = \frac{x}{1+x^4},$$

即

$$2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u = \frac{x}{1+x^4} + xf(x).$$

令$x=1$，得

$$2\int_1^2 f(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2},$$

于是

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{3}{4}.$$

[典型错误] 有些考生直接对等式两边求导，说明对积分上限函数的导数概念不清．也有考生对 $2\int_x^{2x} f(u)\,du = \frac{x}{1+x^4} + xf(x)$ 两边再求导，得到关于 $f(x)$的微分方程，意欲先求得 $f(x)$，再求 $\int_1^2 f(x)\,dx$，这样做很难得到结果．

例 1.3.26 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值．

[提示] 本题主要考查函数最值的概念及积分的基本运算．本题较有特点，要求的是 $f(x)$在定义域上的最值，而非给定闭区间上的最值．

[解] 因为 $f(x)$是偶函数，故只需求 $f(x)$在$[0,+\infty)$上的最值．

令 $f'(x)=(2-x^2)e^{-x^2}\cdot 2x=0$，在$(0,+\infty)$内 $f(x)$有唯一驻点 $x=\sqrt{2}$.

当 $0<x<\sqrt{2}$时，$f'(x)>0$；当 $x>\sqrt{2}$时，$f'(x)<0$．所以 $x=\sqrt{2}$是唯一的极大值点，即最大值点．

最大值 $f(\pm\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^2-\int_0^2 e^{-t}dt=1+e^{-2}$.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)e^{-t}dt=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=1$，

且 $f(0)=0$，故 $f(x)$的最小值是 $f(0)=0$.

[典型错误] 一些考生过于疏忽，忘了考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$的值；或根本不知如何考虑定义域上的函数的最值问题．

例 1.3.27 计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

[提示] 本题主要考查分段函数的积分，且两个积分都是反常积分．本题被积函数中含有绝对值的积分，要利用定积分积分区间的可加性，将所给积分写成两个积分之和，去掉绝对值再积分．

[解] 注意到被积函数内有绝对值号，且 $x=1$ 是其无穷间断点，故

$$原式=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}+\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]\Bigg|_1^{\frac{3}{2}}=\ln(2+\sqrt{3}),$$

因此
$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

[典型错误] 有些考生一看到被积函数中含有绝对值号的积分就不知所措．没有在 $x=1$ 处将原积分拆成两个积分，被积函数带有绝对值号，当然无法积分．

例 1.3.28 计算 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

[提示] 本题主要考查反常积分的计算．被积函数为两类不同函数的乘积，故用分部积分法计算．

[解]
$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx&=-\int_1^{+\infty}\arctan x\,d\left(\frac{1}{x}\right)\\&=-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx\\&=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx\end{aligned}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg|_1^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

［典型错误］ 不少考生的答案为$\frac{\pi}{4}$，其原因在于计算$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$时未将下限代入；或有些考生答案为∞，原因是在计算$\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$时得到$\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$，将上限代入时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$为"$\infty-\infty$"型极限，没有化为$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，想当然地得到极限值为∞.

例 1.3.29 求曲线$y=x^2-2x$，$y=0$，$x=1$，$x=3$所围成的平面图形的面积S，并求该平面图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积V.

［提示］ 本题主要考查定积分的几何应用，平面图形的面积与旋转体的体积．可先作出图形．由定积分的几何意义，求出面积S；然后分别求出S_1和S_2绕y轴旋转一周所得旋转体的体积.

［解］ 如图 1.3.1 所示，所求面积$S=S_1+S_2$，易见

$$S_1=\int_1^2(2x-x^2)\,dx=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_1^2=\frac{2}{3},$$

$$S_2=\int_2^3(x^2-2x)\,dx=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Bigg|_2^3=\frac{4}{3}.$$

所以 $S=S_1+S_2=2$.

平面图形S_1绕y轴旋转一周所得旋转体体积

$$V_1=\pi\int_{-1}^0(1+\sqrt{1+y})^2\,dy-\pi=\frac{11\pi}{6};$$

平面图形S_2绕y轴旋转一周所得旋转体体积

$$V_2=27\pi-\pi\int_0^3(1+\sqrt{1+y})^2\,dy=\frac{43\pi}{6}.$$

故所求旋转体体积

$$V=V_1+V_2=9\pi.$$

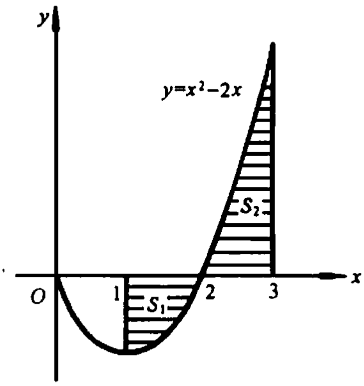

图 1.3.1

［典型错误］ 有些考生不熟悉旋转体体积的求解公式；或写错函数表达式；或定错积分上、下限，致使本题得分率不高.

例 1.3.30 设直线$y=ax$与抛物线$y=x^2$所围成图形的面积为S_1，它们与直线$x=1$所围成图形的面积为S_2，并且$a<1$.

（Ⅰ）试确定a的值，使S_1+S_2达到最小，并求出最小值；

（Ⅱ）求该最小值所对应的平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

［提示］ 本题主要考查定积分的几何应用及函数的最值概念．正确求出a的值是求解本题的关键．为求a，需根据$0<a<1$和$a\leqslant 0$两种情况分别求出对应的S_1和S_2，利用导数方法判定S_1+S_2的最小值，然后比较两种情况下S_1+S_2的最小值，从而确定a的值．在计算积分时，要注意积分上、下限以及被积函数的正、负性，确保S_1和S_2为正值(面积).

［解］（Ⅰ）当$0<a<1$时，如图 1.3.2.

$$S=S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)\,dx+\int_a^1(x^2-ax)\,dx$$

$$=\left(\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^a+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right)\Bigg|_a^1$$

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}.$$

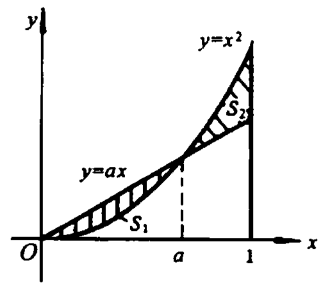

图 1.3.2

令 $S' = a^2 - \frac{1}{2} = 0$，得 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 又 $S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} > 0$，

则 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$是唯一的极小值，即最小值，其值为

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}.$$

当 $a \leqslant 0$ 时，如图 1.3.3.

$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 &= \int_a^0 (ax - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (x^2 - ax)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{a^3}{6} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}, \\ S' &= -\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(a^2+1) < 0, \end{aligned}$$

即 S 单调减少，故 $a = 0$ 时，S 取得最小值，此时 $S = \frac{1}{3}$.

综上所述，当 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$时，$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$为所求最小值，最小值为$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

(Ⅱ)

$$\begin{aligned} V_x &= \pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2}x^2 - x^4\right)\mathrm{d}x + \pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \pi\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi. \end{aligned}$$

[典型错误] 多数考生只考虑了 $0 < a < 1$ 的情况，未考虑 $a \leqslant 0$ 的情况，虽然不影响最后的结果，但缺少与 $a \leqslant 0$ 时 $S_1 + S_2$ 值的比较，就本题考试要求来说是不完备的.

例 1.3.31 已知抛物线 $y = px^2 + qx$（其中 $p < 0, q > 0$）在第一象限内与直线 $x + y = 5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S.

(Ⅰ) 问 p 和 q 为何值时，S 达到最大值?

(Ⅱ) 求出此最大值.

[提示] 这是一道综合了微分与积分等概念的题目，主要考查定积分的几何应用与函数的最值. 本题利用定积分求出 S 的表达式 $S(p,q)$，再利用抛物线与直线相切，确定出 p 和 q 的关系，从而将求 $S = S(p,q)$ 的极值化为一元函数的极值问题.

[解] 依题意知，抛物线如图 1.3.4 所示，求得它与 x 轴交点的横坐标为

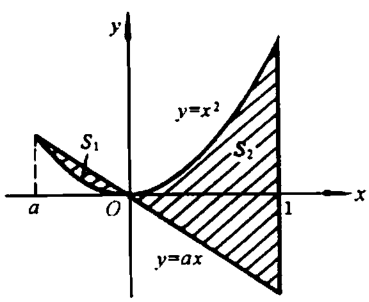

图 1.3.3

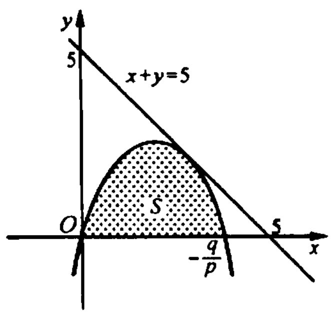

图 1.3.4

$$x_1=0,\ x_2=-\frac{q}{p},$$

面积 $$S=\int_0^{-\frac{q}{p}}(px^2+qx)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2\right)\Big|_0^{-\frac{q}{p}}=\frac{q^3}{6p^2}.\qquad (*)$$

因直线 $x+y=5$ 与抛物线 $y=px^2+qx$ 相切，故它们有唯一公共点．由方程组

$$\begin{cases}x+y=5,\\ y=px^2+qx.\end{cases}$$

得 $px^2+(q+1)x-5=0$．其判别式必等于零，即

$$\Delta=(q+1)^2+20p=0,$$

$$p=-\frac{1}{20}(1+q)^2.$$

将 p 代入($*$)式，得

$$S(q)=\frac{200q^3}{3(q+1)^4},$$

令 $$S'(q)=\frac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5}=0.$$

得驻点 $q=3$．当 $0<q<3$ 时，$S'(q)>0$；当 $q>3$ 时，$S'(q)<0$．于是，当 $q=3$ 时，$S(q)$取极大值，即最大值．此时，$p=-\frac{4}{5}$．从而，最大值 $S=\frac{225}{32}$．

[典型错误] 有些考生没有利用抛物线 $y=px^2+qx$ 与直线 $x+y=5$ 相切这一条件，从而得不到 p 与 q 的关系式．有些考生在得到驻点 $q=3$ 后，没有去判别其两侧 S'的符号(此题考虑 $S''(3)$的符号较繁)，就直接得到结论．

例 1.3.32 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$，$x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0$，$x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$．

(Ⅰ) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1，D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

(Ⅱ) 问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值．

[提示] 本题主要考查旋转体体积及利用导数求极值．做这类求旋转体体积的应用题时，正确作出草图，明确平面区域 D_1 和 D_2 以及绕什么坐标轴旋转对于正确作答很重要．第(Ⅰ)问需要利用定积分求旋转体体积公式求出 V_1 和 V_2；第(Ⅱ)问只是利用导数求极值的简单问题．

[解] (Ⅰ) $V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\,\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$，

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4.$$

(Ⅱ) 设 $V=V_1+V_2=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$，由

$$V'=4\pi a^3(1-a)=0,$$

得区间$(0,2)$内的唯一驻点 $a=1$．

当 $0<a<1$ 时，$V'>0$；当 $a>1$ 时，$V'<0$．因此 $a=1$ 是唯一的极大值点，即最大值点．此时 V_1+V_2 取得最大值，等于$\frac{129}{5}\pi$．

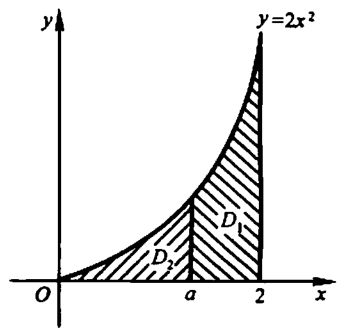

图 1.3.5

[典型错误] 有些考生所求 V_1、V_2 都是绕 x 轴旋转而成的体积，显然很粗心；有些考生公式记不清，缺少 π；有些考生没有判别驻点为极大值点．

例 1.3.33 设 $F(x)=\begin{cases}e^{2x}, & x\leqslant 0,\\ e^{-2x}, & x>0,\end{cases}$ S 表示夹在 x 轴与曲线 $y=F(x)$ 之间的面积. 对任何 $t>0$，$S_1(t)$ 表示矩形 $-t\leqslant x\leqslant t$，$0\leqslant y\leqslant F(t)$ 的面积. 求：

（Ⅰ）$S(t)=S-S_1(t)$ 的表达式；

（Ⅱ）$S(t)$ 的最小值.

［提示］ 本题主要考查考生能否把一个实际问题转化为数学问题的综合能力，考查考生对反常积分收敛性概念的理解及计算反常积分的能力，还考查考生求函数最值的方法. 本题计算 S 要用到反常积分，然后导出 $S(t)=S-S_1(t)$ 的表达式，最后应用函数导数求函数的极值.

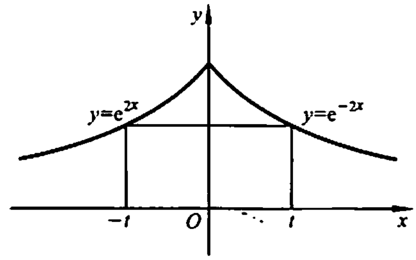

图 1.3.6

［解］（Ⅰ）如图 1.3.6，由对称性：

$$S=2\int_0^{+\infty}e^{-2x}\mathrm{d}x=-e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=1,$$

而 $$S_1(t)=2te^{-2t},$$

因此 $$S(t)=1-2te^{-2t},\ t\in(0,+\infty).$$

（Ⅱ）由于 $S'(t)=-2(1-2t)e^{-2t}$，

故令 $S'(t)=0$，得 $S(t)$ 的唯一驻点为 $t=\dfrac{1}{2}$.

又 $S''(t)=8(1-t)e^{-2t}$，故 $S''\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{e}>0$，所以 $S\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\dfrac{1}{e}$ 为极小值，即最小值.

［典型错误］ 不少考生不理解题意，不能正确计算出 S 与 $S_1(t)$ 的值，从而得不到 $S(t)$ 的表达式，也无法求出 $S(t)$ 的最小值.

例 1.3.34 设某商品从时刻 0 到时刻 t 的销售量为 $x(t)=kt$，$t\in[0,T]$，$k>0$. 欲在 T 时将数量为 A 的该商品销售完，试求：

（Ⅰ）t 时的商品剩余量，并确定 k 的值；

（Ⅱ）在时间段 $[0,T]$ 上的平均剩余量.

［提示］ 本题是一道经济应用题，主要考查剩余量及平均值的概念. t 时的商品剩余量 = 商品总量 A − 时刻 t 时的销售商品量 $x(t)$. 由于 T 时该商品销完，故可确定 k 的值.

［解］（Ⅰ）在时刻 t 商品的剩余量为

$$y(t)=A-x(t)=A-kt,\ t\in[0,T].$$

由 $A-kT=0$，得 $k=\dfrac{A}{T}$，因此

$$y(t)=A-\frac{A}{T}t,\ t\in[0,T].$$

（Ⅱ）依题意，$y(t)$ 在 $[0,T]$ 上的平均值为

$$\bar{y}=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\left(A-\frac{A}{T}t\right)\mathrm{d}t=\frac{A}{2},$$

因此在时间段 $[0,T]$ 上的平均剩余量为 $\dfrac{A}{2}$.

［典型错误］ 对于剩余量这个常识性概念(并未涉及经济学的概念)，相当一部分考生不知道如何求，从而导致整个题目不会做.

例 1.3.35 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t$，试证：

（Ⅰ）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减.

[提示] 本题主要考查偶函数的概念、积分变量替换、变上限积分求导以及利用导数判定函数增减性等基本知识. 若 $F(-x)=F(x)$, 则 $F(x)$为偶函数; 要证明 $F(x)$单调不减, 只需证明 $F'(x)\geqslant 0$, $x\in(-\infty,+\infty)$. 在求$F'(x)$时, 应将 $F(x)$写成 $x\int_0^x f(t)\,dt-2\int_0^x tf(t)\,dt$, 然后对 x 求导.

[证] (Ⅰ) 因为 $f(-x)=f(x)$, 则有

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\,dt.$$

令 $t=-u$, 于是

$$F(-x)=-\int_0^x(-x+2u)f(-u)\,du$$

$$=\int_0^x(x-2u)f(u)\,du=F(x),$$

即 $F(x)$为偶函数.

(Ⅱ)
$$F'(x)=\left[x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt\right]'$$

$$=\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-2xf(x)$$

$$=\int_0^x f(t)\,dt-xf(x)$$

$$=x\,[f(\xi)-f(x)],$$

ξ介于0和 x 之间.

因为 $f(x)$单调不增, 故:

当 $x>0$ 时, $f(\xi)-f(x)\geqslant 0$, 从而 $F'(x)\geqslant 0$;

当 $x=0$ 时, 显然 $F'(0)=0$;

当 $x<0$ 时, $f(\xi)-f(x)\leqslant 0$, 从而 $F'(x)\geqslant 0$.

即 $x\in(-\infty,+\infty)$时, $F'(x)\geqslant 0$. 于是, 若 $f(x)$单调不增, 则 $F(x)$单调不减.

[典型错误] 有些考生对 $F(-x)$不会作变量代换得 $F(-x)=F(x)$; 有些考生对 $F'(x)=\int_0^x f(t)\,dt-xf(x)$ 不会用积分中值定理使 $F'(x)=x[f(\xi)-f(x)]$,从而无法讨论增减性; 有些考生没有通过 x 的不同取值范围, 讨论 $F'(x)$的符号.

例 1.3.36 设 $f(x)$, $g(x)$在区间$[-a,a]$ $(a>0)$上连续, $g(x)$为偶函数, 且 $f(x)$满足条件 $f(x)+f(-x)=A$ (A 为常数).

(Ⅰ) 证明$\int_{-a}^a f(x)g(x)\,dx=A\int_0^a g(x)\,dx$;

(Ⅱ) 利用(Ⅰ)的结论计算定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx$.

[提示] 本题主要考查定积分的变量替换及利用拉格朗日中值定理的推论证明 $f(x)+f(-x)$为常数. 由(Ⅰ)要证的结论知, 应把左端积分化成$[0,a]$上的积分, 即

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)\,dx=\int_{-a}^0 f(x)g(x)\,dx+\int_0^a f(x)g(x)\,dx,$$

利用 $x=-t$ 把 $\int_{-a}^0 f(x)g(x)\,dx$ 化为$[0,a]$上的积分, 再用题设条件完成证明.

为解(Ⅱ), 令 $f(x)=\arctan e^x$, $g(x)=|\sin x|$, 验证 $f(x)+f(-x)$为常数, 再用(Ⅰ)的结论.

[证] (Ⅰ) $\int_{-a}^a f(x)g(x)\,dx=\int_{-a}^0 f(x)g(x)\,dx+\int_0^a f(x)g(x)\,dx$,

其中
$$\int_{-a}^0 f(x)g(x)\,dx\xlongequal{x=-t}-\int_a^0 f(-t)g(-t)\,dt=\int_0^a f(-x)g(x)\,dx.$$

于是
$$\int_{-a}^a f(x)g(x)\,dx=\int_0^a f(-x)g(x)\,dx+\int_0^a f(x)g(x)\,dx$$

$$= \int_0^a [f(x) + f(-x)]\, g(x)\, dx = A\int_0^a g(x)\, dx .$$

也可令 $$F(t) = \int_{-t}^{t} f(x)\, g(x)\, dx - A\int_0^t g(x)\, dx,\ t \in [0,a].$$

而 $$F'(t) = f(t)g(t) + f(-t)g(-t) - Ag(t)$$
$$= [f(t) + f(-t)]g(t) - Ag(t) = 0,$$

故 $F(t) = C$（C 为常数）. 又 $F(a) = F(0) = 0$，所以

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, g(x)\, dx = A\int_0^a g(x)\, dx .$$

（Ⅱ）取 $f(x) = \arctan e^x$，$g(x) = |\sin x|$，$a = \frac{\pi}{2}$，则 $f(x)$、$g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上连续，$g(x)$为偶函数，又

$$(\arctan e^x + \arctan e^{-x})' = 0,$$

所以 $$\arctan e^x + \arctan e^{-x} = A.$$

令 $x = 0$，得 $2\arctan 1 = A$．故 $A = \frac{\pi}{2}$，即

$$f(x) + f(-x) = \frac{\pi}{2},$$

于是，有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\, dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{\pi}{2}(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

［典型错误］ 有些考生一看到证明题就紧张，不知如何着手．例如，不知将$\int_{-a}^{a}$拆成$\int_{-a}^{0}$与$\int_0^a$，从而无法证明．本题即便不会做(Ⅰ)，也可由(Ⅰ)的结论将(Ⅱ)解出．但有些考生因为不会将 A 求出，所以答案中出现 A．

例 1.3.37 设函数 $f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且

$$\int_0^{\pi} f(x)\, dx = 0 ,\ \int_0^{\pi} f(x) \cos x\, dx = 0.$$

试证:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$．

［提示］ 本题主要考查罗尔定理，零点定理(或积分中值定理)．令$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$．则 $F(0) = F(\pi) = 0$．要完成证明，需通过条件$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\, dx = 0$，找到另一点 $\xi\in(0,\pi)$，使 $F(\xi) = 0$，再两次运用罗尔定理即可．

［证法 1］ 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$，$0 \leqslant x \leqslant \pi$，则 $F(0) = F(\pi) = 0$.

又因为

$$0 = \int_0^{\pi} f(x) \cos x\, dx = \int_0^{\pi} \cos x\, dF(x)$$

$$= F(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} F(x) \sin x\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} F(x) \sin x\, dx,$$

所以存在 $\xi\in(0,\pi)$，使 $F(\xi)\sin\xi = 0$．若不然，则在$(0,\pi)$内或 $F(x)\sin x$ 恒为正，或 $F(x)\sin x$ 恒为负，均与$\int_0^{\pi} F(x)\sin x\, dx = 0$矛盾．但当 $\xi\in(0,\pi)$时，$\sin\xi\neq 0$，故 $F(\xi) = 0$.

由上证得 $F(0) = F(\xi) = F(\pi) = 0$，$0 < \xi < \pi$.

再对 $F(x)$在区间$[0,\xi]$，$[\xi,\pi]$上分别用罗尔定理，知至少存在 $\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$，使

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0,$$

即

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$$

［证法 2］ 由$\int_0^{\pi}f(x)\,dx=0$知，存在 $\xi_1\in(0,\pi)$，使 $f(\xi_1)=0$. 若不然，则在$(0,\pi)$内或 $f(x)$恒为正，或 $f(x)$恒为负，均与$\int_0^{\pi}f(x)\,dx=0$矛盾．

若在$(0,\pi)$内 $f(x)=0$ 仅有一个实根 $x=\xi_1$，则由$\int_0^{\pi}f(x)\,dx=0$推知，$f(x)$在$(0,\xi_1)$内与(ξ_1,π)内异号．不妨设在$(0,\xi_1)$内 $f(x)>0$．在(ξ_1,π)内 $f(x)<0$．于是由$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,dx=0$，$\int_0^{\pi}f(x)\,dx=0$及 $\cos x$ 在$[0,\pi]$上的单调性知：

$$\begin{aligned}0&=\int_0^{\pi}f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\,dx\\&=\int_0^{\xi_1}f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\,dx+\int_{\xi_1}^{\pi}f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\,dx\\&>0,\end{aligned}$$

得出矛盾．从而推知，在$(0,\pi)$内除 ξ_1 外，$f(x)=0$ 至少还有另一个实根 ξ_2，故知存在 ξ_1，$\xi_2\in(0,\pi)$，$\xi_1\neq\xi_2$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证法 1 中的 ξ 和证法 2 中的 ξ_1 也可用积分中值定理得到．

［典型错误］

① 有些考生会引进 $F(x)$．但只是说，设 $F(x)$为 $f(x)$的一个原函数．接下去就推知 $F(0)=0$，$F(\pi)=0$. 这是不对的．因为只设 $F(x)$为 $f(x)$的一个原函数，$F(x)$还是不确定的．之后的推导就无从谈起．这说明，许多考生不会用变上限积分$\int_0^{x}f(t)\,dt$来表示一个确定的原函数，而只会用不定积分来表示，这是教学中的薄弱环节，应引起教师们的注意．

② 有不少考生想到用分部积分来处理，但做成

$$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,dx=f(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x f'(x)\,dx,$$

题中未设 $f'(x)$存在，这样做显然不合理．事实上，到这一步只要再动一下脑筋．换一个方向就可得出正确的结果，但很多考生没有这样做．

③ 有许多辅导书上有下述两道题："设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且$\int_0^1f(x)\,dx=0$，$\int_0^1f(x)\,x\,dx=0$，试证明至少存在两个不同的点 ξ_1，$\xi_2\in(0,1)$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$"；另一道题是："设 $f(x)$在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,dx=0$，$\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx=0$，试证明至少存在两个不同的点 ξ_1，$\xi_2\in(0,\pi)$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$"．从答卷看，有的考生在证明过程中，似乎是在模仿上述两题的路子．但实际上，由于未掌握上述两题的证明方法，仅是在形式上模仿．当然做不正确．

例 1.3.38 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\,dx\quad(k>1),$$

证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

［提示］ 本题主要考查积分中值定理及罗尔定理．根据所给的关系式，应首先联想到积分中值定理，再根据要证明的结论构造一个适当的函数满足罗尔定理的条件．从而解决问题．

［证］ 由 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\,dx$ 及积分中值定理，知至少存在一点 $\xi_1\in\left[0,\frac{1}{k}\right]\subset[0,1]$，使得

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x)\,dx = \xi_1 e^{1-\xi_1} f(\xi_1).$$

在$[\xi_1,1]$上，令 $\varphi(x)=xe^{1-x}f(x)$，那么 $\varphi(x)$在$[\xi_1,1]$上连续，在$(\xi_1,1)$内可导，且

$$\varphi(\xi_1)=f(1)=\varphi(1).$$

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，使得

$$\varphi'(\xi)=e^{1-\xi}[f(\xi)-\xi f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0,$$

即

$$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi).$$

［典型错误］ 有些考生不知对 $k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)\,dx$ 应用积分中值定理，从而无法得证；有些考生不能作出辅助函数 $\varphi(x)=xe^{1-x}f(x)$；也有些考生对辅助函数 $\varphi(x)$在$[0,1]$上用罗尔定理，显然不可以.

例 1.3.39 设函数 $f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，且 $g(x)>0$. 利用闭区间上连续函数的性质，证明存在一点$\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

［提示］ 本题主要考查闭区间上连续函数的性质. 在证明过程中，要充分利用题中的条件以及利用闭区间上连续函数的性质这一提示. 如果能证明 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$ 处于闭区间上的连续函数$f(x)$的最大值和最小值之间，则根据介值定理，问题就迎刃而解了.

［证］ 因为 $f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，且 $g(x)>0$. 由最值定理，知 $f(x)$在$[a,b]$上有最大值 M 和最小值 m，即

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,$$

故

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

所以

$$\int_a^b mg(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leqslant\int_a^b Mg(x)\,dx,$$

有

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\leqslant M.$$

由介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx},$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

［典型错误］ 不少考生不清楚什么是闭区间上连续函数的性质. 这种中值问题的证明方法考生并不陌生，但在证明中灵活、熟练运用的能力尚有欠缺. 证明题考查的主要是逻辑推理能力，考生在这方面普遍不强.

例 1.3.40 设 $f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)\,dt\geqslant\int_a^x g(t)\,dt,\ x\in[a,b),$$

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b g(t)\,dt.$$

证明：$\int_a^b xf(x)\,dx\leqslant\int_a^b xg(x)\,dx$.

［提示］ 本题主要考查定积分的性质，要求考生利用这些性质及分部积分法进行逻辑推理. 本题是一个

积分不等式的证明题，证明不等式的一般思想方法是移项，构造一个辅助函数，再利用定积分的性质，推导出辅助函数大于零或小于零，使不等式成立，从而得以证明．

[证] 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，$G(x)=\int_a^x F(t)\,dt$，

由题设知

$$G(x)\geqslant 0,\ x\in[a,b],$$

且

$$G(a)=G(b)=0,\ G'(x)=F(x),$$

从而

$$\begin{aligned}\int_a^b xF(x)\,dx &= \int_a^b x\,dG(x)\\ &= xG(x)\Big|_a^b-\int_a^b G(x)\,dx\\ &= -\int_a^b G(x)\,dx.\end{aligned}$$

由于 $G(x)\geqslant 0$，$x\in[a,b]$，故有

$$-\int_a^b G(x)\,dx\leqslant 0,$$

即

$$\int_a^b xF(x)\,dx\leqslant 0,$$

因此

$$\int_a^b xf(x)\,dx\leqslant\int_a^b xg(x)\,dx.$$

[典型错误] 证明积分不等式对于经济类的考生来说是有一定难度的．大部分考生不会引进辅助函数．特别是 $G(x)=\int_a^x F(t)\,dt$．从而很难做出此题．此题得分率很低．

例 1.3.41 设 $f(x)$，$g(x)$在$[0,1]$上的导数连续，且 $f(0)=0$，$f'(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$．证明：对任何 $a\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,dx+\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx\geqslant f(a)g(1).$$

[提示] 本题主要考查的知识点是利用导数判定函数的单调性．证明的方法是由要证的结论构造辅助函数，再由辅助函数的单调性得证．

[证法 1] 设

$$F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)\,dt+\int_0^1 f(t)g'(t)\,dt-f(x)g(1),x\in[0,1],$$

则 $F(x)$在$[0,1]$上的导数连续，并且

$$F'(x)=g(x)f'(x)-f'(x)g(1)=f'(x)[g(x)-g(1)].$$

由于 $x\in[0,1]$时，$f'(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$，因此 $F'(x)\leqslant 0$，即 $F(x)$在$[0,1]$上单调递减．

注意到

$$F(1)=\int_0^1 g(t)f'(t)\,dt+\int_0^1 f(t)g'(t)\,dt-f(1)g(1),$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)f'(t)\,dt &= \int_0^1 g(t)\,df(t)\\ &= g(t)f(t)\Big|_0^1-\int_0^1 f(t)\,dg(t)\\ &= f(1)g(1)-\int_0^1 f(t)g'(t)\,dt.\end{aligned}$$

故 $F(1)=0$．因此 $x\in[0,1]$时，$F(x)\geqslant 0$，由此可得对任意 $a\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,dx+\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx\geqslant f(a)g(1).$$

[证法 2] 因为

$$\begin{aligned}\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x &= \int_0^a g(x)\mathrm{d}f(x)\\ &= g(x)f(x)\Big|_0^a - \int_0^a f(x)\mathrm{d}g(x)\\ &= f(a)g(a) - \int_0^a f(x)g'(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\\ &= f(a)g(a) - \int_0^a f(x)g'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\\ &= f(a)g(a) + \int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 $x\in[0,1]$时，$f'(x)\geqslant 0$，因此 $f(x)$在$[0,1]$上单调递增，即有

$$f(x)\geqslant f(a),\ x\in[a,1].$$

又由于 $x\in[0,1]$时，$g'(x)\geqslant 0$. 因此

$$f(x)g'(x)\geqslant f(a)g'(x),\ x\in[a,1],$$

故

$$\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^1 f(a)g'(x)\mathrm{d}x = f(a)[g(1)-g(a)],$$

从而

$$\begin{aligned}&\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\\ &\geqslant f(a)g(a) + f(a)[g(1)-g(a)]\\ &= f(a)g(1).\end{aligned}$$

[典型错误] 有些考生由于不会作辅助函数，故无法证明；有些考生在考虑 $F(1)$时没能用分部积分，得不到$F(1)$的值，从而无法说明不等式成立；有些考生对 $\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x$ 同时用分部积分，无目的地转了半天，也没得到最终的答案.

四、多元函数微积分学

·考试内容与要求·

考试内容

多元函数的概念　二元函数的几何意义　二元函数的极限与连续的概念　有界闭区域上二元连续函数的性质　多元函数偏导数的概念与计算　多元复合函数的求导法与隐函数求导法　二阶偏导数　全微分　多元函数的极值和条件极值、最大值和最小值　二重积分的概念、基本性质和计算　无界区域上简单的反常二重积分

考试要求

1. 了解多元函数的概念，了解二元函数的几何意义.

2. 了解二元函数的极限与连续的概念，了解有界闭区域上二元连续函数的性质.

3. 了解多元函数偏导数与全微分的概念，会求多元复合函数一阶、二阶偏导数. 会求全微分. 会求多元隐函数的偏导数.

4. 了解多元函数极值和条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件. 了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值. 会求简单多元函数的最大值和最小值. 并会解决简单的应用问题.

5. 了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标)，了解无界区域上较简单的反常二重积分并会计算.