$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha=\alpha\left(x^{\alpha-1}-1\right),$$

$x=1$ 是 $f(x)$的唯一驻点．并且当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$．故 $f(1)$为 $f(x)$的极大值，即最大值，所以 $f(x)\leqslant f(1)=1-\alpha$，即

$$x^{\alpha}-\alpha x\leqslant 1-\alpha, \tag{⑥}$$

其中等号当且仅当 $x=1$ 时成立．在⑥中令 $1-\alpha=\beta$，$x=\frac{a}{b}$ $(a,b>0)$．则 $\alpha+\beta=1$，且

$$a^{\alpha}b^{\beta}\leqslant\alpha a+\beta b,$$

其中等号当且仅当 $a=b$ 时成立．

［典型错误］ 本题方法比较固定．由于变量和参数较多，在求解过程中容易混淆自变量、因变量及参数．

五、无穷级数（数学三）

·考试内容与要求·

考试内容

常数项级数的收敛与发散的概念　收敛级数的和的概念　级数的基本性质与收敛的必要条件　几何级数与 p 级数及其收敛性　正项级数收敛性的判别法　任意项级数的绝对收敛与条件收敛　交错级数与莱布尼茨定理　幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域　幂级数的和函数　幂级数在其收敛区间内的基本性质　简单幂级数的和函数的求法　初等函数的幂级数展开式

考试要求

1．了解级数的收敛与发散、收敛级数的和的概念．

2．掌握级数的基本性质及级数收敛的必要条件，掌握几何级数及 p 级数的收敛与发散的条件，掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法，会用根值判别法．

3．了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系，掌握交错级数的莱布尼茨判别法．

4．会求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域．

5．了解幂级数在其收敛区间内的基本性质（和函数的连续性、逐项求导和逐项积分），会求简单幂级数在其收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和．

6．掌握 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$与$(1+x)^{\alpha}$ 的麦克劳林(Maclaurin)展开式，会用它们将简单函数间接展开成幂级数．

·考试内容解析·

（一）无穷级数的概念及其性质

1．无穷级数的概念

（1）无穷级数

已知数列：$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$，那么表达式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

称为无穷级数，简称级数．这里 u_n 称为级数的一般项．

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项的和

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和．

（2）级数的收敛与发散

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列$\{s_n\}$有极限，即

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

存在，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，并称 s 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和．记为

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 或 } s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

若$\{s_n\}$没有极限(即$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在)，则称级数发散．

2．无穷级数的基本性质

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$．则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s \pm \sigma.$$

注 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 发散；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的收敛性不能确定．

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$($k$ 为非零常数)与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的收敛性，且当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n = ks$．

(3) 级数的前面增加或去掉有限项．不改变级数的收敛性．

(4) 收敛级数的项间可以任意加括号，所得新级数仍然收敛，且收敛于原级数的和．

注 若加括号所得新级数发散，则原级数必发散；若加括号所得新级数收敛，则原级数的收敛性不能确定．

(5) 级数收敛的必要条件：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$．

级数收敛的必要条件，常用于判别级数的发散，即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ 时，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散；还用于验证(或求)极限值为 0 的极限．

(二) 正项级数收敛性的判别法

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $u_n \geqslant 0$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数．

1．正项级数收敛的基本定理

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数．则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和数列$\{s_n\}$有上界．

2．比较判别法

(1) 比较判别法

设 $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$，那么，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散．设存在常数 $c > 0$．使得 $0 \leqslant u_n \leqslant cv_n$．那么．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散．则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散．

(2) 比较判别法的极限形式

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = l$，那么，若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散；当 $l = 0$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛．则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散；当 $l = +\infty$ 时．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散．

(3) 常用于比较的级数

① 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$：当 $|q|<1$ 时，级数收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}=\dfrac{a}{1-q}$；当 $|q|\geqslant 1$ 时，级数发散.

② p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$：当 $p>1$ 时，级数收敛；当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数发散.

③ 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$ 发散.

3. 比值(达朗贝尔)判别法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n\geqslant 0)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，那么，若 $\rho<1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；若 $\rho>1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；若 $\rho=1$，则该法失效.

4. 根值(柯西)判别法

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\ (u_n\geqslant 0)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，那么，当 $\rho<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $\rho>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；当 $\rho=1$ 时，该法失效.

注　比值与根值判别法中的条件都是充分但非必要条件. 凡涉及级数的命题有关论证，不能用比值或根值判别法，只能用比较判别法.

(三) 任意项级数的收敛性判别

1. 莱布尼茨判别法——交错级数收敛的充分条件

若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0)$ 满足条件：

(1) $u_n\geqslant u_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且其和 $s\leqslant u_1$.

2. 绝对收敛与条件收敛

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数.

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛.

注　若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，且此结论是由比值判别法得出的，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，且此结论不是由比值判别法得出的，则应直接考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性（这时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 有可能为条件收敛）.

(四) 幂级数

1. 函数项级数的概念

(1) 函数项级数

设 $u_1(x)$，$u_2(x)$，…，$u_n(x)$，…是定义在实数集 I 上的函数序列. 则称

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

为定义在 I 上的函数项无穷级数，简称为函数项级数.

(2) 收敛域

设点 $x_0\in I$，若常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛(或发散)，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在点 x_0 处收敛(或发散)，点 x_0 称为函数项级数的收敛(或发散)点.函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 所有收敛(或发散)点组成的集合，称为该函数项级数的收敛(或发散)域.

(3) 和函数

设 $\{s_n(x)\}$ 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的前 n 项部分和序列.若极限

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=s(x)$$

存在，则称 $s(x)$ 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数.

2. 幂级数及其有关概念

(1) 幂级数

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

的函数项级数，称为 $(x-x_0)$ 的幂级数，其中 $a_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 为常数.

特别地，当 $x_0=0$ 时，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

称为 x 的幂级数，并称常数 $a_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 为幂级数的系数.

(2) 阿贝尔定理

如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在某点 $x_0\neq0$ 处收敛，则在满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切点 x 处绝对收敛；如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在某点 x_1 处发散．则在满足不等式 $|x|>|x_1|$ 的一切点 x 处发散.

由上述定理可知．当幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 $x_0\neq0$ 处收敛，而在点 x_1 处发散时．必有 $|x_0|<|x_1|$，故必存在常数 $R>0$，使得 $|x_0|\leqslant R\leqslant|x_1|$.

(3) 收敛半径

若存在常数 $R>0$，使当 $|x|<R$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛；当 $|x|>R$ 时．幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 发散，则称该常数 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径，开区间 $(-R,R)$ 称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间.

(4) 收敛半径求法

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho\ (\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho),$$

则有:

① 当 $0<\rho<+\infty$ 时，$R=\dfrac{1}{\rho}$.

② 当 $\rho=0$ 时，$R=+\infty$.

③ 当 $\rho=+\infty$ 时，$R=0$.

3. 幂级数的性质

(1) 幂级数的四则运算性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s(x)$，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sigma(x)$，其收敛半径分别为 R_1 和 R_2. 取 $R=\min\{R_1,R_2\}$，则对于任意的 $x\in(-R,R)$，有：

① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n = s(x)\pm\sigma(x)$，且在 $(-R,R)$ 内绝对收敛.

② $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0)x^n = s(x)\cdot\sigma(x)$，且在 $(-R,R)$ 内绝对收敛.

③ 当 $b_0\neq 0$ 时，

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n=\frac{s(x)}{\sigma(x)},$$

这里 c_n 可由待定系数法逐个求出，其收敛半径 R 可能比 R_1 和 R_2 都小得多.

(2) 幂级数的分析性质

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R>0$，且和函数为 $s(x)$，则有：

① $s(x)$ 在 $(-R,R)$ 内是连续函数.

② $s(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导，且

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\quad x\in(-R,R).$$

③ $s(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可积，且

$$\begin{aligned}\int_0^x s(t)\,dt &= \int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-R,R).\end{aligned}$$

4. 函数的幂级数展开

(1) 泰勒级数与麦克劳林级数

设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的某邻域内有任意阶导数，则称

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\\ &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (*)\end{aligned}$$

为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数.

特别地，当 $x_0=0$ 时，有

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\end{aligned}$$

则称其为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的麦克劳林级数.

(2) 函数展开成泰勒级数的充要条件

函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的某邻域内有任意阶导数，则函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处能展成级数(*)的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0,$$

这里

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad (0<\theta<1)$$

称为 $f(x)$ 的拉格朗日余项．且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒展开式唯一．

(3) 常见函数的麦克劳林展开式

① $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$

② $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

③ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

④ $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad x\in(-1,1).$$

⑤ $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,1).$

⑥ $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots+$

$$\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-1,1).$$

·例题详解·

例 1.5.1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是________．

[答案] $[-1,1)$.

[提示] 已知级数为 x 的幂级数．可先按幂级数收敛半径的计算公式求出收敛半径，从而写出收敛区间，再讨论在区间端点处级数的收敛性．最后写出此幂级数的收敛域．

[解] 因

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}=1,$$

故级数的收敛半径 $R=\frac{1}{1}=1$，其收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，根据比较判别法，由 $\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{1}{n}$（当 $n\geqslant 2$ 时）及级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散；

当 $x=-1$ 时，级数为交错级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，根据莱布尼茨判别法，由 $\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ 及 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$，知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 收敛．

所以级数的收敛域为$[-1,1)$.

[典型错误] 当 $x=-1$ 时, 有的考生仅说级数为交错级数就收敛, 而没有根据莱布尼茨判别法去判别, 这显然是错误的.

例 1.5.2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$ 的收敛域为________.

[答案] $(0,4)$.

[提示] 已知级数为$(x-2)$的幂级数，通常作一代换：令 $y=x-2$，将原级数转化为 y 的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 4^n}y^{2n}$，并注意到此级数只含 y 的偶次幂，属“缺项”幂级数，不能直接用求幂级数收敛半径的公式去求，可以用比值判别法直接求收敛域.

[解] 令 $y=x-2$,原级数变为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 4^n}y^{2n}$. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{y^{2n+2}\cdot n4^n}{(n+1)4^{n+1}\cdot y^{2n}}\right|=\frac{1}{4}|y|^2,$$

令$\dfrac{1}{4}|y|^2<1$, 即$|y|<2$, 亦即$|x-2|<2$, 得 $0<x<4$.

当 $x=0$ 及 $x=4$ 时，级数均为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$,发散. 所以原级数的收敛域为$(0,4)$.

[典型错误] 当把原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 4^n}y^{2n}$ 后,忽略了该级数属“缺项”幂级数,仍用$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$的常规公式去求收敛半径:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n4^n}{(n+1)4^{n+1}}=\frac{1}{4},$$

从而 $R=4$. 这种做法是错误的.

例 1.5.3 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$ ________.

[答案] $\sqrt{3}$.

[提示] 此幂级数只含 x 的奇次幂，属“缺项”幂级数，可以用比值法直接求收敛半径.

[解] 因

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)[2^n+(-3)^n]x^{2n+1}}{n[2^{n+1}+(-3)^{n+1}]x^{2n-1}}\right|=\frac{1}{3}|x|^2,$$

故令$\dfrac{1}{3}|x|^2<1$, 得$|x|<\sqrt{3}$, 即 $R=\sqrt{3}$.

[典型错误] 一是忽略了此幂级数仍为“缺项”幂级数，仍用$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$的常规公式去求收敛半径；二是不会求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. 其实只要知道$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n=0$，就不难求解了.

例 1.5.4 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为________.

[答案] $(-2,4)$.

[提示] 级数为$(x-1)$的幂级数.通过代换可化为 y 的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_ny^{n+1}$,由求幂级数收敛半径基本公式可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_ny^{n+1}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是相同的.

[解] 令 $x-1=y$,则原级数化为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_ny^{n+1}$.

由 $$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

据已知条件得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n y^{n+1}$ 的收敛半径也是 3，从而 $|x-1|<3$，$-2<x<4$. 所以级数的收敛区间为 $(-2,4)$.

[典型错误] 有的考生欲讨论幂级数在收敛区间端点处的收敛性．本题是完全不必要的．注意在《数学考试大纲》中，收敛区间与收敛域不是同一概念，前者仅指开区间，后者才需讨论幂级数在收敛区间端点处的收敛性．且本题据已知条件并不能确定该级数在 $x=-2$ 和 $x=4$ 处的收敛性．

例 1.5.5 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的和为_______.

[答案] $\frac{2}{2-\ln 3}$.

[提示] 本题考查几何级数的收敛性．已知级数为公比的绝对值小于 1 的几何级数．

[解] $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\ln 3}{2}\right)^n$. $\left|\frac{\ln 3}{2}\right|<1$，级数和为

$$S=\frac{1}{1-\frac{\ln 3}{2}}=\frac{2}{2-\ln 3}.$$

[典型错误] 不知该级数为公比绝对值小于 1 的几何级数．

例 1.5.6 $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$ _______.

[答案] 4.

[提示] 本题考查利用幂级数求数项级数的和．通常方法是先求一个幂级数的和，而所求的数项级数的和恰好是该幂级数的和在其收敛域内某点的取值．

[解] 令 $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\quad(|x|<1),$$

两边积分 $$\int_0^x S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

两边求导得 $S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$. 从而当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=S\left(\frac{1}{2}\right)=4$.

或用初等方法解：

令 $$m=1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots,$$

则 $$\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots,$$

两式相减得 $\frac{1}{2}m=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=2$，故 $m=4$.

[典型错误] 误以为该级数是公比为 $\frac{1}{2}$ 的几何级数，导致计算错误．

例 1.5.7 设 $0\leqslant a_n<\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，则下列级数中肯定收敛的是(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$　　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$

[答案] (D).

[提示] 本题是一道考查数项级数收敛性的综合题．其考查内容有级数收敛的必要条件，正项级数的比较判别法、p 级数、交错级数的莱布尼茨判别法、任意项级数的绝对收敛等概念．

[解] (A) 不正确．由夹逼定理知 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，但这仅是级数收敛的必要条件而非充分条件．故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 未

必收敛.

(B) 不正确. 由$0\leqslant a_n<\frac{1}{n}$，不一定能推出$a_n>a_{n+1}$必定成立. 从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$不一定满足莱布尼茨判别法的条件,即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$不一定收敛.

对于选项(C)，由于(A)不正确，导致(C)也不正确.

(D) 正确. 由于$0\leqslant a_n<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,故$0\leqslant a_n^2<\frac{1}{n^2}$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛($p$级数,$p=2>1$),所以由比较判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛,从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$绝对收敛,因此其必收敛.

[典型错误] 对于交错级数. 有的考生只知用莱布尼茨判别法判别其收敛性，而不知还可以用绝对收敛概念来判别，当莱布尼茨判别法不能判别时，只能凭猜测作答了.

例 1.5.8 下列各选项正确的是(　　).

(A) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$都收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$收敛

(B) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n v_n|$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$都收敛

(C) 若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,则$u_n\geqslant\frac{1}{n}$

(D) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,且$u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也收敛

[答案] (A).

[提示] 本题考查的内容有级数的基本性质，正项级数的比较判别法和任意项级数的绝对收敛概念等. 对选项中正确的命题应证明，对否定的命题可举一反例说明.

[解] (A) 正确. 由于

$$|u_n v_n|\leqslant\frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2),$$

故由比较判别法，得知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n v_n|$收敛,即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n v_n$绝对收敛.从而收敛.于是由级数的基本性质可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n+\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$$

收敛.

(B) 不正确. 令$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$,$v_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,但是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$却是发散的.

(C) 不正确. 令$u_n=\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$，则显然$u_n<\frac{1}{n}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=1,$$

故由比较判别法的极限形式知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$有相同的收敛性.从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

(D) 不正确. 由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$未必是正项级数,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$不一定收敛.

[典型错误] 个别考生忽略了比较判别法只适用于正项级数. 从而得出(D)正确的错误结论.

例 1.5.9　设常数 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$（　　）.

(A) 发散　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　　(D) 收敛或发散与 k 的取值有关

[答案]　(C).

[提示]　本题是一道判别数项级数收敛性的综合题．主要考查任意项级数绝对收敛和条件收敛的概念．可以将原级数拆成两个级数来判别．这样较容易．

[解]　先判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k+n}{n^2}$ 的收敛性．由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k}{n^2}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k+n}{n^2}$ 发散．

再由莱布尼茨判别法容易判别交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k}{n^2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 均收敛．从而由级数的基本性质知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$ 收敛．

综上，原级数为条件收敛．故选(C).

[典型错误]　如果没有记住 p 级数和调和级数的收敛性，将给求解本题带来困难．

例 1.5.10　若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处（　　）.

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛　　(C) 发散　　(D) 收敛性不能确定

[答案]　(B).

[提示]　本题主要考查有关幂级数收敛半径、收敛区间的概念及有关定理．关键是要判断点 $x=2$ 是否在幂级数的收敛区间内．

[解]　因 $x=-1$ 为级数的收敛点．知级数在区间 $|x-1|<|-1-1|=2$ 内．即当 $-1<x<3$ 时绝对收敛．$x=2$ 在 $(-1,3)$ 内，故选(B).

[典型错误]　本题所给级数为 $(x-1)$ 的幂级数，由已知条件所确定的级数绝对收敛区间应以 $x=1$ 为中心，以 2 为半径的开区间．个别考生仍按 x 的幂级数来做．以 $x=0$ 为中心，得到一个绝对收敛区间，从而导致选择错误．

例 1.5.11　设 a 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\sin(na)}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$（　　）.

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛　　(C) 发散　　(D) 收敛性与 a 的取值有关

[答案]　(C).

[提示]　级数的通项是由两部分组成的，把原级数分为两个级数讨论很方便．

[解]　因 $\left|\dfrac{\sin(na)}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(na)}{n^2}$ 绝对收敛．从而收敛．

又因 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 发散 $\left(p=\dfrac{1}{2}\text{ 的 }p\text{ 级数}\right)$．根据级数的基本性质．便知所给级数是发散的．故选(C).

[典型错误]　本题所给级数为任意项级数，如果按照交错级数的莱布尼茨判别法去判别收敛性就不对了．此外，如果没有记住 p 级数的收敛性，此题也很难做．

例 1.5.12　已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于（　　）.

(A) 3　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9

[答案]　(C).

[提示]　本题主要考查级数的基本性质．将已知级数写成展开式，从而容易找出已知级数与未知级数的关系式．

[解]. 因为
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots.$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots,$$
所以
$$2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$
代入已知数据得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = 2\times 5 - 2 = 8$,故选(C).

也可以这样求解:
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}[a_{2n-1} - (-1)^{n-1}a_n] = \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = 5 - 2 = 3,$$
故
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n} = 5 + 3 = 8.$$

[典型错误] 未将已知级数写成展开式,从而看不出已知级数与所求级数之间的关系式.

例 1.5.13 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$ (常数 $\alpha > 0$) ( ).

(A) 发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 收敛性与 α 有关

[答案] (C).

[提示] 先判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$的收敛性,如其收敛,则原级数为绝对收敛.判别的技巧是根据三角公式把两项 $1-\cos\dfrac{\alpha}{n}$ 变为一项 $2\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2n}\right)$,再利用比较判别法判别.

[解] 因
$$1-\cos\frac{\alpha}{n} = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right) \leqslant 2\left(\frac{\alpha}{2n}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{2n^2},$$
而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^2}{2n^2}$ 收敛.从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$收敛,即原级数绝对收敛,故选(C).

也可利用比较判别法的极限形式判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$的收敛性.

由
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\dfrac{\alpha}{n}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{\alpha^2}{2},$$
因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$亦收敛.

[典型错误] 不知道利用三角公式将级数通项中的两项化为一项后再用比较判别法;或者不知道用等价无穷小量替换求极限
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\dfrac{\alpha}{n}}{\dfrac{1}{n^2}},$$
这样都导致解不出本题.

例 1.5.14 设常数 $\lambda > 0$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ ( ).

(A) 发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 收敛性与 λ 有关

[答案] (C).

[提示] 先判别正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 的收敛性,注意到

$$\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}=|a_n|\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+\lambda}},$$

利用不等式 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，再根据比较判别法，可判定该正项级数的收敛性.

[解] 因 $\frac{1}{n^2+\lambda}<\frac{1}{n^2}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\lambda}$ 收敛. 又因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛(已知)，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right)$收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right)$收敛. 由于

$$|a_n|\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+\lambda}}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right),$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 收敛. 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 绝对收敛，故选(C).

[典型错误] 不会判别正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 的收敛性.

例 1.5.15 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛

[答案] (C).

[提示] 因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数，故可用莱布尼茨判别法判别其收敛性. 因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 是正项级数，可用比较判别法的极限形式判别其收敛性.

[解] 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$为交错级数，且有

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right),\quad\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0,$$

故由莱布尼茨判别法知其收敛.

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^2$，根据比较判别法的极限形式，并注意到当 $n\to\infty$ 时，$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$与$\frac{1}{\sqrt{n}}$为等价无穷小量，从而有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}=1,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散，故选(C).

[典型错误] 判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 的收敛性，如果不用比较判别法的极限形式则不易判别.

例 1.5.16 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数. 下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

(B) 若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim_{n\to\infty} n a_n = \lambda$

[答案] (B).

[提示] 本题本质上是一个正项级数判别收敛性的问题．主要考查比较判别法的极限形式．级数收敛的必要条件及未定式极限的不确定性．

[解] 若

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda,$$

则当 $\lambda \neq 0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 同发散，故选(B)．当 $\lambda = 0$ 时，不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性．故(A)不对．

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛．则必有 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$．而 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n$ 为"$0\cdot\infty$"型未定式极限，未必一定等于0．故(C)不对．

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散．则易举反例．如取级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n$，显然 $\lim_{n\to\infty} n^2$ 不存在．故(D)不正确．

其实若取 $a_n = \frac{1}{n\ln n}$，级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 是发散的(可据积分判别法判别,而该法是考试大纲中不要求的)，据此级数可验证选项(A)和(D)是错误的．

若取 $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 是收敛的 $\left(p = \frac{3}{2}\text{ 的 } p \text{ 级数}\right)$，据此级数可验证选项(C)是错误的．

[典型错误] 不知道比较判别法极限形式的两种写法，如

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n a_n = \lambda \quad (a_n \geqslant 0),$$

其中后一个极限也称为极限判别法．此外，不知道上述极限中当 $\lambda = 0$ 或 $+\infty$ 时，判别的结论是什么(见"考试内容解析"有关内容)．

例 1.5.17 设有以下命题：

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+100}$ 收敛；

③ 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

④ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛．则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛．

则以上命题中正确的是(　　)．

(A) ①②　　(B) ②③　　(C) ③④　　(D) ①④

[答案] (B).

[提示] 本题考查考生对级数收敛性的概念及性质是否熟练掌握．

[解] 根据级数收敛性的性质：若加括号后级数收敛，原级数未必收敛，故①结论不正确．例如级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

是发散的，但其加括号后的级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots$$

却是收敛的．

由级数的前面增加(或减少)有限项，不改变级数的收敛性，可知②正确.

若级数满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$存在且大于1，则级数发散，得知③正确.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 未必收敛，知④结论不正确. 例如两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=1-1+1-1+\cdots,\ \sum_{n=1}^{\infty}v_n=-1+1-1+1-\cdots,$$

虽然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=(1-1)+(-1+1)+\cdots$ 是收敛的，但两个级数都是发散的.

综合以上结论，应选(B).

[典型错误] 有的考生认为命题③也是错误的，其理由为比值判别法只适合正项级数. 而该命题并未指明 $u_n\geqslant 0$. 其实这里该命题并非指正项级数的比值判别法，其证明如下：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\right)>0$，由极限的保号性知，当 n 充分大后，$\frac{u_{n+1}}{u_n}-1>0$，即$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，$|u_{n+1}|>|u_n|$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，故③正确.

例 1.5.18 设 $u_n\neq 0\quad(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$(　　).

(A) 发散　　　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　　(D) 收敛性根据所给条件不能确定

[答案] (C).

[提示] 本题除考查绝对收敛、条件收敛的概念外，还考查利用级数收敛的定义判别级数的收敛性以及正项级数比较判别法的极限形式.

[解] 所给级数前 n 项部分和为

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{u_k}+\frac{1}{u_{k+1}}\right)\\&=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}-\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\\&=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1}$，因而原级数收敛.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right|}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{u_n}+\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{u_{n+1}}\right|=2$，据比较判别法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right|$发散，故原级数条件收敛，应选(C).

[典型错误] 有的考生取 $u_n=n$，它满足题目条件，且可证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

条件收敛，于是据此就选(C). 答案虽正确，但解法是错误的. 因为肯定此命题，必须给予如上解法中的完整证明，否则不能排除选项(D).

例 1.5.19 设 $p_n=\frac{a_n+|a_n|}{2}$，$q_n=\frac{a_n-|a_n|}{2}$，$n=1,2,\cdots$，则下列命题正确的是(　　).

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的收敛性都不定

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 的收敛性都不定

[答案] (B).

[提示] 本题考查绝对收敛与条件收敛的概念及收敛级数的性质，并要求会利用这些概念和性质判断级数的收敛性.

[解] 由级数条件收敛的定义知，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 由此推出 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都发散，因此排除了选项(A)、(C).

由级数绝对收敛与级数收敛的关系知，若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛，再根据收敛级数的性质可以推出 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛，因此选(B)而排除(D).

[典型错误] 不知道绝对收敛、条件收敛的概念及绝对收敛与收敛的关系，从而造成判定上的错误.

例 1.5.20 设 $a_n>0$, $n=1, 2, \cdots$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛，则下列结论正确的是(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查级数的基本性质.

[解] 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 为收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 加括号后所得级数，根据收敛级数加括号后所得级数仍收敛的性质，知 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 必收敛. 故(D)正确.

不妨令 $a_n = \frac{1}{n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 收敛. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 都是发散的，故排除了选项(A)、(B). 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2n(2n-1)},$$

由比较判别法的极限形式有

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n-1}{2n(2n-1)}\right) \Big/ \left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{4n-2} = 1.$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2n(2n-1)}$ 发散，从而排除选项(C).

[典型错误] 对于级数加上或去掉括号的有关性质没有弄清，从而导致判定错误.

例 1.5.21 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的收敛性.

[提示] 首先判定是否正项级数，一般正项级数中如出现阶乘，则考虑首选比值判别法.

[解] 由
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}\cdot\frac{n^{n-1}}{(n+1)!}=\frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$
有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n-1}}{u_n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$
因此由比值判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n-1}}$ 收敛.

[典型错误] 忘记了重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,而是错误地认为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$.

例 1.5.22 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛域.

[提示] 此级数为$(x-3)$的幂级数，可通过变量代换：$y=x-3$，将其化为 y 的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}y^n$，然后通过常规公式求出收敛半径，写出收敛区间，再转化为 x 的收敛区间，最后讨论区间的两个端点处级数的收敛性，写出收敛域.

[解] 令 $y=x-3$，则原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}y^n$，由
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1.$$
知收敛半径 $R=\frac{1}{1}=1$，从而 $-1<y<1$，即 $-1<x-3<1$，故收敛区间 $2<x<4$.

当 $x=2$ 时，得交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$，其绝对收敛. 故收敛(或由莱布尼茨判别法亦可判别其收敛)；

当 $x=4$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，此为 $p=2>1$ 的 p 级数，故收敛.

所以级数的收敛域为$[2,4]$.

[典型错误] 注意公式中 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$是级数通项系数之比且带有绝对值，另外求幂级数收敛域必须讨论区间端点处的级数收敛性.

例 1.5.23 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$展成 x 的幂级数，并指出其收敛区间.

[提示] 利用把有理函数化为部分分式的思想将 $f(x)$拆项，再把每一项利用几何级数的和的基本展开式将其展开，同时写出收敛区间，最后根据幂级数的代数运算法则，写出 $f(x)$的展开式，其收敛区间为各项展开式的诸收敛区间的交.

[解] 由 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$，可见
$$f(x)=\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}.$$
由于
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad(|x|<1).$$
$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}\quad(|x|<2).$$
因此
$$f(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,x\in(-1,1).$$
[典型错误] $f(x)$展开式的收敛区间应取两项展开式收敛区间中较小的一个，而不是取较大的.

例 1.5.24 将函数 $y=\ln(1-x-2x^2)$展成 x 的幂级数，并指出其收敛区间.

［提示］ 本题仍然利用“拆项”思想，根据对数的运算性质．把一个复杂的对数函数拆成两个简单的对数函数之和，而每一个简单的对数函数又可利用 $\ln(1+x)$的基本展开式展开，从而达到把复杂函数展开的目的．

［解］
$$\ln(1-x-2x^2)=\ln[(1-2x)(1+x)]=\ln(1+x)+\ln(1-2x),$$

其中
$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\quad(-1<x<1),$$
$$\ln(1-2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-2x)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n}\quad\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right).$$

于是有
$$\ln(1-x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^n}{n}x^n\quad\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right).$$

［典型错误］ 没有记住 $\ln(1+x)$的展开式公式，或不会用间接展开法推导 $\ln(1+x)$的展开式公式．其实只要先把 $\ln(1+x)$的导数展开，两边再积分，即可得 $\ln(1+x)$的展开式公式．

例 1.5.25 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$展为 x 的幂级数．

［提示］ 逐项求导和逐项积分是幂级数间接展开中常用的方法．本题先展开 $f(x)$的导数、再两边积分，即得所求．

［解］ 由
$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}\quad(-1<x<1),$$

得
$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

而
$$f(0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4},$$

所以
$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1\leqslant x<1).$$

［典型错误］ 由于求错 $f'(x)$，导致展开式的错误．还有在运算中丢掉了 $f(0)$这一项，以为 $\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)$，这也错了．此外，不管题目要求与否，均应写出展开式的收敛区间或收敛域．

例 1.5.26 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数．

［提示］ 先求出 $f'(x)$并将式子化简，再将其展开．然后两边积分．即得所求．常利用的一个基本展开式为$\frac{1}{1-x}$当 $|x|<1$ 时的展开式．

［解］ 因
$$f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\quad(-1<x<1),$$

且 $f(0)=0$，故
$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{4n}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\quad(-1<x<1).$$

［典型错误］ 求导运算发生错误．

例 1.5.27 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$试将 $f(x)$展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$的和．

［提示］ 用间接法将函数展开成幂级数，并需将所得的幂级数进行适当变形，用它来求给出的数项级数

的和.

[解] 因 $$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ x\in(-1,1).$$

故 $$\arctan x=\int_0^x(\arctan x)'\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in[-1,1],$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n},\ x\in[-1,1].\end{aligned}$$

因此 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

[典型错误] 考生将 $f(x)$写成

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(1+x^2)\,x^{2n}.\end{aligned}$$

就认为是幂级数，这是错误的．其实应该进一步写成

$$\begin{aligned}f(x)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n},\ x\in[-1,1].\end{aligned}$$

例 1.5.28 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$展开成$x$的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

[提示] 将函数展开成指定点的幂级数是级数部分的一类重要问题，一般是利用间接展开法展开．即利用几个简单函数的麦克劳林级数及幂级数的运算性质(线性运算性质、逐项积分、逐项求导等)进行展开.

[解] 因为 $f'(x)=-\dfrac{2}{1+4x^2}=-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n},\ x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,

且 $f(0)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$，所以

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{4}-2\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nt^{2n}\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

令 $x=\dfrac{1}{2}$，得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

由于 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

[典型错误] 有的考生用直接展开法求解，说明他们并没有掌握这类题目的解题思路，此外还有：

① $f'(x)$出错，说明求导尚未过关.

② 写成 $\tan f(x)=\frac{1-2x}{1+2x}=-1+\frac{2}{1+2x}$，再将$\frac{2}{1+2x}$展开，但回不到 $f(x)$.

③ 有部分考生不指明收敛域.

④ 将 $f(x)$写成 $f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$，忘了 $f(0)$，因为本题 $f(0)\neq 0$；或者用不定积分写成 $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x$.

例 1.5.29 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

[提示] 本题是一道常规题目，按求幂级数收敛域及和函数的基本方法去解即可.

[解] 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}$，故收敛半径 $R=2$，收敛区间为$(-2,2)$.

当 $x=2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散；

当 $x=-2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ 收敛.

故级数的收敛域为$[-2,2)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}$，则 $xS(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$，

$$[xS(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x},$$

两边积分得
$$xS(x)=\int_0^x\frac{1}{2-x}\mathrm{d}x=-\ln(2-x)\Big|_0^x=-\ln(2-x)+\ln 2.$$

当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$；当 $x=0$ 时，$S(0)=\frac{1}{2}$. 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 2^n}=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & -2\leqslant x<0,\ 0<x<2,\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

[典型错误]

① 由$[xS(x)]'=\frac{1}{2-x}$，两边积分后得到：$xS(x)=-\ln(2-x)$，而丢掉了 $\ln 2$ 这一项.

② 仅给出了 $x\neq 0$ 时 $S(x)$的结果，而丢掉了 $x=0$ 时的 $S(x)$的结果.

例 1.5.30 设有两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n.

(Ⅰ) 求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n；

(Ⅱ) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.

[提示] 从已知的两条抛物线方程可以看出：这两条曲线都是关于 y 轴对称的，从而由它们所围成的面积也是关于 y 轴对称的. 求出两条曲线的交点，利用定积分可求出面积. 然后利用级数收敛的定义可以求出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.

[解] (Ⅰ) 由 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 与 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 得 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

因图形关于 y 轴对称，所以

$$S_n = 2\int_0^{a_n}\left[nx^2 + \frac{1}{n} - (n+1)x^2 - \frac{1}{n+1}\right]dx$$
$$= 2\int_0^{a_n}\left[\frac{1}{n(n+1)} - x^2\right]dx = \frac{4}{3}\ \frac{1}{n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}.$$

(Ⅱ) $\frac{S_n}{a_n} = \frac{4}{3}\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$，从而
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{a_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{4}{3}.$$

[典型错误] 不知道用级数收敛的定义也可以求级数的和，或虽知道，但求极限时不知道把级数通项拆成两项相减、采取前后项相消化简级数前 n 项和的方法.

本题在计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n} = \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的和时，亦可先求幂级数的和函数 $S(x) = \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$．这就需要通过两次逐项求导和两次逐项积分才能求出 $S(x)$，而 $S(1)$即为所求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.

例 1.5.31 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域，并求其和函数.

[提示] 用常规方法求 x 的幂级数的收敛域．根据已知幂级数的特点，将其拆成两个幂级数分别求和再相加即可.

[解] 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1} = 1$，所以 $R = \frac{1}{1} = 1$．显然幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$ 在 $x = \pm 1$ 时发散，故此幂级数的收敛域是$(-1,1)$.

幂级数的和函数是
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n + \sum_{n=0}^{\infty}x^n = 2x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)' + \frac{1}{1-x}$$
$$= \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2},\ -1<x<1.$$

[典型错误] 不知道把幂级数拆成两个简单幂级数求和，还有把 $2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$ 错误等于 $2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'$，其实这只要求导验算是否等于前式就可发现错误了.

例 1.5.32 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

[提示] 本题是一道求数项级数和的试题．由于其通项较复杂，仍采取拆成两个级数分别求和再相加的方法.

[解] $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，

其中几何级数
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 的和采用先求幂级数的和函数的方法来求，设
$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2},\ x\in(-1,1).$$

则
$$\int_0^x\left[\int_0^x S(x)dx\right]dx = \sum_{n=2}^{\infty}x^n = \frac{x^2}{1-x},$$

故
$$S(x) = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

于是
$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3},\ x\in(-1,1).$$

则 $$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4}{27}.$$

所以 $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n} = \frac{4}{27} + \frac{2}{3} = \frac{22}{27}.$$

[典型错误] 不知道把已知级数拆成两个或三个简单级数求和(若拆成三个,解法稍繁). 设 $S(x)$时因有 x^{n-2}. 故和式从 $n=2$ 开始,不能从 $n=0$ 或 $n=1$ 开始. 为了求出 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 的和,必须找到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n$ 的和函数,有的考生直接用 $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$,再令 $x = -\frac{1}{2}$去计算,从而导致错误的结果.

例 1.5.33 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

[提示] 本题是一道求数项级数和的试题. 由于级数通项中有$\left(\frac{1}{2}\right)^n$的因子,故采用先求幂级数和函数的方法. 又由于通项分母含有(n^2-1)的因子,可先把它因式分解. 从而把通项分解成两项. 分别求两个较简单的幂级数的和函数.

[解] 设 $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1} \quad (|x|<1)$,则

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)x^n,$$

其中 $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1} = x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (x \neq 0).$$

设 $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$,则 $g'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$.

于是 $$g(x) = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x = -\ln(1-x).$$

注意到 $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2} = g(x) - x - \frac{x^2}{2},$$

从而 $$\begin{aligned} S(x) &= \frac{x}{2}[-\ln(1-x)] - \frac{1}{2x}\left[-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right] \\ &= \frac{2+x}{4} + \frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x) \quad (|x|<1,\ x\neq 0). \end{aligned}$$

因此 $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4}\ln 2.$$

[典型错误] 本题“和号”$\sum$的下标 $n=1$,$n=2$,$n=3$ 之间的转化关系很容易搞乱,望通过本题仔细品味.

例 1.5.34 设级数

$$\frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的和函数为 $S(x)$. 求:

(Ⅰ) $S(x)$所满足的一阶微分方程;

(Ⅱ) $S(x)$的表达式.

[提示] 本题考查考生对幂级数在其收敛区间内的性质及和函数 $S(x)$的求法,也考查考生建立微分方程的能力及解一阶线性微分方程的熟练程度. 按题意应首先建立 $S(x)$所满足的一阶微分方程,这就需要求 $S(x)$的导数 $S'(x)$. 找出 $S(x)$与 $S'(x)$之间的关系,即微分方程,然后解该方程. 求出 $S(x)$的表达式.

也就是微分方程的解．本题也可先求(Ⅱ)，后求(Ⅰ)，这样使解题过程更简单，但这种解法需要知道 e^x 的麦克劳林展开式．

[解法 1]　(Ⅰ) $S(x)=\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$．易见 $S(0)=0$，

$$\begin{aligned}S'(x)&=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\\&=x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)=x\left[\frac{x^2}{2}+S(x)\right].\end{aligned}$$

因此 $S(x)$所满足的一阶微分方程为(令 $S(x)=y$)

$$\begin{cases}y'-xy=\frac{x^3}{2},\\y(0)=0.\end{cases}$$

(Ⅱ) 方程 $y'-xy=\frac{x^3}{2}$的通解为

$$\begin{aligned}y&=e^{\int x\mathrm{d}x}\left(\int\frac{x^3}{2}e^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=-\frac{x^2}{2}-1+Ce^{\frac{x^2}{2}},\end{aligned}$$

由初始条件 $y(0)=0$．求得 $C=1$．故所求和函数为

$$S(x)=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1.$$

[解法 2]　先解(Ⅱ)，即先求 $S(x)$的表达式：

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{2^n n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n-\frac{x^2}{2}-1=e^{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^2}{2}-1.\end{aligned}$$

再求(Ⅰ)．建立 $S(x)$所满足的微分方程

$$S'(x)=xe^{\frac{x^2}{2}}-x,\ \text{初始条件}\ S(0)=0;$$

或 $S'(x)=x\left[S(x)+\frac{x^2}{2}+1\right]-x$，即

$$S'(x)=xS(x)+\frac{x^3}{2},S(0)=0.$$

[典型错误]　建立微分方程时，没有注意到初始条件 $S(0)=0$．从而求出的 $S(x)$是微分方程的通解而不是特解．在解法 2 中，因没有记住 e^x 的幂级数展开式，故不知道 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n=e^{\frac{x^2}{2}}$，从而求不出 $S(x)$的表达式．

例 1.5.35　(Ⅰ) 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$；

(Ⅱ) 利用(Ⅰ)的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数．

[提示]　本题考查幂级数的逐项求导法，e^x 的麦克劳林展开式，求二阶常系数线性非齐次微分方程满足初始条件的特解．

[解]　(Ⅰ) 因为

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots,$$

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

所以

$$y''+y'+y=e^x.$$

（Ⅱ）与 $y''+y'+y=e^x$ 相应的齐次微分方程为

$$y''+y'+y=0.$$

其特征方程为 $r^2+r+1=0$，特征根为 $r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，因此齐次微分方程的通解为

$$y_1=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

设非齐次微分方程的特解为

$$y^*=Ae^x,$$

将 y^* 代入方程 $y''+y'+y=e^x$ 得 $A=\frac{1}{3}$，于是 $y^*=\frac{1}{3}e^x$. 方程通解为

$$y=y_1+y^*=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x.$$

当 $x=0$ 时，有

$$\begin{cases}y(0)=1=C_1+\frac{1}{3},\\ y'(0)=0=-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3}.\end{cases}$$

由此得 $C_1=\frac{2}{3}$，$C_2=0$.

于是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为

$$y(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x\quad(-\infty<x<+\infty).$$

[典型错误]

① 不会定出初始条件.

② y^* 设错或求错.

③ C_1，C_2 求错.

例 1.5.36 已知 $f_n(x)$满足

$$f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x\quad(n \text{ 为正整数}),$$

且 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和.

[提示] 先解一阶线性非齐次微分方程，求出 $f_n(x)$的表达式，然后求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 的和.

[解] 由已知条件可见 $f_n'(x)-f_n(x)=x^{n-1}e^x$,其通解为

$$f_n(x)=e^{\int dx}\left(\int x^{n-1}e^xe^{-\int dx}dx+C\right)=e^x\left(\frac{x^n}{n}+C\right).$$

由条件 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，得 $C=0$，故 $f_n(x)=\frac{x^ne^x}{n}$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，其收敛域为$[-1,1)$，当 $x\in(-1,1)$时，有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

故
$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x).$$

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=-e^{-1}\ln 2$.

于是，当 $-1\leqslant x<1$ 时，有 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=-e^x\ln(1-x)$.

[典型错误] 大部分考生能求出 $f_n(x)$的表达式及级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 的和函数，但有人未指明级数的收敛域，特别是没有讨论在区间端点处的收敛性.

例 1.5.37 求幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$ $(|x|<1)$的和函数 $f(x)$ 及其极值.

[提示] 本题主要考查幂级数求和及函数 $f(x)$求极值的问题. 对前一问题，根据已知级数特点，可先逐项求导化为可求和的几何级数，求和之后再积分可得原级数的和函数. 至于求 $f(x)$的极值，可由导数与极值的关系确定.

[解]
$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}\quad(|x|<1),$$

则
$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=-\frac{x}{1+x^2}.$$

上式两边从 0 到 x 积分，得

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt$$
$$=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

由 $f(0)=1$，得 $f(x)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$，$|x|<1$.

令 $f'(x)=0$，求得唯一驻点 $x=0$，由于

$$f''(x)=-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ f''(0)=-1<0,$$

可见 $f(x)$在 $x=0$ 取得极大值，且极大值为 $f(0)=1$.

[典型错误] 在求和函数 $f(x)$时，丢掉了 $f(0)=1$ 这一项，而错误地写成 $f(x)=\int_0^x f'(t)dt$. 在求 $f(x)$的极值时，也出现了不检验驻点 $x=0$ 是否是极值点，是极大值点还是极小值点的错误. 在判定 $x=0$ 点是否是极值点时也可用一阶导数来判定. 当 $x<0$ 时，$f'(x)=-\frac{x}{1+x^2}>0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，同样得出 $f(0)=1$ 是 $f(x)$的极大值.

例 1.5.38 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x dx$，$n=0,1,2,\cdots$，求 $\sum_{n=0}^{\infty}I_n$.

[提示] 根据定积分计算很容易求出 I_n，但 $\sum_{n=0}^{\infty}I_n$ 是一个数项级数，为求其和，仍先求一个与之有关联的幂级数之和，使问题便于解决.

[解] $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x d(\sin x)=\frac{1}{n+1}(\sin x)^{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$,

有 $$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}.$$

令 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$，则其收敛半径 $R=1$，在$(-1,1)$内有

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

于是 $$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

令 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(-1,1)$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n = S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln(2+\sqrt{2})$.

[典型错误] 主要是计算错误，包括计算定积分，几何级数求和公式，最后结果对数的化简等.

例 1.5.39 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间$(-1,1)$内的和函数 $S(x)$.

[提示] 根据已知级数通项特点，可以将其拆成两个简单幂级数分别求和再相减.

[解] 设 $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}.$$

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1},\ S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}.$$

则 $$S(x)=S_1(x)-S_2(x),\quad x\in(-1,1).$$

其中 $$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

由于 $$(xS_1(x))' = \sum_{n=1}^{\infty}x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2},$$

因此 $$xS_1(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t = -x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

当 $x\neq 0$ 时， $$S_1(x) = -1+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

又 $$S_1(0)=0,$$

故 $$S_1(x)=\begin{cases} -1+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & |x|\in(0,1), \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

所以 $$S(x)=S_1(x)-S_2(x)=\begin{cases} \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}, & |x|\in(0,1), \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

[典型错误] 主要是计算定积分的错误及丢掉了 $x=0$ 时 $S(x)=0$ 的结果.

例 1.5.40 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

[提示] 本题考查级数绝对收敛的概念及正项级数的比较判别法．顺便指出，利用比较判别法时，常会碰到一些基本不等式，如本题就碰到 $ab\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

[证] 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛，根据收敛级数的性质知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$收敛.

由不等式 $|a_nb_n|\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$及比较判别法，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛．即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

[典型错误] 想不到利用基本不等式 $ab\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)$来证明，还有题目并未告诉 $a_n\geqslant 0$，$b_n\geqslant 0$，而有

的考生对级数通项 a_nb_n 未加绝对值证明，或者说明审题不仔细，或者对绝对收敛概念尚不清楚.

例 1.5.41 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，

（Ⅰ）求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值；

（Ⅱ）试证：对任意的常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

［提示］ 本题考查定积分的计算、用级数收敛的定义求级数的和，p 级数的收敛性及正项级数的比较判别法.

（Ⅰ）［解］ 因为

$$\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}(\tan x)$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}(\tan x)^{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

故
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(a_k+a_{k+2})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

（Ⅱ）［证］ 因为

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x\xlongequal{\tan x=t}\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}.$$

所以
$$\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^\lambda(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}.$$

由 $\lambda+1>1$，根据 p 级数的收敛性知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda-1}}$ 收敛. 从而由正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

［典型错误］ 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}(\tan x)$ 时，若令 $\tan x=t$，应更换积分限得到 $\int_0^1 t^n\mathrm{d}t$. 而有的考生忘记了计算定积分时“换元要换限”这一原则. 又化简 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$时，中间的项都前后消掉了. 只剩下第一项和最后一项，即

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

只要把前 n 项和 S_n 写成展开式就可见其规律. 另外在(Ⅱ)的证明中，不少考生不知如何下手去证. 一般若级数的通项中含有定积分的式子，经常是根据定积分的不等式性质，使其小于或大于某一个定积分，而这个定积分容易计算，并且计算结果恰是调和级数、p 级数等已知收敛性级数的通项. 从而据正项级数比较判别法可判定通项中含有定积分式子的级数的收敛性.

例 1.5.42 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？并说明

理由.

[提示] 本题是一道数列与级数交织在一起的题目. 要注意它们的联系与区别. 本题考查单调有界数列必有极限的极限存在准则、交错级数的莱布尼茨判敛法，几何级数的收敛性及正项级数的比较判别法.

[解] 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

理由:由于正项数列$\{a_n\}$单调减少有下界，故$\lim_{n\to\infty}a_n$存在，记$\lim_{n\to\infty}a_n=a$，则 $a\geqslant 0$. 若 $a=0$，则由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，与题设矛盾，故 $a>0$. 于是

$$\frac{1}{a_n+1}<\frac{1}{a+1}<1，从而\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n<\left(\frac{1}{a+1}\right)^n.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$ 是公比为$\frac{1}{a+1}(<1)$的几何级数，故收敛. 因此由比较判别法知原级数收敛.

[典型错误] 有考生把级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 也当作公比$\frac{1}{a_n+1}<1$的几何级数，这显然是错误的，因为$\frac{1}{a_n+1}$不是常数.

六、常微分方程与差分方程

·考试内容与要求·

考试内容(数学三)

常微分方程的基本概念　变量可分离的微分方程　齐次微分方程　一阶线性微分方程　线性微分方程解的性质及解的结构定理　二阶常系数齐次线性微分方程及简单的非齐次线性微分方程　差分与差分方程的概念　差分方程的通解与特解　一阶常系数线性差分方程　微分方程与差分方程的简单应用

考试要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.
2. 掌握变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程的求解方法.
3. 会解二阶常系数齐次线性微分方程.
4. 了解线性微分方程解的性质及解的结构定理，会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.
5. 了解差分与差分方程及其通解与特解等概念.
6. 掌握一阶常系数线性差分方程的求解方法.
7. 会用微分方程和差分方程求解简单的经济应用问题.

考试内容(数学四)

常微分方程的基本概念　变量可分离的微分方程　齐次微分方程　一阶线性微分方程

考试要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.
2. 掌握变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程的求解方法.

·考试内容解析·

(一) 微分方程的基本概念

定义 1　含有自变量、未知函数及其导数(或微分)的方程，称为微分方程. 未知函数是一元函数的微分方程，称为常微分方程.

定义 2　微分方程中未知函数的最高阶导数(或微分)的阶数，称为该微分方程的阶.

n 阶常微分方程的一般形式为