理由.

[提示] 本题是一道数列与级数交织在一起的题目，要注意它们的联系与区别. 本题考查单调有界数列必有极限的极限存在准则、交错级数的莱布尼茨判敛法，几何级数的收敛性及正项级数的比较判别法.

[解] 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

理由:由于正项数列$\{a_n\}$单调减少有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $a\geqslant 0$. 若 $a=0$，则由莱布尼茨定理知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，与题设矛盾，故 $a>0$. 于是

$$\frac{1}{a_n+1}<\frac{1}{a+1}<1,\text{ 从而}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n<\left(\frac{1}{a+1}\right)^n.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$ 是公比为$\frac{1}{a+1}$（<1）的几何级数，故收敛. 因此由比较判别法知原级数收敛.

[典型错误] 有考生把级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 也当作公比$\frac{1}{a_n+1}<1$ 的几何级数，这显然是错误的，因为$\frac{1}{a_n+1}$不是常数.

六、常微分方程与差分方程

·考试内容与要求·

考试内容(数学三)

常微分方程的基本概念 变量可分离的微分方程 齐次微分方程 一阶线性微分方程 线性微分方程解的性质及解的结构定理 二阶常系数齐次线性微分方程及简单的非齐次线性微分方程 差分与差分方程的概念 差分方程的通解与特解 一阶常系数线性差分方程 微分方程与差分方程的简单应用

考试要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.
2. 掌握变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程的求解方法.
3. 会解二阶常系数齐次线性微分方程.
4. 了解线性微分方程解的性质及解的结构定理，会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.
5. 了解差分与差分方程及其通解与特解等概念.
6. 掌握一阶常系数线性差分方程的求解方法.
7. 会用微分方程和差分方程求解简单的经济应用问题.

考试内容(数学四)

常微分方程的基本概念 变量可分离的微分方程 齐次微分方程 一阶线性微分方程

考试要求

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.
2. 掌握变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程的求解方法.

·考试内容解析·

(一) 微分方程的基本概念

定义1 含有自变量、未知函数及其导数(或微分)的方程，称为微分方程. 未知函数是一元函数的微分方程，称为常微分方程.

定义2 微分方程中未知函数的最高阶导数(或微分)的阶数，称为该微分方程的阶.

n 阶常微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0,\tag{1.6.1}$$

其中 x 是自变量，y 为未知函数，且 $y^{(n)}$必定出现.

n 阶常微分方程的标准形式为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}).\tag{1.6.2}$$

定义 3 若将函数 $y=\varphi(x)$代入方程(1.6.1)或(1.6.2)后，使之成为恒等式，则称函数 $y=\varphi(x)$为方程(1.6.1)[或(1.6.2)]的解；如果由关系式 $\Phi(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=\varphi(x)$是方程(1.6.1)的解，则称 $\Phi(x,y)=0$为方程(1.6.1)的隐式解.

定义 4 若含 n 个独立任意常数$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的函数

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$$

或

$$\Phi(x,y,C_1,C_2,\cdots,C_n)=0$$

是方程(1.6.1)的解，则称其为方程(1.6.1)的通解. 在通解中由给定的初始条件赋予常数$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 以确定值(或不含任意常数)的解，称为方程(1.6.1)的特解.

一般情况下，给定的初始条件为

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_1,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}.$$

(二) 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0$$

或

$$y'=f(x,y).$$

1. 可分离变量方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)\tag{1.6.3}$$

或

$$M_1(x)\cdot M_2(y)dx=N_1(x)\cdot N_2(y)dy\tag{1.6.4}$$

的微分方程称作可分离变量的方程. 将(1.6.3)、(1.6.4)式分离变量，分别得

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,$$

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx.$$

两边分别求积分，即得通解

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C,$$

$$\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+C,$$

C 均为任意常数.

2. 齐次方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\tag{1.6.5}$$

或

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)\tag{1.6.6}$$

的方程称为齐次方程．这里 a_1，b_1，a_2，b_2 均为非零常数，且 c_1，c_2 至少有一个不为零．

若在方程(1.6.5)中令 $u=\dfrac{y}{x}$，则可将方程(1.6.5)化为 x 和 u 的可分离变量的微分方程．

对于方程(1.6.6)，有：

(1) 当 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 时，求解方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases}$$

得解 $x=\alpha$，$y=\beta$，则作变换

$$x=u+\alpha,\quad y=v+\beta,$$

可将方程(1.6.6)化为变量 u，v 的形如(1.6.5)的齐次方程．

(2) 当 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 时，即若 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\lambda$，

则令 $u=a_2x+b_2y$，可将方程(1.6.6)化为关于 x 和 u 的可分离变量方程：

$$\frac{du}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}=a_2+b_2f\left(\frac{\lambda u+c_1}{u+c_2}\right).$$

3．一阶线性微分方程

一阶线性方程形如

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), \tag{1.6.7}$$

这里 $P(x)$，$Q(x)$ 均为 x 的连续函数．

(1) 当 $Q(x)\equiv 0$ 时，即

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0, \tag{1.6.8}$$

此方程称为一阶线性齐次方程．将其分离变量即可得通解

$$y=Ce^{-\int P(x)dx},$$

其中 C 是任意常数．

(2) 当 $Q(x)\neq 0$ 时，称(1.6.7)为一阶线性非齐次方程．用常数变易法可得通解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right],$$

其中 C 为任意常数．

(三) 二阶线性微分方程

1．二阶线性微分方程及其解的性质

二阶线性方程的一般形式为：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x). \tag{1.6.9}$$

当 $f(x)\equiv 0$ 时，即

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{1.6.10}$$

此方程称为与方程(1.6.9)对应的二阶齐次线性微分方程．

如下一系列结论描绘线性微分方程解的结构．

(1) 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 都是方程(1.6.10)的解，则

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

也是方程(1.6.10)的解，其中 C_1，C_2 为任意常数．

(2) 齐次线性方程(1.6.10)必定存在两个线性无关的解．

(3) 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1.6.10)的两个线性无关的解，则方程(1.6.10)的通解为

$$y_C(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

其中 C_1 与 C_2 为任意常数.

(4) 若 $f(x)$是区间 I 上的连续函数，则对于任一 $x_0\in I$ 及给定的常数y_0 和 y_1，方程(1.6.9)一定存在定义于 I 上的唯一解 $y=\varphi(x)$，并使之满足初始条件

$$\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi'(x_0)=y_1.$$

(5) 若 $y^*(x)$是方程(1.6.9)的一个特解. $y_C(x)$是方程(1.6.10)的通解，则方程(1.6.9)的通解为

$$y=y_C(x)+y^*(x).$$

(6) 若 $y_1^*(x)$与 $y_2^*(x)$是方程(1.6.9)的两个不相同的特解，则

$$y(x)=y_1^*(x)-y_2^*(x)$$

是方程(1.6.10)的解.

(7) 若 $y_1(x)$和 $y_2(x)$分别是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$$

和

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)$$

是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

的特解.

2. 二阶常系数线性微分方程

二阶常系数线性微分方程的一般形式为

$$y''+py'+qy=f(x),\tag{1.6.11}$$

其中 p, q 为实常数. 对应的二阶常系数线性齐次微分方程为

$$y''+py'+qy=0.\tag{1.6.12}$$

(1) 对应于方程(1.6.11)或(1.6.12)的特征方程为

$$\lambda^2+p\lambda+q=0.\tag{1.6.13}$$

(2) 齐次方程(1.6.12)的通解形式与特征方程(1.6.13)的根的关系如表 1.6.1 所示.

表 1.6.1 二阶常系数线性齐次微分方程的通解形式与特征方程的根的关系表

特征方程(1.6.13)的根	齐次方程(1.6.12)通解形式
两相异的实根 $\lambda_1\neq\lambda_2$	$y_C(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$
两相等的实根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$	$y_C(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y_C(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

(3) 非齐次方程(1.6.11)特解 y^*的形式，见表 1.6.2.

表 1.6.2 二阶常系数线性非齐次微分方程特解 y^*的形式表

$f(x)$的形式	取待定特解的条件	试取待定特解的形式
$f(x)=P_m(x)$ $=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$	零不是特征根	$y^*=Q_m(x)=A_0+A_1x+\cdots+A_mx^m$，$A_0,A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为待定常数
	零是单特征根	$y^*=x\cdot Q_m(x)$
	零是二重特征根	$y^*=x^2\cdot Q_m(x)$

续表

$f(x)$的形式	取待定特解的条件	试取待定特解的形式
$f(x)=e^{\alpha x}\cdot P_m(x)$，$\alpha$ 为实常数	α 不是特征根	$y^*=e^{\alpha x}\cdot Q_m(x)$
	α 是单特征根	$y^*=xe^{\alpha x}\cdot Q_m(x)$
	α 是二重特征根	$y^*=x^2e^{\alpha x}\cdot Q_m(x)$
$f(x)=e^{\alpha x}(a_1\cos\beta x+a_2\sin\beta x)$，$\alpha$，$a_1$，$a_2$，$\beta$ 均为实常数	$\alpha\pm i\beta$ 不是特征根	$y^*=e^{\alpha x}(A_1\cos\beta x+A_2\sin\beta x)$，$A_1$，$A_2$ 为待定常数
	$\alpha\pm i\beta$ 是特征根	$y^*=xe^{\alpha x}(A_1\cos\beta x+A_2\sin\beta x)$

(4) 由解的性质可见非齐次方程(1.6.11)的通解为

$$y=y_C+y^*.$$

(四) 差分方程的基本概念

1. 函数差分的定义

函数 $y_t=f(t)$，$t=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 函数 $f(t)$在 t 时刻的一阶差分定义为

$$\Delta y_t=y_{t+1}-y_t=f(t+1)-f(t);$$

函数 $f(t)$在 t 时刻的二阶差分定义为

$$\begin{aligned}\Delta^2y_t&=\Delta(\Delta y_t)=\Delta y_{t+1}-\Delta y_t\\&=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t;\end{aligned}$$

其余类推，函数 $f(t)$在 t 时刻的 n 阶差分定义为

$$\begin{aligned}\Delta^ny_t&=\Delta(\Delta^{n-1}y_t)=\Delta^{n-1}y_{t+1}-\Delta^{n-1}y_t\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}y_{t+n-k}.\end{aligned}$$

2. 差分方程及其基本概念

(1) 差分方程的定义

含有自变量 t，未知函数 y_t 以及 y_t 的差分$\Delta y_t,\Delta^2y_t,\cdots$的函数方程，称为(常)差分方程.

n 阶差分方程的一般形式为

$$F(t,y_t,\Delta y_t,\cdots,\Delta^ny_t)=0,\tag{1.6.14}$$

这里 F 为已知函数，且 Δ^ny_t 必定要出现.

也可这样定义：含有自变量 t 和两个或两个以上函数$y_t,y_{t+1},\cdots$的函数方程，称为(常)差分方程.

n 阶差分方程的另一种一般形式为

$$F(t,y_t,y_{t+1},\cdots,y_{t+n})=0,\tag{1.6.15}$$

这里 F 是已知函数，且 y_t 与 y_{t+n}必定要出现.

(2) 差分方程的阶

出现在差分方程(1.6.14)中差分的最高阶数，称为差分方程的阶.

出现在差分方程(1.6.15)中未知函数下标的最大差，称为差分方程的阶.

由于经济学中经常遇到的是按形如(1.6.15)给出的差分方程，因此我们下面将只研究形如(1.6.15)的差分方程.

(3) 差分方程的解

若函数 $y_t=\varphi(t)$代入方程(1.6.15)，使之对一切的 t 均成为恒等式，则称 $y_t=\varphi(t)$为差分方程(1.6.15)的解.

含有 n 个任意独立常数$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的解

$$y_t=\varphi(t,C_1,C_2,\cdots,C_n),$$

称为 n 阶差分方程(1.6.15)的通解.

在通解中给任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 以确定值而得出的解，称为 n 阶差分方程(1.6.15)的特解.

(五) 一阶常系数线性差分方程

一阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1} + ay_t = f(t), \tag{1.6.16}$$

其中 $f(t)$为已知函数，a 为非零常数.

当 $f(t) \equiv 0$ 时，方程(1.6.16)变为

$$y_{t+1} + ay_t = 0. \tag{1.6.17}$$

我们称(1.6.16)为一阶常系数非齐次线性差分方程，称(1.6.17)为其对应的一阶常系数齐次线性差分方程.

1. 齐次差分方程的通解

通过迭代，并由数学归纳法可得(1.6.17)的通解为

$$y_C(t) = C\cdot(-a)^t,$$

这里 C 为任意常数.

2. 非齐次差分方程的解的性质

(1) 若 y_t^* 是非齐次差分方程(1.6.16)的一个特解，$y_C(t)$是齐次差分方程(1.6.17)的通解，则非齐次差分方程(1.6.16)的通解为

$$y_t = y_C(t) + y_t^*.$$

(2) 若 $\bar{y}_t$ 与 $\tilde{y}_t$ 分别是差分方程

$$y_{t+1} + ay_t = f_1(t)$$

和

$$y_{t+1} + ay_t = f_2(t)$$

的解，则

$$y_t = \bar{y}_t + \tilde{y}_t$$

是差分方程

$$y_{t+1} + ay_t = f_1(t) + f_2(t)$$

的解.

非齐次差分方程(1.6.16)的特解 y_t^* 形式的设定见表 1.6.3.

表 1.6.3 一阶常系数线性差分方程的特解 y_t^* 形式表

(1.6.16)中 $f(t)$的形式	取待定特解的条件	试取特解的形式
$f(t) = P_m(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m$	$a \neq -1$	$y_t^* = Q_m(t) = B_0 + B_1 t + \cdots + B_m t^m$，$B_0, B_1, \cdots, B_m$ 为待定常数
	$a = -1$	$y_t^* = tQ_m(t)$
$f(t) = d^t \cdot P_m(t)$，d 为非零常数	$a + d \neq 0$	$y_t^* = d^t \cdot Q_m(t)$
	$a + d = 0$	$y_t^* = t \cdot d^t \cdot Q_m(t)$
$f(t) = b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t$，$\omega \neq 0$ 且 b_1，b_2 为不同时为零的常数	$D = \begin{vmatrix} a + \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & a + \cos\omega \end{vmatrix} \neq 0$	$y_t^* = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$，$\alpha$，$\beta$ 为待定常数
	$D = 0$	$y_t^* = t(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)$

·例 题 详 解·

例 1.6.1 微分方程 $y' + y\tan x = \cos x$ 的通解为 $y =$ __________.

[答案] $(x+C)\cos x$.

[提示] 本题为一阶线性非齐次方程，利用其通解公式即可求解.

[解] 通解为

$$y = e^{-\int \tan x dx}\left(\int \cos x \cdot e^{\int \tan x dx}dx + C\right)$$

$$= \cos x\left(\int \cos x \cdot \frac{1}{\cos x}dx + C\right) = (x+C)\cos x.$$

[典型错误] 通解公式记错或不定积分 $\int \tan x dx$ 的计算错误.

例 1.6.2 已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$，且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$，则 $f(x)=$______.

[答案] $\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$.

[提示] 本题考查根据实际问题建立微分方程的能力，关键是要知道导数的几何意义即为曲线切线的斜率.

[解] 由实际问题建立微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx} = x\ln(1+x^2),\\ y\Big|_{x=0} = -\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

这是一个可分离变量方程求特解的问题，由分离变量法解之得

$$\int dy = \int x\ln(1+x^2)dx,$$

即

$$y = \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)d(1+x^2) = \frac{1}{2}\left[(1+x^2)\ln(1+x^2) - \int \frac{1+x^2}{1+x^2}d(1+x^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]+C.$$

代入初始条件 $y\big|_{x=0}=-\frac{1}{2}$ 得 $C=0$，故方程的特解为

$$y=\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1].$$

[典型错误] 不知道导数的几何意义，因而不能建立微分方程、不能运用分部积分法计算不定积分.

例 1.6.3 微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为______.

[答案] $(x-4)y^4=Cx$ 或 $(4-x)y^4=Cx$.

[提示] 对于微分方程的题目，首先要识别它的阶数. 如果是一阶微分方程，再识别它的类型. 按考试大纲，不管数学三还是数学四都仅要求掌握三种类型的一阶方程的解法，即可分离变量的方程、齐次方程和一阶线性方程. 本题为一阶可分离变量的方程. 此外，微分方程的解可以是显函数的形式，也可以是隐函数的形式，以形式较简单为原则. 本题方程的解就是以隐函数的形式给出的.

[解] 分离变量并两边积分，得

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x(4-x)}dx,$$

$$\ln y = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x}\right)dx,$$

$$\ln y^4 = \ln x - \ln(4-x) + \ln C,$$

$$\ln[(4-x)y^4] = \ln(Cx),$$

故方程的通解为

$$(4-x)y^4 = Cx.$$

[典型错误] 本题有一个加任意常数的技巧，由于不定积分后等式两边各项均为对数形式，故右式加任意常数不加 C 而加 $\ln C$，其目的为使通解得到较简单的表达式. 如果加 C 也不错，但将使通解很不“漂亮”.

例 1.6.4　过点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为____________.

[答案]　$y\arcsin x=x-\frac{1}{2}$.

[提示]　本题为一阶线性方程求特解问题. 如果用通解公式来求通解，首先要把该方程化为标准形式：$y'+P(x)y=Q(x)$. 特别要注意 $P(x)$，$Q(x)$ 各是什么. 包括它们的正负号. 然后再代入通解公式计算即可.

[解法 1]　所给方程即

$$y'+\frac{1}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}y=\frac{1}{\arcsin x}.$$

根据通解公式，通解为

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int\frac{1}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}dx}\left(\int\frac{1}{\arcsin x}e^{\int\frac{1}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}dx}dx+C\right)\\&=\frac{1}{\arcsin x}(x+C).\end{aligned}$$

由 $x=\frac{1}{2}$，$y=0$ 得 $C=-\frac{1}{2}$，所以曲线方程为 $y\arcsin x=x-\frac{1}{2}$.

[解法 2]　将原方程改写为

$$y'\arcsin x+y(\arcsin x)'=1,$$

即 $(y\arcsin x)'=1$，故得 $y\arcsin x=x+C$，以下同解法 1.

[典型错误]　没有把一阶线性微分方程化为标准形式，误以为 $P(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$Q(x)=1$.

例 1.6.5　$y''-4y=e^{2x}$ 的通解为 $y=$____________.

[答案]　$C_1e^{-2x}+\left(\frac{1}{4}x+C_2\right)e^{2x}$，其中 C_1、C_2 为任意常数.

[提示]　本题考查二阶常系数线性非齐次方程的解法，是一道基本题.

[解]　原方程对应的齐次方程为

$$y''-4y=0,$$

特征方程为

$$r^2-4=0,$$

解得特征根 $r=\pm2$，故齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}\quad(C_1,C_2\text{ 为任意常数}).$$

非齐次方程的特解可设为　$y^*=axe^{2x}$,

代入原方程可解得 $a=\frac{1}{4}$，故原方程的通解为

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{-2x}+\left(\frac{1}{4}x+C_2\right)e^{2x}.$$

[典型错误]　设特解 $y^*=axe^{2x}$ 发生错误，或者少乘一个 a，或者少乘一个 x，这是由于尚没有准确掌握设特解 y^* 的规律造成的.

例 1.6.6　微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为____________.

[答案]　$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

[提示]　本题考查二阶常系数线性齐次方程的解法，关键是记住此类方程的三个通解公式. 这是一道基本题.

[解]　该齐次方程对应的特征方程为

$$r^2+2r+5=0,$$

解得特征根为 $r_{1,2}=-1\pm2i$. 这是一对共轭复根，根据通解公式可得原方程的通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

［典型错误］ 通解公式记错了.

例 1.6.7 设 $y=e^{x}(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1,C_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为____________.

［答案］ $y''-2y'+2y=0$.

［提示］ 本题是二阶常系数线性齐次微分方程求解的逆问题，考查要点是：二阶常系数线性齐次微分方程的特征方程与特征根的概念以及由通解形状要能看出对应的特征根.

［解法 1］ 根据通解看出其对应的特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$，从而特征方程为

$$[\lambda-(1+i)][\lambda-(1-i)]=\lambda^2-2\lambda+2=0,$$

于是所求方程为

$$y''-2y'+2y=0.$$

［解法 2］ 由通解

$$y=e^{x}(C_1\sin x+C_2\cos x),$$

求得

$$y'=e^{x}[(C_1-C_2)\sin x+(C_1+C_2)\cos x],$$

$$y''=e^{x}(-2C_2\sin x+2C_1\cos x),$$

从这三个式子消去 C_1 与 C_2，得 $y''-2y'+2y=0$.

［典型错误］ 由特征方程 $\lambda^2-2\lambda+2=0$ 写对应的微分方程却写成 $y''-2y'+2=0$，漏了最后一项中的 y，这说明对特征方程的概念尚不清楚.

例 1.6.8 某公司每年的工资总额在比上一年增加20%的基础上再追加 200 万元．若以 W_t 表示第 t 年的工资总额(单位:万元)，则 W_t 满足的差分方程是____________.

［答案］ $W_t=1.2W_{t-1}+200$.

［提示］ 实际上用 W_t 和 W_{t-1} 将第一句话的意思用数学语言表达出来即可.

例 1.6.9 差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为__________.

［答案］ $y_t=C(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)$（$C$ 为任意常数）.

［提示］ 本题要求一阶常系数非齐次线性差分方程的通解，为基本题．其解题步骤是固定的，只要掌握了这些步骤就不是难题.

［解］ 原方程的一般形式为

$$y_{t+1}+5y_t=\frac{5}{2}t,$$

其对应的齐次差分方程为

$$y_{t+1}+5y_t=0,$$

其通解为

$$y_C(t)=C(-5)^t\quad（C\text{ 为任意常数}）.$$

因为 $f(t)=\frac{5}{2}t$ 是 t 的一次多项式，且 $a=5\neq-1$，故设原方程的特解为

$$y_t^*=At+B,$$

代入原方程，得

$$A(t+1)+B+5(At+B)=\frac{5}{2}t,$$

即

$$6At+A+6B=\frac{5}{2}t.$$

比较系数知 $A=\frac{5}{12}$，$B=-\frac{5}{72}$，故 $y_t^*=\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)$，从而原差分方程的通解为

$$y_t=y_C(t)+y_t^*=C(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right).$$

［典型错误］ 差分方程是数学三考试大纲所要求的内容，但个别考生完全放弃这部分内容，遇到此基本题也只好放弃．解此题的主要问题是设 $y_t^*=At$ 而丢掉了常数项 B.

例 1.6.10 差分方程 $y_{t+1}-y_t=t\cdot2^t$ 的通解为____________.

［答案］ $y_t=C+(t-2)2^t$.

［提示］ 本题考查一阶常系数非齐次线性差分方程求通解的方法．注意本题属 $f(t)=d^t\cdot P_m(t)$ 形式，其中 d 为非零常数，$P_m(t)$ 为 t 的 m 次多项式．本题中，$d=2$，$P_m(t)=t$ 是 t 的一次多项式.

[解] 原方程对应的齐次差分方程为

$$y_{t+1}-y_t=0,$$

其通解为 $$y_C(t)=C(1)^t=C \quad (C\text{ 为任意常数}).$$

因为 $f(t)=t\cdot 2^t$，且 $a+d=-1+2=1\neq 0$，故设原方程的特解为

$$y_t^*=2^t(At+B),$$

代入原方程，得 $$2^{t+1}[A(t+1)+B]-2^t(At+B)=t2^t,$$

即 $$At+2A+B=t.$$

比较系数知 $A=1$，$B=-2$，故 $y_t^*=2^t(t-2)$．从而原差分方程的通解为

$$y_t=y_C(t)+y_t^*=C+2^t(t-2).$$

[典型错误] 特解设成 $y_t^*=2^tAt$，将括号中的待定常数 B 丢掉．一般，若所设特解 y_t^* 中含有 t 的 m 次多项式$Q_m(t)$，应该从 t 的 0 次一直到 t 的 m 次项要设全，即

$$Q_m(t)=B_0+B_1t+\cdots+B_mt^m,$$

其中$B_0,B_1,\cdots,B_m$ 为待定常数．

例 1.6.11 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为__________.

[答案] $xy=2$.

[提示] 本题属可分离变量的方程求特解．题中微分方程也属一阶线性齐次方程．如果记住其通解公式，直接代入求解即可．

[解] 将原方程分离变量并两边积分，得到

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

于是 $\ln y=-\ln x+\ln C=\ln\dfrac{C}{x}$，$y=\dfrac{C}{x}$，即原方程通解为

$$xy=C.$$

代入初始条件 $y(1)=2$，得 $C=2$．从而原方程特解为 $xy=2$.

例 1.6.12 设 $y=f(x)$是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 ( ).

(A) 取得极大值　　(B) 取得极小值

(C) 某个邻域内单调增加　　(D) 某个邻域内单调减少

[答案] (A).

[提示] 由已知 $f'(x_0)=0$，知点 x_0 为 $f(x)$的驻点，又已知 $f(x_0)>0$，从而据已知二阶微分方程可判断出$y''=f''(x_0)$的正负号．由此可判定点 x_0 是 $f(x)$的极大值点或极小值点．

[解] 因为 $f'(x_0)=0$，所以点 x_0 为 $f(x)$的驻点．又

$$f''(x_0)-2f'(x_0)+4f(x_0)=0,$$

且 $f(x_0)>0$，故 $f''(x_0)=-4f(x_0)<0$，从而点 x_0 是 $f(x)$的极大值点．故选(A).

例 1.6.13 设线性无关的函数 y_1，y_2，y_3 都是二阶非齐次线性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

的解，C_1，C_2 是任意常数，则该非齐次方程的通解是( ).

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$　　(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查二阶线性非齐次方程的通解结构．

[解] 由于 $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3=C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3$，其中 y_1-y_3 和 y_2-y_3 是原方程对应的齐次方程的两个线性无关的解，又 y_3 是原方程的一个特解，所以(D)是原方程的通解．

[典型错误] 不知道 y_1-y_3 和 y_2-y_3 是对应的齐次方程的两个解．其实，因为 y_1，y_2，y_3 都是原方程

的解，故

$$y''_1+p(x)y'_1+q(x)y_1=f(x),\qquad ①$$

$$y''_2+p(x)y'_2+q(x)y_2=f(x),\qquad ②$$

$$y''_3+p(x)y'_3+q(x)y_3=f(x).\qquad ③$$

由①－③，②－③可得

$$(y_1-y_3)''+p(x)(y_1-y_3)'+q(x)(y_1-y_3)=0,$$

$$(y_2-y_3)''+p(x)(y_2-y_3)'+q(x)(y_2-y_3)=0,$$

由上二式可以看出 y_1-y_3 和 y_2-y_3 分别是对应的齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的两个解.

例 1.6.14 微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式(式中 a,b 为常数)(　　).

(A) ae^x+b　　(B) axe^x+b　　(C) ae^x+bx　　(D) axe^x+bx

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查形如

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

的二阶非齐次线性方程的一个特解形式，其中 $f_1(x)=e^x$，$f_2(x)=1$.

[解] 原方程对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-1=0$，特征根为 $\lambda=\pm1$.

对于方程　$y''-y=e^x\quad(e^{\alpha x}=e^x)$，

由于 $\alpha=1$ 且等于一个特征根，故设其一个特解形式为

$$y_1^*=axe^x.$$

对于方程　$y''-y=1\quad(e^{\alpha x}=e^{0x})$，

由于 $\alpha=0$ 不等于特征根，故设其一个特解形式为

$$y_2^*=b.$$

根据解的结构定理知原方程的一个特解形式为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=axe^x+b,$$

故选(B).

[典型错误] 写错特征方程为 $\lambda^2-\lambda=0$ 及不熟悉有关的非齐次线性微分方程解的结构定理而出现的错误.

例 1.6.15 若连续函数 $f(x)$满足关系式

$$f(x)=\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2,$$

则 $f(x)$等于(　　).

(A) $e^x\ln 2$　　(B) $e^{2x}\ln 2$　　(C) $e^x+\ln 2$　　(D) $e^{2x}+\ln 2$

[答案] (B).

[提示] 在等式中含有未知函数 $f(x)$及其变上限的积分而求 $f(x)$的题目，一般要等式两边求导来解决，求导后得到一个含有 $f'(x)$的式子，即微分方程. 从而求出 $f(x)$.

[解] 将已知等式两边求导得方程

$$f'(x)=2f(x),$$

该方程的通解为 $f(x)=Ce^{2x}$，由初始条件 $f(0)=\ln 2$ 得 $C=\ln 2$，所以 $f(x)=e^{2x}\ln 2$. 故选(B).

[典型错误]

① 变上限积分求导的错误，如

$$\left(\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)dt\right)'=f(x),$$

忘记了还应乘上$(2x)'=2$.

② 初始条件 $f(0)=\ln 2$ 隐藏在关系式中，不知道自己把它找出来.

例 1.6.16　已知函数 $y=y(x)$在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小量．$y(0)=\pi$，则 $y(1)$等于(　　)．

(A) 2π　　(B) π　　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$　　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

[答案]　(D).

[提示]　本题考查导数的定义，高阶无穷小量的概念及可分离变量的微分方程的解法．

[解]　由 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，两边除以 Δx，并令 $\Delta x\to 0$ 取极限得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y}{1+x^2}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{\Delta x}.$$

由此得$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{1+x^2}$．分离变量，解此微分方程得 $\ln y=\arctan x+C$．由 $y(0)=\pi$ 知 $C=\ln\pi$．故 $\ln y=\arctan x+\ln\pi$，于是当 $x=1$ 时，$\ln y=\arctan 1+\ln\pi=\dfrac{\pi}{4}+\ln\pi$，即 $y=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$．故选(D)．

例 1.6.17　求微分方程 $y''+5y'+6y=2e^{-x}$的通解．

[提示]　这是自由项 $f(x)=e^{\alpha x}\cdot P_m(x)$ $(\alpha=-1,m=0)$的二阶常系数线性非齐次微分方程．

[解]　所给方程对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda+3)=0.$$

特征根为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-3$．于是，齐次微分方程的通解为

$$\bar{y}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}.$$

其中 C_1，C_2 为任意常数．设所给非齐次方程的特解为 $y^*=Ae^{-x}$，将 y^*代入原方程，可得 $A=1$．故非齐次方程的一个特解为

$$y^*=e^{-x},$$

从而，原方程的通解为

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+e^{-x}.$$

例 1.6.18　求微分方程 $y'+y\cos x=(\ln x)e^{-\sin x}$的通解．

[提示]　这是一阶非齐次线性微分方程，可利用其通解公式求解．

[解]

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int\cos x dx}\left[\int e^{-\sin x}(\ln x)e^{\int\cos x dx}dx+C\right]\\&=e^{-\sin x}\left(\int\ln x dx+C\right)=e^{-\sin x}(x\ln x-x+C).\end{aligned}$$

例 1.6.19　求微分方程 $xy\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 满足 $y\big|_{x=e}=2e$ 的特解．

[提示]　这是一阶微分方程，是齐次方程．先求出方程的通解，再据初始条件确定通解中的积分常数 C，从而求出特解．

[解]　原方程可化为齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}}.$$

设 $y=ux$，有$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，将其代入上式，得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u},\ 即\ x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u},\ \frac{1}{x}dx=u du,$$

两边积分，得

$$\frac{1}{2}u^2=\ln x+C.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$代入上式，得通解

$$y^2=2x^2(\ln x+C).$$

由条件 $y|_{x=e}=2e$. 求得 $C=1$. 于是所求特解为

$$y^2=2x^2(\ln x+1).$$

[典型错误] 不能识别齐次方程.

例 1.6.20 假设: ①函数 $y=f(x)$ $(0\leqslant x<+\infty)$满足条件 $f(0)=0$ 和 $0\leqslant f(x)\leqslant e^x-1$; ②平行于 y 轴的动直线 MN 与曲线 $y=f(x)$和 $y=e^x-1$ 分别相交于点 P_1 和点 P_2; ③曲线 $y=f(x)$、直线 MN 与 x 轴所围封闭图形的面积 S 恒等于线段 P_1P_2 的长度. 求函数 $y=f(x)$的表达式.

[提示] 根据已知图形面积等于线段长度可建立一个含未知函数 $f(x)$的积分方程, 两边求导后, 即可得一个微分方程, 识别类型后, 按常规方法求解.

[解] 由题设可得示意图(如图 1.6.1). 由图可知

$$\int_0^x f(x)\,dx=e^x-1-f(x),$$

两边求导, 得 $f(x)=e^x-f'(x)$. 即 $f'(x)+f(x)=e^x$, 由一阶线性方程求通解公式, 得

$$f(x)=e^{-x}\left(\int e^x\cdot e^x dx+C\right)=Ce^{-x}+\frac{1}{2}e^x.$$

由 $f(0)=0$, 得 $C=-\frac{1}{2}$, 因此所求函数为

$$f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}).$$

[典型错误] 不能根据已知条件的几何意义正确画出图形. 从而不能建立有关方程.

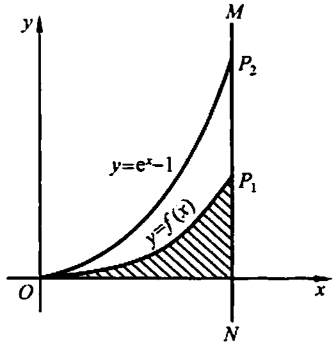

图 1.6.1

例 1.6.21 设函数 $y=y(x)$满足条件

$$\begin{cases} y''+4y'+4y=0, \\ y(0)=2,\ y'(0)=-4, \end{cases}$$

求反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\,dx$.

[提示] 本题实际上是两道题. 一是求二阶常系数齐次线性微分方程的特解; 二是求无穷区间上的反常积分.

[解] 所给方程的特征方程是 $\lambda^2+4\lambda+4=0$, 得 $\lambda_1=\lambda_2=-2$. 故方程的通解为

$$y=e^{-2x}(C_1+C_2x).$$

由初始条件得 $C_1=2$, $C_2=0$, 因此微分方程的特解为 $y=2e^{-2x}$. 于是

$$\int_0^{+\infty} y(x)dx=\int_0^{+\infty}2e^{-2x}dx=-\int_0^{+\infty}e^{-2x}d(-2x)=1.$$

例 1.6.22 已知连续函数 $f(x)$满足条件

$$f(x)=\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x},$$

求 $f(x)$.

[提示] 将所给积分方程两边对 x 求导, 即得一阶线性微分方程, 再解之.

[解] 两边对 x 求导, 得微分方程

$$f'(x)=3f(x)+2e^{2x},\ 即\ f'(x)-3f(x)=2e^{2x}.$$

利用一阶非齐次线性微分方程通解公式, 得

$$f(x)=e^{3x}\left(\int 2e^{2x}\cdot e^{-3x}dx+C\right)$$

$$=e^{3x}\left(2\int e^{-x}dx+C\right)=e^{3x}(C-2e^{-x})=Ce^{3x}-2e^{2x}.$$

由 $f(0)=1$. 可得 $C=3$, 于是

$$f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}.$$

例 1.6.23 求微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

的通解.

[提示] 本题考查齐次方程的解法.

[解] 令 $u=\frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. 当 $x>0$ 时，原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=u-\sqrt{1+u^2},\quad \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{1}{x}dx,$$

积分得 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=-\ln x+\ln C=\ln\frac{C}{x}$，其通解为 $u+\sqrt{1+u^2}=\frac{C}{x}$. 代回原变量，得原方程的通解为

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C\quad (x>0).$$

当 $x<0$ 时，原方程通解与 $x>0$ 时相同.

[典型错误]

① 未分 $x>0$ 与 $x<0$ 两种情况解题，虽然答案是正确的，但算术根的概念是有误的.

② 不定积分 $\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$的计算错误. 其实可直接利用积分公式

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln(u+\sqrt{u^2\pm a^2})+C$$

去解，或利用换元积分法中的三角代换法，令 $u=\tan t$ 去解.

例 1.6.24 已知某商品的需求量 x 对价格 p 的弹性 $\eta=-3p^3$，而市场对该商品的最大需求量为 1 (万件). 求需求函数.

[提示] 根据已知条件及弹性的定义可以得到一个以需求量 x 为待求解函数，以价格 p 为自变量的微分方程.

[解] 根据弹性定义，有

$$\eta=\left(\frac{dx}{x}\right)\Big/\left(\frac{dp}{p}\right)=-3p^3,\ 即\frac{dx}{x}=-3p^2dp.$$

两边积分后，可得微分方程通解 $x=Ce^{-p^3}$.

由题设知 $p=0$ 时，$x=1$，代入通解得 $C=1$. 于是，所求的需求函数为

$$x=e^{-p^3}.$$

[典型错误] 不知道弹性的定义而无从下手解题. 另外不知道该题的初始条件 $p=0$ 时，$x=1$ 是从实际中得到的，即某商品价格为零时，市场对该商品的最大需求量 $x=1$ (万件)将得到满足. 顺便指出，工科类的考生若报考数学三或数学四，还必须补充微积分在经济应用方面的有关知识.

例 1.6.25 已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 p 的函数：

$$D=D(p)=\frac{a}{p^2},\quad S=S(p)=bp,$$

其中 $a>0$ 和 $b>0$ 为常数；价格 p 是时间 t 的函数且满足方程

$$\frac{dp}{dt}=k[D(p)-S(p)]\quad (k 为正的常数).$$

假设当 $t=0$ 时价格为 1，试求：

(Ⅰ) 需求量等于供给量时的均衡价格 p_e；

(Ⅱ) 价格函数 $p(t)$；

(Ⅲ) 极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)$.

[提示] 本题表面上是一个经济应用问题，但从数学上就是解一个简单的可分离变量的微分方程及求一个简单的极限．考生只要仔细审题是不难求解的．

[解] (Ⅰ) 当需求量等于供给量时，有

$$\frac{a}{p^2}=bp,\ p^3=\frac{a}{b}.$$

因此均衡价格为

$$p_e=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

(Ⅱ) 由条件知 $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=k\left[D(p)-S(p)\right]=k\left(\frac{a}{p^2}-bp\right)=\frac{kb}{p^2}\left(\frac{a}{b}-p^3\right).$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{kb}{p^2}(p_e^3-p^3)，即\frac{p^2\mathrm{d}p}{p^3-p_e^3}=-kb\mathrm{d}t.$$

两边积分，得

$$p^3=p_e^3+C\mathrm{e}^{-3kbt}.$$

由条件 $p(0)=1$，可得 $C=1-p_e^3$．于是价格函数为

$$p(t)=\left[p_e^3+(1-p_e^3)\mathrm{e}^{-3kbt}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

(Ⅲ) $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[p_e^3+(1-p_e^3)\mathrm{e}^{-3kbt}\right]^{\frac{1}{3}}=p_e$.

例 1.6.26 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

求 $f(t)$．

[提示] 本题所给方程是含有二重积分的积分方程．一般先通过计算二重积分把其化为变上限定积分，再通过方程两边求导，得到一个微分方程，微分方程的解即为所求．

[解] 由于 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}r\right)r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{2t}rf\left(\frac{1}{2}r\right)\mathrm{d}r.$$

所以有 $$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}rf\left(\frac{r}{2}\right)\mathrm{d}r,$$

方程两边求导，得 $$f'(t)=8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}+8\pi tf(t).$$

这是关于 $f(t)$ 的一阶非齐次线性微分方程，其通解为

$$f(t)=\mathrm{e}^{\int 8\pi t\mathrm{d}t}\left(\int 8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}\mathrm{e}^{-\int 8\pi t\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)=(4\pi t^2+C)\mathrm{e}^{4\pi t^2}.$$

又由题设得 $f(0)=1$，代入上式，得 $C=1$．因此 $f(t)=(4\pi t^2+1)\mathrm{e}^{4\pi t^2}$．

[典型错误]

① 在极坐标中，面积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，有的考生丢了一个 r．

② 利用通解公式

$$y=\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x}\left(\int Q\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

解一阶非齐次线性方程时，应按方程的标准形式准确找出 $P(x)$ 和 $Q(x)$．本题 $P(t)=-8\pi t$，$Q(t)=8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}$．有的考生搞错了正、负号．

例 1.6.27 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续．若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1$，$x=t$ $(t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}\left[t^2f(t)-f(1)\right].$$

试求 $y=f(x)$所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y\Big|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$的解.

[提示] 本题考查求旋转体体积，变上限积分求导及齐次微分方程的解法.

[解] 依题意得
$$V(t)=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)],$$
即
$$3\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=t^2f(t)-f(1).$$
两边对 t 求导. 得
$$3f^2(t)=2tf(t)+t^2f'(t).$$
将上式改写为
$$x^2y'=3y^2-2xy,$$
即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\cdot\frac{y}{x}.$$
令 $u=\dfrac{y}{x}$. 则有
$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3u^2-2u,\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3u(u-1).$$
当 $u\neq0$，$u\neq1$ 时. 分离变量并积分，有
$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u-1)}=3\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$
得$\dfrac{u-1}{u}=Cx^3$，从而方程的通解为 $y-x=Cx^3y$.

由已知条件，求得 $C=-1$，从而所求解为
$$y-x=-x^3y\quad\left(\text{或 } y=\frac{x}{1+x^3}\right).$$

例 1.6.28 设微分方程 $y'-2y=\Phi(x)$，其中
$$\Phi(x)=\begin{cases}2, & x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$
试求在$(-\infty,+\infty)$内的连续函数 $y=y(x)$，使之在$(-\infty,1)$和$(1,+\infty)$内都满足所给的方程，并且满足条件 $y(0)=0$.

[提示] 这是一个一阶非齐次线性微分方程，但其自由项是分段函数. 所以应分段求它的解. 然后再由所求得的解考虑它们在分段点处的连续性.

[解] 当 $x<1$ 时. 方程为 $y'-2y=2$，其通解为
$$y=\mathrm{e}^{2x}\left(\int 2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x+C_1\right)=\mathrm{e}^{2x}(-\mathrm{e}^{-2x}+C_1)=C_1\mathrm{e}^{2x}-1;$$
当 $x>1$ 时. 方程为 $y'-2y=0$. 其通解为
$$y=C_2\mathrm{e}^{2x}.$$
为保持函数 $y=y(x)$的连续性，应该使得在 $x=1$ 处有
$$C_1\mathrm{e}^{2x}-1=C_2\mathrm{e}^{2x},$$
即有 $C_2=C_1-\mathrm{e}^{-2}$，于是原方程的通解为
$$y=\begin{cases}C_1\mathrm{e}^{2x}-1, & \text{若 } x<1,\\ C_1\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2(x-1)}, & \text{若 } x>1.\end{cases}$$
又由已知初始条件 $y(0)=0$，求得 $C_1=1$. 于是所求特解为
$$y=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}-1, & \text{若 } x\leqslant1,\\ \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2(x-1)}, & \text{若 } x>1.\end{cases}$$
[典型错误] 最后结果的分段函数的分段区间仍写成 $x<1$ 和 $x>1$，而没有写成 $x\leqslant1$ 和 $x>1$ 或者 $x<1$ 和 $x\geqslant1$，这是错误的. 因为它不符合题意.

例 1.6.29 求微分方程 $y''-2y'-\mathrm{e}^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=1$，$y'(0)=1$ 的解.

[提示] 本题是求二阶常系数非齐次线性微分方程的特解问题. 注意自由项 $f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)=e^{2x}$ $(\alpha=2, m=0)$.

[解] 原方程的齐次方程 $y''-2y'=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda=0,$$

由此求得特征根 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$. 对应齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1+C_2e^{2x}.$$

设非齐次方程的特解为

$$y^*=Axe^{2x},$$

则

$$(y^*)'=(1+2x)Ae^{2x}, \quad (y^*)''=4A(1+x)e^{2x}.$$

代入原方程, 求得 $A=\frac{1}{2}$, 从而

$$y^*=\frac{1}{2}xe^{2x}.$$

于是, 原方程的通解为

$$y=\bar{y}+y^*=C_1+\left(C_2+\frac{1}{2}x\right)e^{2x}.$$

将 $y(0)=1$ 和 $y'(0)=1$ 代入通解, 求得 $C_1=\frac{3}{4}$, $C_2=\frac{1}{4}$. 从而所求特解为

$$y=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(1+2x)e^{2x}.$$

[典型错误] 有人设 $y^*=Ae^{2x}$, 少乘一个 x, 或设 $y^*=xe^{2x}$, 少乘一个常数 A, 这些都是错误的. 因为本题 $e^{\alpha x}$的 $\alpha=2$ 等于一个特征根 λ_2, 故设 y^*时应乘一个 x. 又因 $P_m(x)$的 $m=0$, 即 $P_0(x)$为 x 的 0 次多项式, 故设 y^*时应乘一个待定常数 A.

例 1.6.30 设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内连续, $f(1)=\frac{5}{2}$, 且对所有 x, $t\in(0,+\infty)$, 满足条件

$$\int_1^{xt}f(u)\,du=t\int_1^x f(u)\,du+x\int_1^t f(u)\,du,$$

求 $f(x)$.

[提示] 在所给积分方程中有两个自变量 x 和 t, 方程两边可以先对其中一个求导, 把另一个看成常数. 求导后利用已知条件 $f(1)=\frac{5}{2}$, 可以得到只含有一个自变量的积分方程. 两边再求导. 就可以得到一个微分方程, 解之即可.

[解] 等式两边对 x 求导(把 t 看成常数), 得

$$tf(xt)=tf(x)+\int_1^t f(u)du.$$

令 $x=1$, 由 $f(1)=\frac{5}{2}$得

$$tf(t)=\frac{5}{2}t+\int_1^t f(u)du.$$

两边对 t 求导, 得

$$f(t)+tf'(t)=\frac{5}{2}+f(t), \text{ 即 } f'(t)=\frac{5}{2t}.$$

上式两边积分, 得

$$f(t)=\frac{5}{2}\ln t+C.$$

由 $f(1)=\frac{5}{2}$, 得 $C=\frac{5}{2}$, 于是

$$f(x)=\frac{5}{2}(1+\ln x).$$

[典型错误] 方程两边各项不是对同一变量求导而引起的各种运算错误.

例 1.6.31 设 $f(u,v)$具有连续偏导数, 且满足

$$f'_u(u,v)+f'_v(u,v)=uv,$$

求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$所满足的一阶微分方程, 并求其通解.

[提示] 要建立关于 $y=y(x)$的一阶微分方程, 首先要求 $y'(x)$. 又 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$是 e^{-2x}与 $f(x,x)$两个因子的乘积. 二元函数 $f(x,x)$由 $f(u,v)$及 $u=x$, $v=x$ 复合而成. 在求$\frac{df}{dx}$时要用到全导数公式. 再利用已知条件就可以建立一个一阶微分方程. 最后, 用一阶非齐次线性微分方程通解公式, 求出 $y(x)$的表达式.

[解] $$y'=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}[f'_u(x,x)+f'_v(x,x)]=-2y+x^2e^{-2x},$$

因此所求的一阶微分方程为

$$y'+2y=x^2e^{-2x},$$

解得 $$y=e^{-\int 2dx}\left(\int x^2e^{-2x}e^{\int 2dx}dx+C\right)=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)e^{-2x}\quad (C\text{ 为任意常数}).$$

[典型错误] 不能识别 $f(x,x)$是二元复合函数 $f(u,v)$, $u=x$, $v=x$ 以及由此引起的求$\frac{df}{dx}$的错误.

例 1.6.32 设函数 $y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有二阶导数, 且 $y'\neq 0$, $x=x(y)$是 $y=y(x)$的反函数.

(Ⅰ) 试将 $x=x(y)$所满足的微分方程

$$\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$$

变换为 $y=y(x)$满足的微分方程;

(Ⅱ) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{3}{2}$的解.

[提示] 反函数的求导法是一元函数的三个基本微分法之一, 二阶常系数非齐次线性微分方程则是方程部分的重要内容. 本题将两部分内容有机地结合在一起, 除了考查考生的基本运算能力, 还可以考查他们综合运用知识的能力.

[解] (Ⅰ) 因为 $x[y(x)]=x$, 两边对 x 求导, 得

$$\frac{dx}{dy}y'=1,$$

从而

$$\frac{d^2x}{dy^2}(y')^2+\frac{dx}{dy}y''=0,$$

故

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'},\quad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3},$$

代入原方程, 得

$$y''-y=\sin x.$$

(Ⅱ) 方程 $y''-y=\sin x$ 对应的齐次方程$y''-y=0$的特征方程为

$$\lambda^2-1=0,$$

故特征根 $\lambda_{1,2}=\pm 1$, 所以齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

设非齐次方程的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x,$$

代入方程得 $A=0$, $B=-\frac{1}{2}$. 故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$, 从而 $y''-y=\sin x$ 的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$，得 $C_1=1$，$C_2=-1$，故特解为

$$y=e^{x}-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

[典型错误] 主要错误是求不正确反函数的二阶导数，如$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^2}$和$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{y''}{(y')^3}$是最常见的两种错误形式．其他错误包括设错特解 y^*，待定系数计算出错等．

例 1.6.33 设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中 $f(x)$，$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足以下条件：

$$f'(x)=g(x),\ g'(x)=f(x),\ 且\ f(0)=0,\ f(x)+g(x)=2e^{x}.$$

（Ⅰ）求 $F(x)$所满足的一阶微分方程；

（Ⅱ）求出 $F(x)$的表达式．

[提示] 要建立 $F(x)$的一阶微分方程，就要首先对 $F(x)$求导数，然后利用 $f(x)$与 $g(x)$之间导数的关系，导出微分方程的表达式，再解该方程求出 $F(x)$的表达式．

[解法 1] （Ⅰ）由

$$\begin{aligned}F'(x)&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=g^2(x)+f^2(x)\\&=[f(x)+g(x)]^2-2f(x)g(x)=4e^{2x}-2F(x),\end{aligned}$$

可见 $F(x)$满足的一阶微分方程为

$$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}.$$

（Ⅱ）该方程为非齐次一阶线性方程，其通解为

$$F(x)=e^{-\int 2dx}\left(\int 4e^{2x}e^{\int 2dx}dx+C\right)=e^{-2x}\left(\int 4e^{4x}dx+C\right)=e^{2x}+Ce^{-2x}.$$

将 $F(0)=f(0)\cdot g(0)=0$ 代入上式，得 $C=-1$，于是

$$F(x)=e^{2x}-e^{-2x}.$$

[解法 2] 由给定条件分别求出 $f(x)$和 $g(x)$的表达式，再建立 $F(x)$所满足的微分方程．

由于

$$f'(x)=g(x),\quad f(x)+g(x)=2e^{x},$$

可得非齐次一阶线性方程

$$f'(x)+f(x)=2e^{x},$$

于是

$$f(x)=e^{-\int dx}\left(\int 2e^{x}e^{\int dx}dx+C\right)=e^{-x}(e^{2x}+C)=e^{x}+Ce^{-x}.$$

由 $f(0)=0$，可得 $C=-1$．因此

$$f(x)=e^{x}-e^{-x},$$
$$g(x)=f'(x)=e^{x}+e^{-x}.$$

所以

$$F(x)=f(x)g(x)=(e^{x}-e^{-x})(e^{x}+e^{-x})=e^{2x}-e^{-2x},$$
$$2F(x)=2e^{2x}-2e^{-2x},$$

故

$$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}.$$

例 1.6.34 设函数 $f(x)$，$g(x)$满足 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=2e^{x}-f(x)$，且 $f(0)=0$，$g(0)=2$，求

$$\int_0^x\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx.$$

[提示] 本题实质分两部分：先求 $f(x)$，再计算所求定积分．第一部分是解微分方程；第二部分求积分时，先利用题设条件进行运算，最后代入 $f(x)$的式子得解．

[解法 1] 由 $f'(x)=g(x)$得 $f''(x)=g'(x)=2e^{x}-f(x)$，于是有

$$\begin{cases}f''(x)+f(x)=2e^{x},\\f(0)=0,\ f'(0)=2,\end{cases}$$

解之得

$$f(x)=\sin x-\cos x+e^{x},$$

所以
$$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+\int_0^{\pi}f(x)\,d\,\frac{1}{1+x}$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+f(x)\cdot\frac{1}{1+x}\bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{1+x}dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx+\frac{f(\pi)}{1+\pi}-f(0)-\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}dx$$
$$=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}.$$

［解法 2］ 同解法 1，得 $f(x)=\sin x-\cos x+e^x$. 则
$$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{g(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx=\int_0^{\pi}d\,\frac{f(x)}{1+x}$$
$$=\frac{f(x)}{1+x}\bigg|_0^{\pi}=\frac{f(\pi)}{1+\pi}-f(0)=\frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}.$$

［典型错误］ 本题的错误主要集中在第二部分计算定积分上．两种解法计算定积分都有技巧：解法 1 中，被积函数的第一项积分始终保持不变，最后与第二项积分通过分部积分后所得到的其中一项相抵消，从而得到积分结果；解法 2 中，关键是式子
$$\frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^2}dx=d\,\frac{f(x)}{1+x}.$$
如果从等式右端计算到左端很容易．本题则要求相反运算，就出乎某些考生的意料了．

例 1.6.35 设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)$ $(x>0)$到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$.

（Ⅰ）试求曲线 L 的方程；

（Ⅱ）求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小．

［提示］ 第(Ⅰ)问显然是解微分方程的定解问题，其中关键是列出微分方程；第(Ⅱ)问是最值问题．关键是写出图形面积的表达式．

［解］ （Ⅰ）设曲线 L 过点$P(x,y)$的切线方程为
$$Y-y=y'(X-x),$$
令 $X=0$，则得该切线在 y 轴上的截距为：$y-xy'$.

由题设知
$$\sqrt{x^2+y^2}=y-xy',$$
这是一个齐次微分方程，令 $u=\frac{y}{x}$，则此方程可化为
$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x},$$
两边积分，解之得
$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C.$$
由 L 经过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$，知 $C=\frac{1}{2}$，于是 L 的方程为
$$y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}，即\ y=\frac{1}{4}-x^2.$$
（Ⅱ）设第一象限内曲线 $y=\frac{1}{4}-x^2$ 在点 $P(x,y)$处的切线方程为
$$Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x(X-x),$$

即
$$Y=-2xX+x^2+\frac{1}{4}\quad\left(0<x\leqslant\frac{1}{2}\right),$$
它与 x 轴及 y 轴的交点分别为 $\left(\dfrac{x^2+\frac{1}{4}}{2x},\ 0\right)$ 与 $\left(0,\ x^2+\dfrac{1}{4}\right)$. 故所求面积为
$$S(x)=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{2x}-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\mathrm{d}x.$$
两边对 x 求导得
$$S'(x)=\frac{1}{4}\frac{4x^2\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{4x^2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(3x^2-\frac{1}{4}\right).$$
令 $S'(x)=0$. 解得 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

当 $0<x<\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时, $S'(x)<0$; $x>\dfrac{\sqrt{3}}{6}$时, $S'(x)>0$, 因而 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$是 $S(x)$在$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$内的唯一极小值点, 即最小值点. 于是所求切线为
$$Y=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}X+\frac{3}{36}+\frac{1}{4}.$$
即
$$Y=-\frac{\sqrt{3}}{3}X+\frac{1}{3}.$$
[典型错误] 一个主要错误是对截距的理解, 写成了$|y-xy'|$. 这样往下就不好做了. 如果用等式
$$\sqrt{x^2+y^2}=|y-xy'|$$
两边平方的方法去掉绝对值, 得 $x^2=x^2y'^2-2xyy'$, 这不是线性微分方程.

例 1.6.36 求微分方程 $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 的一个解 $y=y(x)$. 使得由曲线 $y=y(x)$与直线 $x=1$. $x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

[提示] 先求微分方程的通解, 即得到一族曲线, 再利用求最大值的方法在此曲线族中确定一条曲线.

[解] 原方程可化为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}y=-1,$$
这是一阶非齐次线性微分方程, 利用通解公式得
$$y=\mathrm{e}^{-\int-\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(-\int\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x^2\left(\frac{1}{x}+C\right)=x+Cx^2.$$
由曲线 $y=x+Cx^2$. 直线 $x=1$, $x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕x 轴旋转一周的旋转体体积为
$$V(C)=\int_1^2\pi(x+Cx^2)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^3}{3}+\frac{C}{2}x^4+\frac{C^2}{5}x^5\right)\Bigg|_1^2=\pi\left(\frac{31}{5}C^2+\frac{15}{2}C+\frac{7}{3}\right).$$
令 $V'(C)=0$, 得
$$\pi\left(\frac{62}{5}C+\frac{15}{2}\right)=0,$$
解出 $C=-\dfrac{75}{124}$. 又 $V''(C)=\dfrac{62}{5}\pi>0$, 故 $C=-\dfrac{75}{124}$为唯一极小值点, 也就是最小值点. 总之
$$y=x-\frac{75}{124}x^2$$
为所求之解.

[典型错误] 一些考生因为所得之一阶线性微分方程通解公式不对(主要是符号), 当然整个题就很难为继. 有些考生则是最后未加判断, 这里的判断可以如上面解中所做, 通过 $V''(C)>0$ 得到结论, 也可这样做: 因 $C=-\dfrac{75}{124}$是唯一驻点, 而此应用题存在最小值, 则该驻点便是最小值点. 无论如何都要做出判断.

例 1.6.37 有一平底容器, 其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)$ $(y\geqslant0)$绕 y 轴旋转而成的旋转曲面(如图

1.6.2). 容器的底面圆的半径为 2 m. 根据设计要求, 当以3 m^3/min的速率向容器内注入液体时, 液面的面积将以 π m^2/min 的速率均匀扩大(假设注入液体前, 容器内无液体).

(Ⅰ) 根据 t 时刻液面的面积, 写出 t 与 $\varphi(y)$之间的关系式;

(Ⅱ) 求曲线 $x=\varphi(y)$的方程.

(注:m 表示长度单位米, min 表示时间单位分.)

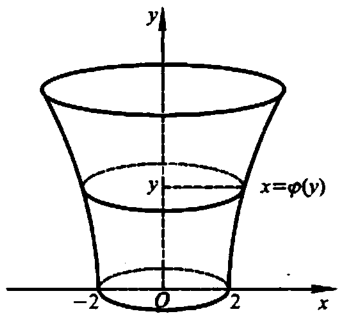

图 1.6.2

[提示] 本题是一道综合性应用题. 为了给考生提供解题思路, 设计了台阶即第(Ⅰ)问, 因而降低了难度. 解法 1 就是循此思路做的: 建立 t 与 $\varphi(y)$之间的关系, 再建立旋转体体积与 t 之间的关系, 从而得到旋转体体积与 $\varphi(y)$之间的关系, 然后通过对 y 求导得到微分方程. 而解法 2, 根据液体体积的变化即微元法, 直接建立微分方程, 求解即得曲线 $x=\varphi(y)$的方程.

[解法 1] (Ⅰ) 设在 t 时刻, 液面的高度为 y, 则由题设知此时液面的面积为 $\pi\varphi^2(y)=4\pi+\pi t$, 从而 $t=\varphi^2(y)-4$.

(Ⅱ) 液面的高度为 y 时, 液体的体积为

$$\pi\int_0^y \varphi^2(u)\mathrm{d}u=3t=3\varphi^2(y)-12.$$

上式两边对 y 求导, 得

$$\pi\varphi^2(y)=6\varphi(y)\varphi'(y), \text{ 即 } \pi\varphi(y)=6\varphi'(y).$$

解此微分方程, 得

$$\varphi(y)=C\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}y} \quad (\text{其中 } C \text{ 为任意常数}).$$

由 $\varphi(0)=2$ 知 $C=2$, 故所求曲线方程为

$$x=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}y}.$$

[解法 2] (Ⅰ) 同解法 1.

(Ⅱ) 在 t 时刻到 $t+\mathrm{d}t$ 时刻, 液体体积的变化即体积微元满足

$$3\mathrm{d}t=(4\pi+\pi t)\mathrm{d}y.$$

解此微分方程, 得

$$y=\frac{3}{\pi}\ln(4+t)+C.$$

当 $t=0$ 时, $y=0$, 得 $C=-\frac{3}{\pi}\ln 4$. 从而 $y=\frac{3}{\pi}\ln\frac{4+t}{4}$. 由 $t=\varphi^2(y)-4$ 得 $y=\frac{3}{\pi}\ln\frac{x^2}{4}$. 考虑到 $\varphi(0)=2$, 故所求曲线方程为

$$x=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}y}.$$

[典型错误] 本题得分率极低, 表明考生对应用题仍然没有"进入状态". 主要问题是不能根据题设条件建立起实际问题的数学模型. 同时对解决实际问题的微元法尚不熟练.

例 1.6.38 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$, 其中 f 为连续函数. 求 $f(x)$.

[提示] 将所给积分方程两边对 x 求导, 化为微分方程, 解之即可.

[解]

$$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned} f'(x)&=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)+xf(x)\\ &=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$f''(x)=-\sin x-f(x).$$

即

$$f''(x)+f(x)=-\sin x.$$

这是二阶非齐次线性微分方程, 初始条件可求出为

$$y\Big|_{x=0}=f(0)=0,\ y'\Big|_{x=0}=f'(0)=1.$$

对应的齐次方程的特征方程是 $\lambda^2+1=0$，特征根是 $\lambda_{1,2}=\pm i$. 故齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1\sin x+C_2\cos x.$$

非齐次方程的特解可设为 $$y^*=x(a\sin x+b\cos x).$$

代回原方程，求得 $a=0$、$b=\frac{1}{2}$，于是 $y^*=\frac{x}{2}\cos x$. 则非齐次方程的通解为

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{x}{2}\cos x.$$

由初始条件定出 $C_1=\frac{1}{2}$、$C_2=0$，从而

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x.$$

[典型错误]

① $\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)f(t)dt\neq(x-x)f(x)=0$. 一般变上限积分被积函数里除了含有积分变量 t 还含有 x，当对其上限 x 求导时，首先要把被积函数里的 x 想办法“拿”到积分号外面来，然后才能求导.

② 设非齐次方程的特解 y^* 时设成 $y^*=a\sin x+b\cos x$，少乘了一个 x、说明对自由项 $f(x)$ 为

$$f(x)=e^{\alpha x}(a_1\cos\beta x+a_2\sin\beta x)$$

这种形式的二阶常系数非齐次线性微分方程设特解的方法尚未能掌握.

例 1.6.39　求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

[提示]　本题为自由项 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 形式的二阶非齐次线性微分方程，其中 $f_1(x)=x$，$f_2(x)=\cos x$. 关键是求方程的一个特解 y^*. 为此将原方程拆成两个方程，分别求出一个特解 y_1^* 和 y_2^*，从而根据解的结构定理知 $y^*=y_1^*+y_2^*$.

[解]　原方程对应的齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

设非齐次方程 $y''+y=x$ 的特解为 $y_1^*=Ax+B$，代入方程得 $A=1$，$B=0$，所以 $y_1^*=x$.

设非齐次方程 $y''+y=\cos x$ 的特解为 $y_2^*=x(E\cos x+D\sin x)$，代入方程得 $E=0$、$D=\frac{1}{2}$，所以 $y_2^*=\frac{1}{2}x\sin x$.

故原方程的一个特解为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=x+\frac{1}{2}x\sin x.$$

原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{2}x\sin x.$$

[典型错误]

① 不知道自由项形如 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 的二阶非齐次线性微分方程的特解结构.

② 没有掌握 $y''+y=\cos x$ 设特解 y_2^* 的方法.

例 1.6.40　设二阶常系数线性微分方程

$$y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$$

的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$. 试确定常数 α，β，γ，并求该方程的通解.

[提示]　本题考查微分方程解的概念及二阶常系数非齐次线性微分方程的解法.

[解]　将 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ 代入原方程，得

$$(4+2\alpha+\beta)e^{2x}+(3+2\alpha+\beta)e^x+(1+\alpha+\beta)xe^x=\gamma e^x.$$

比较同类项的系数，有

$$\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0,\\3+2\alpha+\beta=\gamma,\\1+\alpha+\beta=0,\end{cases}$$

解方程组，得 $\alpha=-3$，$\beta=2$，$\gamma=-1$. 故原方程为

$$y''-3y'+2y=-e^{x},$$

它对应的特征方程的根为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，故齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1e^{x}+C_2e^{2x}.$$

由题设特解知，原方程的通解为

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+[e^{2x}+(1+x)e^{x}],$$

即
$$y=C_3e^{x}+C_4e^{2x}+xe^{x},$$

其中 $C_3=C_1+1$，$C_4=C_2+1$，C_3，C_4 均为任意常数.

例 1.6.41 求微分方程 $y''+y'=x^2$ 的通解.

[提示] 本题是一道二阶常系数非齐次线性微分方程的基本题，关键要注意其特解 y^* 不要设错.

[解法 1] 对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+\lambda=0$. 解得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$，故齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1+C_2e^{-x}$.

设非齐次方程的特解为 $y^*=x(ax^2+bx+c)$，代入原方程得 $a=\frac{1}{3}$，$b=-1$，$c=2$. 因此原方程的通解为

$$y=\bar{y}+y^*=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}x^3-x^2+2x.$$

[解法 2] 原方程为 $(y'+y)'=x^2$，两边积分得

$$y'+y=\frac{1}{3}x^3+C_0.$$

解此一阶非齐次线性方程，得通解为

$$\begin{aligned}y&=e^{-x}\left[\int\left(\frac{1}{3}x^3+C_0\right)e^{x}dx+C_2\right]\\&=e^{-x}\left[\frac{1}{3}(x^3e^{x}-3x^2e^{x}+6xe^{x}-6e^{x})+C_0e^{x}+C_2\right]\\&=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+C_1+C_2e^{-x}.\end{aligned}$$

[解法 3] 令 $p=y'$. 代入原方程得 $p'+p=x^2$，故

$$p=e^{-x}\left(\int x^2e^{x}dx+C_0\right)=e^{-x}(x^2e^{x}-2xe^{x}+2e^{x}+C_0).$$

通解为
$$y=\int(x^2-2x+2+C_0e^{-x})dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+C_1+C_2e^{-x}.$$

[典型错误] 解法 1 中特解设成 $y^*=x\cdot ax^2$ 或 $y^*=ax^2$. 解法 2 和解法 3 中，没有把任意常数和其他常数的运算合并成一个新的任意常数.

第二部分　线 性 代 数

一、行列式

・考试内容与要求・

考试内容

行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理

考试要求

1. 了解行列式的概念. 掌握行列式的性质.

2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

・考试内容解析・

(一) 行列式的概念

1. 排列

由正整数$1,2,\cdots,n$组成的一个有序组$j_1j_2\cdots j_n$称为一个n级排列. 在一个排列中, 如果某个较大的数排在某个较小的数之前, 称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数, 记作$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 有偶数个逆序数的排列称为一个偶排列, 有奇数个逆序数的排列称为一个奇排列.

2. n 阶行列式

n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积$a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n}$的代数和, 其中$j_1j_2\cdots j_n$构成一个$n$级排列. 当$j_1j_2\cdots j_n$是偶排列时, 该项取正号; 当$j_1j_2\cdots j_n$是奇排列时, 该项取负号. 即 n 阶行列式

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的n级排列求和.

注　在 n 阶行列式的定义中有三要素, 一是 n 阶行列式展开式中的每一项$a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n}$表示不同行、不同列的 n 个元素的乘积; 二是展开式中项的符号$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$由列标排列的奇偶性确定; 三是展开式中所有项的项数等于 $n!$.

(二) 行列式的性质

(1) 行列互换, 行列式的值不变. 即行列式与其转置行列式相等.

(2) 互换行列式的两行(列), 行列式的值反号. 特别地, 如果行列式有两行(列)完全相同, 则行列式的值为零.

(3) 行列式某一行(列)各元素的公因子可以提到行列式之前. 特别地, 如果行列式中有一行(列)的元素全为零, 则行列式的值为零; 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例, 则行列式的值为零.

(4) 如果行列式中某一行(列)的所有元素均为两数之和, 则此行列式等于两个行列式之和, 这两个行列式分别以这两组数作为该行(列)的元素, 其余各行(列)元素与原行列式相同.