第二部分　线 性 代 数

一、行列式

·考试内容与要求·

考试内容

行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理

考试要求

1．了解行列式的概念．掌握行列式的性质．

2．会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式．

·考试内容解析·

(一) 行列式的概念

1．排列

由正整数$1,2,\cdots,n$组成的一个有序组$j_1j_2\cdots j_n$称为一个n级排列．在一个排列中，如果某个较大的数排在某个较小的数之前，称这两个数构成一个逆序．一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数，记作$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$．有偶数个逆序数的排列称为一个偶排列，有奇数个逆序数的排列称为一个奇排列．

2．n阶行列式

n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行、不同列的n个元素乘积$a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n}$的代数和，其中$j_1j_2\cdots j_n$构成一个$n$级排列．当$j_1j_2\cdots j_n$是偶排列时，该项取正号；当$j_1j_2\cdots j_n$是奇排列时，该项取负号．即$n$阶行列式

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n},$$

其中$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对所有的$n$级排列求和．

注　在n阶行列式的定义中有三要素，一是n阶行列式展开式中的每一项$a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n}$表示不同行、不同列的$n$个元素的乘积；二是展开式中项的符号$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$由列标排列的奇偶性确定；三是展开式中所有项的项数等于$n!$．

(二) 行列式的性质

(1) 行列互换，行列式的值不变．即行列式与其转置行列式相等．

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式的值反号．特别地，如果行列式有两行(列)完全相同，则行列式的值为零．

(3) 行列式某一行(列)各元素的公因子可以提到行列式之前．特别地，如果行列式中有一行(列)的元素全为零，则行列式的值为零；如果行列式有两行(列)的对应元素成比例，则行列式的值为零．

(4) 如果行列式中某一行(列)的所有元素均为两数之和，则此行列式等于两个行列式之和，这两个行列式分别以这两组数作为该行(列)的元素，其余各行(列)元素与原行列式相同．

(5) 行列式某一行(列)所有元素的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上，行列式的值不变.

(三) 行列式按行(列)展开

1. 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式 D_n 中，划去元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列，余下的元素按原有顺序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij}的余子式，记作 M_{ij}. 记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij}为元素 a_{ij}的代数余子式.

在 n 阶行列式 D_n 中，任取 k 行 k 列($1\leqslant k\leqslant n$)，其交叉位置上的元素按原有顺序构成的 k 阶行列式，称为 D_n 的一个 k 阶子式，记作 M. 在 D_n 中划去这 k 行 k 列后，剩下的元素按原有顺序构成的 $n-k$ 阶行列式，称为 k 阶子式 M 的余子式，记作 N. 如果设 k 阶子式 M 在 D_n 中所在行、列的行标和列标分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 和 $j_1,j_2,\cdots,j_k$，记 $A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}N$. 称 A 为 k 阶子式 M 的代数余子式.

2. 行列式按一行(列)展开

n 阶行列式 D_n 等于它的任意一行(列)各元素与其对应的代数余子式乘积之和；n 阶行列式任意一行(列)各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj}=\begin{cases} D_n, & 若\ i=s, \\ 0, & 若\ i\neq s, \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{it}=\begin{cases} D_n, & 若\ j=t, \\ 0, & 若\ j\neq t. \end{cases}$$

3. 行列式按 k 行(列)展开(拉普拉斯定理)

n 阶行列式 D_n 等于任意 k 行(列)的所有 k 阶子式与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D_n=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t,$$

其中 A_i 是 k 阶子式 M_i 的代数余子式，$t=C_n^k$.

·例题详解·

例 2.1.1　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$______.

[答案]　x^4.

[提示]　本题主要考查考生是否熟练掌握行列式的基本性质. 注意到该行列式每行元素之和均为 x，把第二列至最后一列都加到第一列，然后提出第一列的公因数 x.

[解]　把该行列式的第二列至最后一列加到第一列，并提出第一列的公因数 x，得

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

再把第一列加到第二列、第四列，第一列乘 -1 加到第三列，得

$$x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=x^4.$$

故应填 x^4.

[典型错误]　填 $-x^4$．其原因是没有掌握好行列式的性质．

例 2.1.2　n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ __________．

[答案]　$(-1)^{n-1}(n-1)$．

[提示]　本题主要考查行列式的基本性质．注意到该行列式每列元素之和均为 $n-1$．把第二行至最后一行都加到第一行，然后从第一行提出 $n-1$，于是为降阶做好准备．

[解]　把该行列式的第二行至最后一行都加到第一行，并提出 $n-1$，再把第一行乘 -1 加到其后的每一行，得

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1).$$

[典型错误]　填 $(-1)^n(n-1)$．其原因是没有数清三角行列式的主对角线上 -1 的个数，这是考生常犯的错误．

例 2.1.3　5 阶行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

[答案]　$1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$．

[提示]　本题主要考查行列式按行(列)展开定理．按第一行展开，可得递推公式，反复使用这个递推公式就可计算出 D_5．

[解]　按第一行展开得

$$D_5 = (1-a)D_4 + aD_3.$$

其中 D_3，D_4 分别是与 D_5 结构相同的 3 阶．4 阶行列式．由此得到递推公式 $D_n = (1-a)D_{n-1} + aD_{n-2}$，$3 \leqslant n \leqslant 5$．于是逐次递推得到

$$\begin{aligned} D_5 &= (1-a)D_4 + aD_3 \\ &= (1-a)[(1-a)D_3 + aD_2] + aD_3 \\ &= [(1-a)^2 + a]D_3 + a(1-a)D_2 \\ &= [(1-a)^2 + a]\{[(1-a)D_2 + a(1-a)] + a(1-a)\} \end{aligned}$$

$$=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.$$

[典型错误] 填 $1-7a+17a^2-17a^3+7a^4-a^5$. 原因是递推公式写为$D_n=(1-a)D_{n-1}-aD_{n-2}$，这是没有掌握好行列式按行(列)展开的定理造成的.

例 2.1.4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

[答案] $a^n+(-1)^{n+1}b^n$.

[提示] 本题主要考查行列式按行(列)展开定理的运用. 当行列式某行(列)仅有一个或两个非零元素时，一般按此行(列)展开. 化为低一阶的行列式.

[解] 按第一列展开，得

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

例 2.1.5 设行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和的值为__________.

[答案] -28.

[提示] 本题主要考查行列式的余子式概念，可用行列式展开定理计算.

[解] 根据行列式按一行(列)展开的展开定理，D_4 按第四行展开应该是

$$\begin{aligned} D_4 &= a_{41}(-1)^{4+1}M_{41}+a_{42}(-1)^{4+2}M_{42}+a_{43}(-1)^{4+3}M_{43}+a_{44}(-1)^{4+4}M_{44} \\ &= a_{41}(-M_{41})+a_{42}M_{42}+a_{43}(-M_{43})+a_{44}M_{44}. \end{aligned}$$

如果令 $a_{41}=-1$，$a_{42}=1$，$a_{43}=-1$、$a_{44}=1$，则第四行各元素的余子式之和就等于行列式之值. 即

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\bar{D}_4=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

因此，行列式 D_4 的第四行各元素余子式之和

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=\bar{D}_4=14\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-28.$$

[典型错误] 填 0. 其原因是认为求第四行各元素代数余子式之和. 把余子式与代数余子式的概念混淆了. 所以要取得理想的成绩. 应掌握好基本概念.

例 2.1.6 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于(　　).

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　(D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

[答案]　(D).

[提示]　本题主要考查拉普拉斯定理．注意到该行列式的第一行与第四行仅有一个 2 阶子式不为零．故用拉普拉斯定理解此题．

[解]　根据拉普拉斯展开定理，得

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \times (-1)^{1+4+1+4} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4).$$

例 2.1.7　若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1|=m,\quad |\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3|=n,$$

则 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$ 等于(　　).

(A) $m+n$　　(B) $-(m+n)$　　(C) $n-m$　　(D) $m-n$

[答案]　(C).

[提示]　本题主要考查行列式的基本性质．由

$$|\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=|\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2|,$$

可解本题．

[解]　由行列式的性质，有

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2| \\ =&|\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2| \\ =&-|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3|=n-m. \end{aligned}$$

例 2.1.8　设 $\boldsymbol{A}$ 为 10 阶矩阵，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 10 阶单位矩阵，λ 为常数．

[提示]　本题主要考查行列式按行(列)展开定理．注意到行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$ 第一列仅有两个非零元素，故按第一列展开．

[解]　将 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$ 按第一列展开，得

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}-10^{10}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda)(-\lambda)^9-10^{10}=\lambda^{10}-10^{10}.$$

例 2.1.9 已知实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$满足条件:

(1) $a_{ij}=A_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$,其中 A_{ij}是a_{ij}的代数余子式;

(2) $a_{11}\neq0$.

计算行列式$|A|$.

[提示] 本题主要考查行列式按行(列)展开定理和代数余子式的概念.由 $a_{ij}=A_{ij}$,知 $A^*=A^T$.由行列式按行(列)展开定理,$AA^*=|A|E$,两边取行列式,就可求出$|A|$.

[解] 因为 $a_{ij}=A_{ij}$,所以

$$A^*=A^T.$$

又由于

$$AA^*=|A|E,$$

于是

$$AA^T=|A|E.$$

两边同时取行列式,得

$$|A|^2=|A|^3,$$

从而

$$|A|=1\text{ 或 }|A|=0.$$

由 $a_{11}\neq0$ 可知

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq0,$$

所以

$$|A|=1.$$

[典型错误]

① 没有排除$|A|=0$的情况.

② 没有掌握好行列式按行(列)展开定理,导致无法下手解答.

二、矩阵

·考试内容与要求·

考试内容

矩阵的概念 矩阵的线性运算 矩阵的乘法 方阵的幂 方阵乘积的行列式 矩阵的转置 逆矩阵的概念和性质 矩阵可逆的充分必要条件 伴随矩阵 矩阵的初等变换 初等矩阵 矩阵的秩 矩阵的等价 分块矩阵及其运算

考试要求

1. 理解矩阵的概念.了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵的定义及性质.了解对称矩阵、反对称矩阵及正交矩阵等的定义和性质.

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律,了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.

3. 理解逆矩阵的概念.掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件,理解伴随矩阵的概念,会用伴随矩阵求逆矩阵.

4. 了解矩阵的初等变换和初等矩阵及矩阵等价的概念,理解矩阵的秩的概念.掌握用初等变换求矩阵的逆矩阵和秩的方法.

5. 了解分块矩阵的概念,掌握分块矩阵的运算法则.

·考试内容解析·

(一) 矩阵的概念

1. 矩阵的定义