$$=(-\lambda)(-\lambda)^9-10^{10}=\lambda^{10}-10^{10}.$$

例 2.1.9 已知实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$满足条件：

(1) $a_{ij}=A_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$，其中 A_{ij}是a_{ij}的代数余子式；

(2) $a_{11}\neq0$.

计算行列式$|A|$.

［提示］ 本题主要考查行列式按行(列)展开定理和代数余子式的概念．由 $a_{ij}=A_{ij}$，知 $A^*=A^T$．由行列式按行(列)展开定理，$AA^*=|A|E$，两边取行列式，就可求出$|A|$.

［解］ 因为 $a_{ij}=A_{ij}$，所以

$$A^*=A^T.$$

又由于

$$AA^*=|A|E,$$

于是

$$AA^T=|A|E.$$

两边同时取行列式，得

$$|A|^2=|A|^3,$$

从而

$$|A|=1\text{ 或 }|A|=0.$$

由 $a_{11}\neq0$ 可知

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq0,$$

所以

$$|A|=1.$$

［典型错误］

① 没有排除$|A|=0$的情况.

② 没有掌握好行列式按行(列)展开定理，导致无法下手解答.

二、矩阵

·考试内容与要求·

考试内容

矩阵的概念 矩阵的线性运算 矩阵的乘法 方阵的幂 方阵乘积的行列式 矩阵的转置 逆矩阵的概念和性质 矩阵可逆的充分必要条件 伴随矩阵 矩阵的初等变换 初等矩阵 矩阵的秩 矩阵的等价 分块矩阵及其运算

考试要求

1．理解矩阵的概念．了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵的定义及性质．了解对称矩阵、反对称矩阵及正交矩阵等的定义和性质.

2．掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.

3．理解逆矩阵的概念．掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵.

4．了解矩阵的初等变换和初等矩阵及矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念．掌握用初等变换求矩阵的逆矩阵和秩的方法.

5．了解分块矩阵的概念，掌握分块矩阵的运算法则.

·考试内容解析·

(一) 矩阵的概念

1．矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 a_{ij} （$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$）排成的 m 行 n 列的表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵，记作 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $A_{m\times n}$，简记为 A．数 a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素．

如果矩阵所有的元素 a_{ij} （$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$）均为零，则称为零矩阵．记作 $O_{m\times n}$，简记为 O．

如果矩阵 A 的行、列数相等，即 $m=n$，则称 A 为 n 阶矩阵或 n 阶方阵．

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$、$B=(b_{ij})_{s\times t}$，如果 $m=s$，$n=t$，则称矩阵 A 与 B 是同型矩阵．

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$．如果对应元素均相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ （$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$），则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A=B$．

2．几类特殊矩阵

（1）单位矩阵

主对角线上元素均为 1，其余元素均为零的 n 阶矩阵，称为 n 阶单位矩阵，记作 E_n，简记为 E．

（2）对角矩阵

除主对角线上的元素之外，其余元素均为零的 n 阶矩阵，称为 n 阶对角矩阵．

（3）数量矩阵

主对角线上的元素均是常数 k．其余元素均是零的 n 阶矩阵．称为 n 阶数量矩阵，记作 kE_n．

（4）三角矩阵

主对角线以下元素全为零的 n 阶矩阵，称为 n 阶上三角矩阵；主对角线以上元素全为零的 n 阶矩阵，称为 n 阶下三角矩阵．上、下三角矩阵统称为三角矩阵．

（5）对称矩阵与反对称矩阵

如果在 n 阶矩阵 A 中，对任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$，均有 $a_{ij}=a_{ji}$，即 $A=A^{T}$．则称 A 为对称矩阵．如果对任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$，均有 $a_{ij}=-a_{ji}$，即 $A=-A^{T}$，则称 A 为反对称矩阵．

3．正交矩阵及其性质

（1）正交矩阵

如果 n 阶矩阵 A 满足条件 $AA^{T}=A^{T}A=E$，则称 A 是正交矩阵．

（2）正交矩阵的性质

① 正交矩阵 A 可逆．并且 $A^{-1}=A^{T}$．

② 正交矩阵 A 的行列式之值为 1 或 -1，即 $|A|=1$ 或 -1．

③ 如果 A、B 均是 n 阶正交矩阵，则 AB 也是 n 阶正交矩阵．

④ 正交矩阵 A 的行(列)向量组均为单位正交向量组．

（二）矩阵运算及其性质

1．矩阵的线性运算

（1）矩阵的加法

设同型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$．则矩阵

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

称为矩阵 A 与 B 的和．记作 $C=A+B$．

（2）矩阵的数乘

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，k 是一个数，则矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 称为数 k 与矩阵 A 的乘积，简称为数乘．记作 kA．

（3）矩阵的线性运算的性质

矩阵的加法和数乘统称为矩阵的线性运算．设 A、B、C 是同型矩阵，O 是同型的零矩阵．k，l 是两个数．

① 交换律：$A+B=B+A$．

② 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$．

③ $A+O=O+A=A$.　　④ $A+(-A)=O$.

⑤ $k(A+B)=kA+kB$.　　⑥ $(k+l)A=kA+lA$.

⑦ $(kl)A=k(lA)$.　　⑧ $1\cdot A=A$.

2. 矩阵的乘法

(1) 矩阵的乘法

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$. 则矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$, 其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$. 称为矩阵 A 与 B 的乘积，记作 $C=AB$.

注 ① 矩阵乘法不满足交换律，即一般地，$AB\neq BA$.

② 当 $AB=O$ 时，推不出 $A=O$ 或 $B=O$.

(2) 矩阵乘法的性质

① 结合律：$(AB)C=A(BC)$.

② 分配律：$A(B+C)=AB+AC$, $(B+C)A=BA+CA$.

③ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

3. 矩阵的转置

(1) 矩阵的转置

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. 将 A 的行变为列所得到的 $n\times m$ 矩阵 $(a_{ji})_{n\times m}$ 称为 A 的转置矩阵，记作 A^{T}，即 $A^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$.

(2) 矩阵转置的性质

① $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$.　　② $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$.

③ $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$.　　④ $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

4. 矩阵的幂

(1) 矩阵的幂

设 A 为 n 阶矩阵，k 个 A 相乘称为矩阵 A 的 k 次幂，记作 A^k，即 $A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot\cdots\cdot A}_{k个}$.

(2) 矩阵的幂的性质

① $A^kA^l=A^{k+l}$.　　② $(A^k)^l=A^{kl}$.

5. 方阵的行列式

(1) 方阵的行列式

设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 称为方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

(2) n 阶方阵的行列式的性质

① $|AB|=|A||B|$.　　② $|kA|=k^n|A|$.

(三) 逆矩阵及伴随矩阵

1. 逆矩阵

设 A 是 n 阶矩阵．如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $AB=BA=E$，则称 A 是可逆矩阵．B 是 A 的逆矩阵，记作 $A^{-1}=B$.

2. 逆矩阵的性质

设 A，B 均为 n 阶可逆矩阵，逆矩阵的性质如下：

(1) $(A^{-1})^{-1}=A$.　　(2) $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$（常数 $k\neq 0$）.

(3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.　　(4) $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(5) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.

3. 矩阵可逆的充分必要条件

(1) n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是存在 n 阶矩阵 B，使得 $AB=E$ 或 $BA=E$.

(2) n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 为非奇异矩阵，即 $|A|\neq 0$，并且当 A 可逆时，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

4. 伴随矩阵

(1) 伴随矩阵

设 A 是 n 阶方阵，由行列式 $|A|$ 的各元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 构成的 n 阶矩阵

$$A^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 的伴随矩阵.

(2) 伴随矩阵的常用性质

① $AA^*=A^*A=|A|E$.

② $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*=\frac{1}{|A|}A$（$A$ 为可逆矩阵）.

③ $(kA)^*=k^{n-1}A^*$.

④ $|A^*|=|A|^{n-1}$.

⑤ $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

⑥ $(AB)^*=B^*A^*$.

(四) 矩阵的初等变换与初等矩阵

1. 矩阵的初等变换

对矩阵施行下述三种变换：

(1) 交换矩阵的两行(列).

(2) 用一个非零常数 k 去乘矩阵的某一行(列).

(3) 矩阵某一行(列)的 k 倍加到另一行(列).

这三种变换称为矩阵的初等行(列)变换，统称为矩阵的初等变换.

2. 初等矩阵

单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵，称为初等矩阵. 对应于三种初等变换的三种初等矩阵分别记作 $E(i,j)$，$E[i(k)]$、$E[i,j(k)]$.

3. 矩阵的初等变换和初等矩阵的关系

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，对 A 施行一次初等行变换得到的矩阵，等于用同种初等矩阵左乘 A；对 A 施行一次初等列变换得到的矩阵，等于用同种初等矩阵右乘 A.

4. 矩阵的等价

矩阵 A 经过一系列初等变换得到矩阵 B，则称矩阵 A 与 B 等价. 矩阵之间的等价关系，有以下性质：

(1) 反身性：A 与 A 等价.

(2) 对称性：若 A 与 B 等价，则 B 与 A 等价.

(3) 传递性：若 A 与 B 等价，B 与 C 等价，则 A 与 C 等价.

5. 用初等变换求逆矩阵

为求 n 阶可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}，构造 $n\times 2n$ 矩阵 (A,E)，对 (A,E) 连续施行初等行变换，当 A 变成单位矩阵 E 时，E 就变成 A^{-1}，即

$$(A,E)\rightarrow(E,A^{-1}).$$

(五) 矩阵的秩

1. 矩阵的秩

如果矩阵 A 不为零的子式的最高阶数为 r，即存在 r 阶子式不为零，任意 $r+1$ 阶子式均为零，则称矩阵 A 的秩为 r，记作 $r(A)=r$.

2. 矩阵的秩的简单性质

(1) 初等变换不改变矩阵的秩.

(2) $r(A^{\mathrm{T}})=r(A)$.

(3) 当 $k\neq0$ 时，$r(kA)=r(A)$.

(4) 如果矩阵 A 可逆，则 $r(AB)=r(B),r(BA)=r(B)$.

(5) 如果矩阵 A 的秩为 r，即 $r(A)=r$，则 A 与 $\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$ 等价，其中 $\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$ 称为矩阵 A 的等价标准形.

(6) $r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$.

(7) $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$.

(六) 分块矩阵

1. 分块矩阵

将矩阵 A 用横线和纵线分成若干子块，以子块为元素的矩阵，称为分块矩阵.

2. 分块矩阵的运算法则与计算公式

(1) 分块矩阵的运算法则

分块矩阵以子块为元素进行运算，要求所分子块的行数与列数满足运算的有关法则，使运算能够进行.

(2) 分块矩阵的计算公式

① 如果 A_1、A_2 分别是 m 阶，n 阶可逆矩阵，则

$$\begin{bmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & A_2^{-1}\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}O & A_1\\ A_2 & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & A_2^{-1}\\ A_1^{-1} & O\end{bmatrix}.$$

② 设分块矩阵 $D=\begin{bmatrix}A_1 & C\\ B & A_2\end{bmatrix}$，则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A_1^{\mathrm{T}} & B^{\mathrm{T}}\\ C^{\mathrm{T}} & A_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}.$$

③ 如果 A_1、A_2 分别是 m 阶，n 阶矩阵，则

$$\begin{vmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{vmatrix}=|A_1||A_2|,$$

$$\begin{vmatrix}A_1 & O\\ B & A_2\end{vmatrix}=|A_1||A_2|.$$

·例 题 详 解·

例 2.2.1 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，而 $n\geqslant2$ 为正整数，则 $A^n-2A^{n-1}=$________.

[答案] O.

[提示] 本题主要考查矩阵高次幂的计算. 通常要先找出规律，再化简计算.

[解] 由

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}=2A,$$

可知 $$A^n = A^2A^{n-2} = 2AA^{n-2} = 2A^{n-1},$$
故 $$A^n - 2A^{n-1} = O.$$

例 2.2.2 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B = P^{-1}AP$. 其中 P 为 3 阶可逆矩阵，则 $B^{2\,004} - 2A^2 =$ ________.

[答案] $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

[提示] 本题主要考查矩阵的高次幂运算、数乘矩阵、矩阵的减法等基本运算法则. 先寻找规律，再简化计算.

[解] 由

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

知 $A^4 = E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵. 又 $B^4 = P^{-1}A^4P = E$. 故

$$B^{2\,004} - 2A^2 = (B^4)^{501} - 2A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[典型错误] 矩阵 B 是一个抽象的矩阵. 部分考生没有注意到 $B^4 = E$. 不知如何下手解题.

例 2.2.3 设 $a_i \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，且

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

则 $A^{-1} =$ ________.

[答案] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$.

[提示] 本题主要考查逆矩阵的求法. 这是一个 n 阶矩阵. 用初等变换求逆比较麻烦. 也容易出错. 把 A 看作是形如 $\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$ 的分块矩阵，再利用分块矩阵的计算公式，可求得 A^{-1}.

[解] 记 $A = \begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$，其中 $C = (a_n)$. $B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

由分块矩阵的计算公式，得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}.$$

[典型错误] 有的考生认为 $\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ C^{-1} & O \end{bmatrix}$，填 $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. 所以考生应掌握好分块矩阵的计算公式.

例 2.2.4 设 α 为 3 维列向量，α^T 是 α 的转置. 若 $\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\alpha^T\alpha=$ ________.

[答案] 3.

[提示] 本题主要考查矩阵的运算法则. 首先要搞清楚 $\alpha^T\alpha$ 是数还是矩阵.

[解] 设 $\alpha=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，则 $\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 \end{bmatrix}$. 由题设知 $x_1^2=x_2^2=x_3^2=1$. 故 $\alpha^T\alpha=x_1^2+x_2^2+x_3^2=3$. 应填 3.

[典型错误] $\alpha^T\alpha$ 是一个数，$\alpha\alpha^T$ 是一个 3 阶矩阵. 部分考生把 $\alpha^T\alpha$ 与 $\alpha\alpha^T$ 混淆，无法写出 $\alpha^T\alpha$.

例 2.2.5 设 n 维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T$，$a<0$，$E$ 是 n 阶单位矩阵.

$$A=E-\alpha\alpha^T,\ B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T,$$

其中 A 的逆矩阵为 B，则 $a=$ ________.

[答案] -1.

[提示] 本题主要考查矩阵的运算性质和逆矩阵等知识点. 由 $AB=E$，把 $A=E-\alpha\alpha^T$，$B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T$ 代入，再求 a.

[解] 由 A 的逆矩阵为 B，则 $AB=E$. 又

$$\begin{aligned} AB &=(E-\alpha\alpha^T)\left(E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T\right) \\ &=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T \\ &=E-\left(1-\frac{1}{a}\right)\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T, \end{aligned}$$

而 $\alpha^T\alpha=2a^2$. 所以 $AB=E-\left(1-\frac{1}{a}+2a\right)\alpha\alpha^T$. 由 $AB=E$ 可得 $\left(1-\frac{1}{a}+2a\right)\alpha\alpha^T=O$. 因矩阵 $\alpha\alpha^T\neq O$，必有

$$1-\frac{1}{a}+2a=0.$$

解得 $a=-1$ 和 $a=\frac{1}{2}$(舍去). 故填 -1.

[典型错误] 填 -1 或 $\frac{1}{2}$，原因是忽略了条件 $a<0$. 出现这样的错误是不应该的.

例 2.2.6 已知 $AB-B=A$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $A=$______.

[答案] $\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

[提示] 本题主要考查逆矩阵的计算和矩阵的乘法运算. 应先作符号运算，再将数字代入.

[解] 由 $AB-B=A$ 知 $A(B-E)=B$. 又 $|B-E|=\begin{vmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}\neq 0$，知 $B-E$ 可逆，所以 $A=B(B-E)^{-1}$. 而

$$(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

故

$$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

例 2.2.7 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$______.

[答案] 2.

[提示] 本题考查矩阵的运算及矩阵的行列式. 题中给出的矩阵方程需经恒等变形，得到 $B(A-E)=2E$，两边取行列式，或者求出 B 即可.

[解法 1] 由 $BA=B+2E$，可知

$$B(A-E)=2E.$$

两边取行列式，得

$$|B(A-E)|=|2E|,$$

即

$$|B|\cdot\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=4.$$

故 $|B|=2$.

[解法 2] 由 $BA=B+2E$，可知

$$B(A-E)=2E.$$

由于 $A-E=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ 可逆，所以 $B=2(A-E)^{-1}$. 而

$$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},$$

故

$$|B|=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2.$$

[典型错误]

① 填 1. 原因是认为 $|2E|=2$. 这是没有掌握好行列式的性质造成的.

② 填 8. 原因是由 $BA=B+2E$，推出 $B=2(A-E)$，而漏掉"逆"，属于粗心造成的.

例 2.2.8 设 3 阶方阵 A、B 满足 $A^2B-A-B=E$. 其中 E 为 3 阶单位矩阵，若 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，则 $|B|=$__________.

[答案] $\frac{1}{2}$.

[提示] 本题主要考查矩阵的基本运算，逆矩阵的求法以及行列式的基本运算. 做这类题目，应先作符号运算、化简，再将数字代入.

[解] 由 $A^2B-A-B=E$，得

$$(A^2-E)B=A+E,\ (A+E)(A-E)B=A+E,$$

而 $A+E=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-2&0&2\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，所以有 $(A-E)B=E$，

由此得

$$B=(A-E)^{-1}.$$

又

$$A-E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&0\end{pmatrix},$$

故

$$|A-E|=2,$$

因此

$$|B|=|(A-E)^{-1}|=|A-E|^{-1}=\frac{1}{2}.$$

[典型错误] 若先求出矩阵 B，再求 $|B|$，计算量较大，不仅浪费时间，也容易出错.

例 2.2.9 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$，$B=A^2-3A+2E$，则 $B^{-1}=$__________.

[答案] $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}$.

[提示] 本题主要考查矩阵的运算法则以及逆矩阵的求法. 先求矩阵 B，再求 B^{-1}.

[解] 由于

$$\begin{aligned}B&=A^2-3A+2E=(A-2E)(A-E)\\&=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\2&2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&-1\\2&0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故
$$B^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

例 2.2.10 设 A，B 均为 3 阶矩阵，E 是 3 阶单位矩阵．已知 $AB=2A+B$，$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，则 $(A-E)^{-1}$ $=$ ______．

［答案］ $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$．

［提示］ 本题主要考查矩阵的运算法则以及逆矩阵的求法．先化简，再代人数字计算．

［解］ 由 $AB=2A+B$，得 $(AB-B)-(2A-2E)=2E$，即
$$(A-E)(B-2E)=2E,$$
所以
$$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(B-2E)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

［典型错误］ 若先求矩阵 A 与 $A-E$ 之后，再求 $(A-E)^{-1}$，计算量较大，易出错．

例 2.2.11 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$，$E$ 为 4 阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(E+B)^{-1}$ $=$ ________．

［答案］ $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}$．

［提示］ 本题主要考查矩阵的运算及逆矩阵的概念．先进行符号推导，再代人数字．

［解］ 因为
$$\begin{aligned}B+E&=(E+A)^{-1}(E-A)+E\\&=(E+A)^{-1}(E-A+E+A)\\&=2(E+A)^{-1},\end{aligned}$$
所以
$$\begin{aligned}(E+B)^{-1}&=\frac{1}{2}(E+A)\\&=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

［典型错误］ 部分考生不会化简，先求 B，再求 $(E+B)^{-1}$，常出现错误．注意到，在矩阵的化简中，常会用到矩阵的恒等变形，本题条件 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$，提示将 $E+B$ 中的 E 变形为 $E=(E+A)^{-1}(E+A)$．

例 2.2.12 设矩阵 A，B 满足 $A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$E$ 为单位矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $B=$ ________．

[答案] $\begin{pmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{pmatrix}$.

[提示] 本题主要考查矩阵 A 与其伴随矩阵 A^* 之间的关系以及逆矩阵的求法. 这是一个矩阵方程求解问题. 先化简，再代人数字. 对 $A^*BA=2BA-8E$ 两边同时左乘 A，右乘 A^{-1}，得 $|A|B=2AB-8E$，故 B 可以求得.

[解] 对 $A^*BA=2BA-8E$ 两边分别左乘 A，右乘 A^{-1}. 利用 $AA^*=|A|E$ 及 $AA^{-1}=E$ 得 $|A|B=2AB-8E$，因此，$B=8(2A-|A|E)^{-1}$. 而

$$2A-|A|E=\begin{pmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&&\\&-2&\\&&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&&\\&-2&\\&&4\end{pmatrix},$$

故

$$B=8\begin{pmatrix}4&&\\&-2&\\&&4\end{pmatrix}^{-1}=8\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&&\\&-\frac{1}{2}&\\&&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{pmatrix}.$$

例 2.2.13 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵. 则 $|B|=$__________.

[答案] $\frac{1}{9}$.

[提示] 本题主要考查矩阵的运算法则，矩阵与其伴随矩阵的关系，行列式的计算等. 本题求的是未知矩阵 B 的行列式. 所以不必求出 B 而利用矩阵的行列式的性质，直接得到结果.

[解] 由原等式得

$$(A-2E)BA^*=E,$$

两边取行列式. 有

$$|A-2E|\cdot|B|\cdot|A^*|=1.$$

因为 $|A|=3$. 所以 $|A^*|=|A|^{3-1}=9$. 又

$$|A-2E|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1,$$

所以 $|B|=\frac{1}{9}$.

[典型错误] 有的考生填 1，估计是在求 $|A^*|$ 时出现如下错误：由 $A^*A=|A|E$，得 $|A^*||A|=|A|$，故 $|A^*|=1$. 导致填 1.

例 2.2.14 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记 3 阶矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3).$$

如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$__________.

[答案] 2.

[提示] 本题主要考查矩阵的运算及行列式的性质. 可先将矩阵 B 用 A 表示，再求 $|B|$；也可利用行列

式的性质求解.

[解法 1] 由

$$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},$$

知

$$\begin{aligned}|B|&=|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}\\&=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&3&8\end{vmatrix}\\&=2.\end{aligned}$$

[解法 2] 由行列式的性质，有

$$\begin{aligned}|B|&=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3\quad\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|\\&=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_2+3\alpha_3\quad\alpha_2+5\alpha_3|\\&=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\quad\alpha_2+3\alpha_3\quad 2\alpha_3|\\&=|\alpha_1+\alpha_2\quad\alpha_2\quad 2\alpha_3|\\&=|\alpha_1\quad\alpha_2\quad 2\alpha_3|\\&=2|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3|\\&=2.\end{aligned}$$

例 2.2.15 已知 α_1、α_2 为 2 维列向量，矩阵 $A=(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2)$. 若行列式 $|A|=6$，则 $|B|=$ ________.

[答案] -2.

[提示] 本题考查行列式的计算或矩阵的运算，用行列式的性质求 $|B|$，也可用矩阵方法求 $|B|$.

[解法 1] 利用行列式的性质计算.

$$\begin{aligned}|A|&=|2\alpha_1+\alpha_2\quad\alpha_1-\alpha_2|\\&\xlongequal{\text{第一列-第二列的2倍}}|3\alpha_2\quad\alpha_1-\alpha_2|\\&\xlongequal{\text{第一列提公因子3}}3|\alpha_2\quad\alpha_1-\alpha_2|\\&\xlongequal{\text{第二列+第一列}}3|\alpha_2\quad\alpha_1|\\&\xlongequal{\text{交换第一、二列}}-3|\alpha_1\quad\alpha_2|\\&=-3|B|.\end{aligned}$$

由 $|A|=6$，得 $|B|=-2$.

[解法 2] 利用矩阵方法计算.

因为

$$\begin{aligned}A&=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\\&=B\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以

$$|A|=|B|\begin{vmatrix}2&1\\1&-1\end{vmatrix}=-3|B|.$$

由 $|A|=6$，知 $|B|=-2$.

[典型错误]　填 2. 其原因是没有掌握好行列式的性质，错误地认为

$$|A|=3|\alpha_2\quad\alpha_1|=3|\alpha_1\quad\alpha_2|=3|B|.$$

这说明考生需要在基本功上多下工夫.

例 2.2.16　设 A，B 均为 n 阶矩阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则 $|2A^*B^{-1}|=$ ________.

[答案]　$-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$.

[提示]　本题主要考查矩阵 A 与 A^* 之间的关系及行列式的性质. 由 $|2A^*B^{-1}|=2^n|A^*||B^{-1}|=-\dfrac{2^n}{3}|A^*|$，只需求 $|A^*|$ 即可.

[解]　由于 $A^*=|A|A^{-1}$，故

$$|2A^*B^{-1}|=\left|2\cdot|A|\cdot A^{-1}B^{-1}\right|=|4A^{-1}B^{-1}|$$

$$=4^n\frac{1}{|A|}\cdot\frac{1}{|B|}=-\frac{2^{2n-1}}{3}.$$

[典型错误]　填 $-\dfrac{2}{3}$. 估计错误如下：$|4A^{-1}B^{-1}|=4\dfrac{1}{|A|}\cdot\dfrac{1}{|B|}=-\dfrac{2}{3}$.

例 2.2.17　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix},$$

且 $r(A)=3$，则 $k=$ ________.

[答案]　-3.

[提示]　本题主要考查方阵的秩与行列式的关系，即 n 阶方阵 A 的秩小于 n 当且仅当 $|A|=0$. 先求满足 $|A|=0$ 的 k. 然后再计算 A 的秩是否为 3.

[解]　因 $r(A)=3$，故 $|A|=0$，可解得 $k=-3$ 和 $k=1$.

当 $k=1$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$r(A)=1$，故 $k=-3$.

[典型错误]　没有排除 $k=1$ 的情况，填 -3 或 1.

例 2.2.18　设 A，B，C 均为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 $B=E+AB$，$C=A+CA$，则 $B-C$ 为(　　).

(A) E　　(B) $-E$　　(C) A　　(D) $-A$

[答案]　(A).

[提示]　本题主要考查矩阵的基本运算及逆矩阵的定义.

[解]　由 $B=E+AB$，得 $(E-A)B=E$，从而 $(E-A)^{-1}=B$. 又 $C=A+CA$，有 $C(E-A)=A$，故 $C=AB$. 于是 $B-C=B-AB=E$，故应选(A).

例 2.2.19　设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^*=A^{\mathrm T}$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，$A^{\mathrm T}$ 为 A 的转置矩阵. 若 a_{11}，a_{12}，a_{13} 为 3 个相等的正数，则 a_{11} 为(　　).

(A) $\dfrac{\sqrt3}{3}$　　(B) 3　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\sqrt3$

[答案]　(A).

[提示]　本题主要考查矩阵与其伴随矩阵之间的关系、矩阵的乘法运算法则.

[解]　由矩阵 A 与 A^* 之间的关系，有 $AA^*=A^*A=|A|E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵. 由题设 $A^*=$

A^{T}，得 $AA^{T}=A^{T}A=|A|E$. 两边取行列式有 $|A|^{2}=|A|^{3}$，从而 $|A|=0$ 或 1. 又由题设 $a_{11}=a_{12}=a_{13}>0$，位于矩阵 $|A|E$ 的第一行第一列的元素为 $a_{11}^{2}+a_{12}^{2}+a_{13}^{2}=3a_{11}^{2}\neq0$. 从而 $|A|\neq0$，即 $|A|=1$. 于是 $AA^{T}=A^{T}A=E$，故 $3a_{11}^{2}=1$，即 $a_{11}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，应选(A).

例 2.2.20 设 A 是任一 n ($n\geqslant3$)阶方阵，A^{*} 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k\neq0,\pm1$，则必有 $(kA)^{*}=($ $)$.

(A) kA^{*} (B) $k^{n-1}A^{*}$ (C) $k^{n}A^{*}$ (D) $k^{-1}A^{*}$

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查数与矩阵的乘法及伴随矩阵的概念.

[解] 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其元素 a_{ij} 的代数余子式记作 A_{ij}，则矩阵 $kA=(ka_{ij})_{n\times n}$. 若其元素 ka_{ij} 的代数余子式记作 Δ_{ij} ($i,j=1,2,\cdots,n$)，则由行列式性质.

$$\Delta_{ij}=k^{n-1}A_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,n\ ,$$

再由伴随矩阵的定义知 $(kA)^{*}=k^{n-1}A^{*}$. 故(B)项正确.

[典型错误] 有的考生认为 $(kA)^{*}=kA^{*}$，选(A).

例 2.2.21 设 A 是 3 阶方阵. 将 A 的第一列与第二列交换得 B. 再把 B 的第二列加到第三列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为( ).

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查矩阵的初等变换与初等矩阵之间的关系. 对矩阵施行一次初等列变换，相当于用同类的初等矩阵右乘矩阵 A. 利用此性质可知题中的矩阵 Q 即为两个初等矩阵的乘积.

[解] 由提示知，$Q=E_1E_2$，其中

$$E_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

故

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

即选项(D)正确.

[典型错误] 有的考生认为 $Q=E_2E_1$，选(B).

例 2.2.22 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix},\ P_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

其中 A 可逆，则 B^{-1} 等于( ).

(A) $A^{-1}P_1P_2$ (B) $P_1A^{-1}P_2$ (C) $P_1P_2A^{-1}$ (D) $P_2A^{-1}P_1$

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查初等矩阵与矩阵的初等变换之间的关系. 由观察可知，$B=AP_2P_1$，两边取逆可得 B^{-1}.

[解] 通过观察，矩阵 B 是通过交换矩阵 A 的第二、第三列和交换第一、第四列后得到的，即

$$B=AP_2P_1,$$

于是 $B^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}$. 又 $P_2^{-1}=P_2$，$P_1^{-1}=P_1$，故

$$B^{-1}=P_1P_2A^{-1}.$$

［典型错误］

① 有的考生认为对B进行初等列变换相当于左乘相应的初等矩阵，导致选(A).

② 有的考生不知道$P_1^{-1}=P_1$，$P_2^{-1}=P_2$，导致无法答题.

例 2.2.23 设A为3阶矩阵，将A的第二行加到第一行得B，再将B的第一列的-1倍加到第二列得C，记$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则(　　).

(A) $C=P^{-1}AP$　　(B) $C=PAP^{-1}$　　(C) $C=P^{T}AP$　　(D) $C=PAP^{T}$

［答案］ (B).

［提示］ 本题考查初等矩阵与初等变换之间的关系．左乘初等矩阵相当于施行相应的初等行变换，右乘初等矩阵相当于施行相应的初等列变换.

［解］ 因

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

所以

$$P^{T}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

将矩阵A的第二行加到第一行，相当于用P左乘A，即$B=PA$．将矩阵B的第一列的-1倍加到第二列，相当于用P^{-1}右乘B，即$C=BP^{-1}$．故$C=PAP^{-1}$，即(B)为正确的选项.

［典型错误］

① 部分考生选(D)．原因是认为题目是对矩阵A作合同变换，审题不仔细.

② 有的考生选(A)．原因是认为“对矩阵施行初等行(列)变换相当于右(左)乘相应的初等矩阵”.

例 2.2.24 设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，则(　　).

(A) 当$m>n$时，必有行列式$|AB|\neq0$

(B) 当$m>n$时，必有行列式$|AB|=0$

(C) 当$n>m$时，必有行列式$|AB|\neq0$

(D) 当$n>m$时，必有行列式$|AB|=0$

［答案］ (B).

［提示］ 本题主要考查矩阵乘积的秩与因子的秩的关系，同时也考查方阵的秩与行列式之间的关系．由各选项可见，主要区分行列式不为零与为零的两种情形．而题中并未给出A与B的具体形式，所以无法用计算来回答．方阵的行列式不为零(或为零)等价于该方阵满秩(或不满秩)．故用秩的办法来讨论.

［解］ 因AB为m阶方阵，所以

$$r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}\leqslant\min\{m,n\}.$$

当$m>n$时，由上式有$r(AB)\leqslant n<m$，即AB不是满秩的，所以$|AB|=0$．故选(B).

例 2.2.25 设n阶矩阵A与B等价，则必有(　　).

(A) 当$|A|=a\ (a\neq0)$时，$|B|=a$　　(B) 当$|A|=a\ (a\neq0)$时，$|B|=-a$

(C) 当$|A|\neq0$时，$|B|=0$　　(D) 当$|A|=0$时，$|B|=0$

［答案］ (D).

［提示］ 本题主要考查考生对矩阵等价概念的掌握程度，而且还考查考生是否清楚n阶矩阵的秩与行列式的关系.

［解法1］ 矩阵A与B等价，由矩阵等价的定义，存在可逆矩阵P和Q使得$A=PBQ$，两边取行列式，

得$|A|=|P|\cdot|B|\cdot|Q|$. 由矩阵 P 和 Q 可逆，有$|P|\cdot|Q|\neq 0$，所以当$|A|=0$时，$|B|=0$，即选(D).

[解法 2] 本题也可根据矩阵 A 与 B 等价当且仅当$r(A)=r(B)$这一结论来考虑：当$|A|=0$时，$r(A)<n$，故$r(B)<n$，即$|B|=0$，所以选(D)；还可以用排除法．由于 $2E$ 与 E 等价，于是(A)、(B)、(C)不正确，即选(D).

[典型错误] 把矩阵等价与相似的概念混淆，导致选(A).

例 2.2.26 设 3 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. 若 A 的伴随矩阵 A^* 的秩等于 1，则必有(　　).

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查考生是否理解、掌握矩阵秩的概念及矩阵 A 与其伴随矩阵之间的关系．由$r(A^*)=1$，知$r(A)=2$．故先求满足$|A|=0$的 a 与 b 的关系，然后再验证 A 的秩是否为 2 即可.

[解] 因$r(A^*)=1$，所以 A^* 不可逆，A 也不可逆，且 A 中至少有一个 2 阶子式不等于零．于是

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=(a-b)^2(a+2b)=0,$$

所以 $a=b$ 或 $a+2b=0$．若 $a=b$，则 $r(A)=1$，$r(A^*)=0$，不合题意．故 $a\neq b$，且 $a+2b=0$.

[典型错误] 有的考生没有排除 $a=b$ 的情形，从而选(A).

例 2.2.27 设 n ($n\geqslant 3$)阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，如果矩阵 A 的秩为 $n-1$，则 a 必为(　　).

(A) 1　　(B) $\frac{1}{1-n}$　　(C) -1　　(D) $\frac{1}{n-1}$

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查矩阵秩的概念，同时也考查行列式的计算技巧．由 $r(A)=n-1$，知$|A|=0$．所以首先计算$|A|$，然后把四个选项代入验证.

[解] 由

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=[1+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & 1 & a & \cdots & a \\ 1 & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=[1+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\1 & 1-a & 0 & \cdots & 0\\1 & 0 & 1-a & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\1 & 0 & 0 & \cdots & 1-a\end{vmatrix}$$
$$=[1+(n-1)a](1-a)^{n-1},$$

可知当 $a=1$ 或$\frac{1}{1-n}$时，$|A|=0$. 而当 $a=1$ 时，矩阵 A 的秩为 1，故应选(B).

[典型错误] 有的考生由$[1+(n-1)a](1-a)^{n-1}=0$，得 $a=1$，而丢掉了 $a=\frac{1}{1-n}$这一值，导致选(A).

例 2.2.28 设 A，B 为 n 阶矩阵，A^*，B^*分别为 A，B 对应的伴随矩阵. 分块矩阵 $C=\begin{pmatrix}A & O\\O & B\end{pmatrix}$，则 C 的伴随矩阵 $C^*=(\quad)$.

(A) $\begin{pmatrix}|A|A^* & O\\O & |B|B^*\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}|B|B^* & O\\O & |A|A^*\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}|A|B^* & O\\O & |B|A^*\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}|B|A^* & O\\O & |A|B^*\end{pmatrix}$

[答案] (D).

[提示] 本题主要考査分块矩阵的性质与运算以及关系式 $AA^*=|A|E$. 验证所给的四个选项，找到满足条件 $CC^*=|C|E$ 的C^*. 并需注意 $AA^*=|A|E$，$BB^*=|B|E$，$|C|=|A|\cdot|B|$. 通过验算. 只有(D)符合条件.

[解] 由于

$$\begin{pmatrix}A & O\\O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|B|A^* & O\\O & |A|B^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|B|AA^* & O\\O & |A|BB^*\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}|B|\cdot|A|E & O\\O & |A|\cdot|B|E\end{pmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}A & O\\O & B\end{vmatrix}\begin{pmatrix}E & O\\O & E\end{pmatrix},$$

故
$$C^*=\begin{pmatrix}|B|A^* & O\\O & |A|B^*\end{pmatrix}.$$

[典型错误] 因不清楚分块矩阵的运算或没有掌握好等式 $AA^*=|A|E$，导致无从下手.

例 2.2.29 设$(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm T}=C^{-1}$，其中 E 是 4 阶单位矩阵，$A^{\mathrm T}$ 是 4 阶矩阵 A 的转置矩阵，且

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & -2\\0 & 1 & 2 & -3\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

求 A.

[提示] 本题主要考查矩阵的运算法则和逆矩阵的概念与求法. 这是一个矩阵方程求解问题，应先化简，求出矩阵 A 的表达式，再代入矩阵 B，C 求解.

[解] 对$(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm T}=C^{-1}$两边同时左乘 C，得

$$(2C-B)A^{\mathrm T}=E.$$

两边取转置，得$A(2C-B)^{\mathrm T}=E$，故$(2C-B)^{\mathrm T}$可逆，即

$$A=[(2C-B)^{\mathrm{T}}]^{-1}.$$

将 B、C 代入上式，得

$$A=[(2C-B)^{\mathrm{T}}]^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

［典型错误］ 直接把 $B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$代入等式$(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}$，然后求 A，导致计算量加大，容易出现计算错误，也浪费时间.

例 2.2.30 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+E$，其中 E 是 3 阶单位矩阵. 求 X.

［提示］ 本题主要考查逆矩阵的概念与计算以及矩阵的运算. 先把给定的等式化简，再代入数字求解.

［解］ 由题设的关系式得

$$AX(A-B)+BX(B-A)=E,$$

即

$$(A-B)X(A-B)=E.$$

所以矩阵 $A-B$ 可逆. 而

$$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

故

$$X=[(A-B)^{-1}]^2=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

［典型错误］ 部分考生不会化简已知的矩阵方程，导致无从下手解题. 而不同的矩阵方程，化简方法也不同. 一般常用分配律，用矩阵左乘或右乘等式两端.

例 2.2.31 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，求 X.

［提示］ 本题主要考查矩阵 A 与其伴随矩阵 A^* 之间的关系，逆矩阵的概念及求法，行列式的计算. 这是一个矩阵方程求解问题. 方程 $A^*X=A^{-1}+2X$ 中有 A^* 和 A^{-1}，若直接由 A 计算会相当麻烦，一定要利用矩阵性质进行化简. 最重要的公式是 $AA^*=|A|E$.

［解］ 由 $A^*X=A^{-1}+2X$，得$(A^*-2E)X=A^{-1}$，其中 E 是 3 阶单位矩阵，用矩阵 A 左乘等式两端，得

$$(|A|E-2A)X=E.$$

可见 $|A|E-2A$ 可逆，从而

$$X=(|A|E-2A)^{-1}.$$

由于

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4,$$

$$|A|E-2A=2\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

故

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

[典型错误]

① 有的考生先求出 A^* 与 A^{-1}，再求矩阵 X，计算相当麻烦，常常会导致错误.

② 有的考生求 $|A|$ 也要出错.

③ 有的考生求 $(|A|E-2A)^{-1}$ 时出错.

所以我们建议考生一定要先打好基础，并掌握好各种题型的基本解法．这样才会取得满意的成绩.

例 2.2.32 已知 3 阶矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，试求其伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

[提示] 本题主要考查矩阵与其伴随矩阵之间的关系．由 $AA^*=|A|E$，知 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$，再求出 A 代入即可.

[解] 由 A 可逆知，$A^*=|A|A^{-1}$，即 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=|A^{-1}|A$，

其中
$$|A^{-1}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=2.$$

下面用初等行变换求 $A=(A^{-1})^{-1}$．因为

$$(A^{-1}\vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right)$$
$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&2&-1&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$
$$=(E\vdots A)$$

所以
$$A=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

故
$$(A^*)^{-1}=2\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

[典型错误] 有的考生先求 A，再求 A^*，最后求得 $(A^*)^{-1}$．因计算量大而导致错误.

例 2.2.33 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,

且
$$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E.$$
其中 E 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 B.

[提示] 本题主要考查矩阵的运算法则，矩阵与其伴随矩阵之间的关系. 为求矩阵 B，运用矩阵运算法则，化 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ 为 $B = 3\left(E - \frac{A^*}{|A|}\right)^{-1}$. 因此，只要求出 $|A|$ 及 $\left(E - \frac{A^*}{|A|}\right)^{-1}$ 即可.

[解] 由 $|A^*| = |A|^{n-1}$，有 $|A|^3 = 8$，得 $|A| = 2$. 又 $(A-E)BA^{-1} = 3E$，有 $(A-E)B = 3A$，从而 $A^{-1}(A-E)B = 3E$，由此得 $(E - A^{-1})B = 3E$，即 $\left(E - \frac{A^*}{|A|}\right)B = 3E$. 亦即 $(2E - A^*)B = 6E$. 又 $2E - A^*$ 为可逆矩阵. 于是
$$B = 6(2E - A^*)^{-1}.$$

由
$$2E - A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$
有
$$(2E - A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix},$$
故
$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[典型错误]

① 由矩阵 A^* 求得 A，再把 A 代入等式 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$，无法求出矩阵 B.

② 因无法求 $|A|$ 而半途而废.

例 2.2.34 设 A 是 n 阶可逆矩阵，将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 B.

(Ⅰ) 证明 B 可逆；

(Ⅱ) 求 AB^{-1}.

[提示] 本题主要考查可逆矩阵的判定及初等矩阵与初等变换的关系. 记 E_{ij} 表示单位矩阵交换 i 行与 j 行所得到的初等矩阵，则 A 的第 i 行和第 j 行对换后的矩阵 $B = E_{ij}A$，因为是进行行变换，所以 E_{ij} 应左乘 A，写出 B 和 A 的关系. 根据行列式的有关性质以及矩阵可逆的判定方法即可答题.

[解] (Ⅰ) 因 $|A| \neq 0$ 及 $|B| = -|A| \neq 0$，故 B 可逆.

(Ⅱ) 记 E_{ij} 是由 n 阶单位矩阵的第 i 行和第 j 行对换后所得到的初等矩阵，则 $B = E_{ij}A$. 因而
$$AB^{-1} = A(E_{ij}A)^{-1} = AA^{-1}E_{ij}^{-1} = E_{ij}^{-1} = E_{ij}.$$

[典型错误]

① 写不出初等矩阵 E_{ij}.

② 将 B 写成 $B = AE_{ij}$.

③ 不知道 $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

④ 认为 $|A| = \pm|B|$，而不知道 $|A| = -|B|$.

例 2.2.35 已知 A，B 为 3 阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4E$. 其中 E 是 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 证明：矩阵 $A-2E$ 可逆；

(Ⅱ) 若 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

[提示] 本题主要考查逆矩阵的概念，逆矩阵的求法与矩阵的运算. 遇到这类题. 应先作符号运算，再将数字代入.

[解] (Ⅰ) 等式 $2A^{-1}B=B-4E$ 两边左乘 A. 得

$$2B=AB-4A,$$

从而

$$(A-2E)(B-4E)=8E.$$

故 $A-2E$ 可逆，且 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E)$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知

$$A=2B(B-4E)^{-1},$$

而

$$(B-4E)^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

故

$$A=2\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\-\frac{1}{8}&-\frac{3}{8}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

例 2.2.36 已知对于 n 阶方阵 A，存在自然数 k，使 $A^k=O$. 试证明矩阵 $E-A$ 可逆，并写出其逆矩阵的表达式，其中 E 为 n 阶单位矩阵.

[提示] 本题主要考查矩阵的高次幂运算及逆矩阵的概念与求法. 只需找一个矩阵 $B=f(A)$(其中 $f(x)$ 是一个多项式函数)，使得 $(E-A)B=E$ 即可. 由于方阵之间的运算规律与数的运算规律相似，若 x 表示非零数. 则找 $f(x)$ 使得 $(1-x)f(x)=1-x^k$ 是很容易的，即 $f(x)=1+x+\cdots+x^{k-1}$. 把 $x=A$ 代入上述等式，即可解此题.

[证] 由 $A^k=O$. 可知

$$(E-A)(E+A+\cdots+A^{k-1})=E^k-A^k=E,$$

故矩阵 $E-A$ 可逆，且

$$(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}.$$

[典型错误] 因 A 是一个抽象的矩阵，多数考生无从下手. 所以考生不仅要注重计算能力的提高，也要加强逻辑推理能力的培养.

例 2.2.37 设 A 为 n 阶非奇异矩阵，α 为 n 维列向量. b 为常数，记分块矩阵

$$P=\begin{pmatrix}E&O\\-\alpha^{\mathrm{T}}A^*&|A|\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^{\mathrm{T}}&b\end{pmatrix},$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵.

(Ⅰ) 计算并化简 PQ；

(Ⅱ) 证明：矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha\neq b$.

［提示］ 本题主要考查矩阵乘法及矩阵乘积行列式等有关性质．较综合地考查了矩阵乘法运算、矩阵可逆等重要知识点．由于符号运算量大，也考查了考生的抽象思维能力．分块矩阵 P 和 Q 符合矩阵乘法的条件，在进行乘法运算的过程中要注意哪些是矩阵，哪些是向量，哪些是数．左乘还是右乘．在化简时要利用到矩阵、伴随矩阵、行列式间的重要关系式 $AA^* = A^*A = |A|E$．矩阵 Q 可逆的充要条件是 $|Q| \neq 0$，为此要用到（Ⅰ）的结果及矩阵乘积行列式的性质：

$$|PQ| = |P| \cdot |Q|.$$

［解］ （Ⅰ）因 $AA^* = A^*A = |A|E$，故

$$PQ = \begin{pmatrix} E & O \\ -\alpha^{\mathrm{T}}A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^{\mathrm{T}}A^*A + |A|\alpha^{\mathrm{T}} & -\alpha^{\mathrm{T}}A^*\alpha + b|A| \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & |A|(b - \alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha) \end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得

$$|PQ| = |A|^2(b - \alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha),$$

而 $|PQ| = |P| \cdot |Q|$，且 $|P| = |A| \neq 0$，故

$$|Q| = |A|(b - \alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha),$$

由此可知，$|Q| \neq 0$ 的充分必要条件为 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha \neq b$，即矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha \neq b$.

［典型错误］ 不少考生未能把 $-\alpha^{\mathrm{T}}A^*A + |A| \cdot \alpha^{\mathrm{T}}$ 化简为零向量，而这一步骤对于计算 $|PQ|$ 又至关重要.

三、向量

·考试内容与要求·

考试内容

向量的概念　向量的线性组合与线性表示　向量组的线性相关与线性无关　向量组的极大线性无关组　等价向量组　向量组的秩　向量组的秩与矩阵的秩之间的关系　向量的内积　线性无关向量组的正交规范化方法

考试要求

1．了解向量的概念．掌握向量的加法和数乘运算法则．

2．理解向量的线性组合与线性表示、向量组线性相关、线性无关等概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法．

3．理解向量组的极大线性无关组的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩．

4．理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行（列）向量组的秩之间的关系．

5．了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特（Schmidt）方法．

·考试内容解析·

（一）n 维向量

1．n 维向量的定义

由 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}} \text{ 或 } \alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为 n 维向量，其中 a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为向量的第 i 个分量．$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 称为 n 维列向量，$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为 n 维行向量．若一个向量的每一个分量均为实数，则称该向量为实向量．