[提示] 本题主要考查矩阵乘法及矩阵乘积行列式等有关性质．较综合地考查了矩阵乘法运算、矩阵可逆等重要知识点．由于符号运算量大，也考查了考生的抽象思维能力．分块矩阵 P 和 Q 符合矩阵乘法的条件，在进行乘法运算的过程中要注意哪些是矩阵，哪些是向量，哪些是数．左乘还是右乘．在化简时要利用到矩阵、伴随矩阵、行列式间的重要关系式 $AA^*=A^*A=|A|E$．矩阵 Q 可逆的充要条件是 $|Q|\neq 0$，为此要用到(Ⅰ)的结果及矩阵乘积行列式的性质：

$$|PQ|=|P|\cdot|Q|.$$

[解] (Ⅰ) 因 $AA^*=A^*A=|A|E$，故

$$\begin{aligned}PQ&=\begin{pmatrix}E & O\\ -\alpha^{T}A^* & |A|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & \alpha\\ \alpha^{T} & b\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}A & \alpha\\ -\alpha^{T}A^*A+|A|\alpha^{T} & -\alpha^{T}A^*\alpha+b|A|\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}A & \alpha\\ O & |A|(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)可得

$$|PQ|=|A|^2(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha),$$

而 $|PQ|=|P|\cdot|Q|$，且 $|P|=|A|\neq 0$，故

$$|Q|=|A|(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha),$$

由此可知，$|Q|\neq 0$ 的充分必要条件为 $\alpha^{T}A^{-1}\alpha\neq b$，即矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^{T}A^{-1}\alpha\neq b$.

[典型错误] 不少考生未能把 $-\alpha^{T}A^*A+|A|\cdot\alpha^{T}$ 化简为零向量，而这一步骤对于计算 $|PQ|$ 又至关重要.

三、向量

·考试内容与要求·

考试内容

向量的概念　向量的线性组合与线性表示　向量组的线性相关与线性无关　向量组的极大线性无关组　等价向量组　向量组的秩　向量组的秩与矩阵的秩之间的关系　向量的内积　线性无关向量组的正交规范化方法

考试要求

1. 了解向量的概念．掌握向量的加法和数乘运算法则.

2. 理解向量的线性组合与线性表示、向量组线性相关、线性无关等概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.

3. 理解向量组的极大线性无关组的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.

4. 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.

5. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法.

·考试内容解析·

(一) n 维向量

1. n 维向量的定义

由 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{T}\text{ 或 }\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

称为 **n 维向量**，其中 $a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 称为向量的第 i 个**分量**．$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{T}$ 称为 n 维**列向量**，$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为 n 维**行向量**．若一个向量的每一个分量均为实数，则称该向量为**实向量**.

注　向量可以看作矩阵的特例，n 维列向量可以看作 $n\times 1$ 矩阵，n 维行向量可以看作 $1\times n$ 矩阵.

2. 向量的线性运算

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}$ 是 n 维列向量，且 k 是一个数.

(1) 向量加法

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm T}.$$

(2) 数与向量乘法(数乘)

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^{\mathrm T}.$$

(3) 向量线性运算的运算性质

向量的加法和数乘运算，统称为向量的线性运算. 向量的线性运算满足以下运算性质.

① $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.　　② $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$.

③ $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$.　　④ $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

⑤ $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.　　⑥ $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

⑦ $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$.　　⑧ $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

3. 实向量的内积、长度和正交

(1) 向量的内积

n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm T}$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}$ 的内积

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

(2) 向量的长度

n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm T}$ 的长度

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}.$$

(3) 向量正交

如果列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 的内积等于零，即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}\boldsymbol{\beta}=0$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

注　行向量的线性运算、内积、长度和正交与列向量的情形类似.

(二) 向量组的线性相关性

1. 向量的线性组合与线性表示

(1) 定义

对 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，如果存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合，或者称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

(2) 判别

设有 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$.

① 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示的充分必要条件是，线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$ 有解，方程组的一组解，就是一组线性表示的系数.

② 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$.

2. 向量组的线性相关与线性无关

(1) 定义

对 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. 否则，当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时，才能使上面等式成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

注　由线性相关与线性无关的定义可知：

① 1 个零向量线性相关，1 个非零向量线性无关.

② 向量组 α_1，α_2 线性相关的充要条件是 α_1，α_2 的分量对应成比例.

(2) 性质

① n 个 n 维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关的充分必要条件是，这些列向量构成的矩阵的行列式 $|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n|=0$.

② 当 $m>n$ 时，任意 m 个 n 维向量必定线性相关.

③ 如果一个向量组的部分向量线性相关，则整个向量组线性相关；反之，如果一个向量组线性无关，则它的任意一个部分组也线性无关.

④ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ $(s\geqslant 2)$线性相关的充分必要条件是，其中至少有一个向量是其余 $s-1$ 个向量的线性组合.

⑤ 如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，但向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$ 线性相关，则向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，且表示法唯一.

⑥ 如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，且 $s>t$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关；反之，如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示，则 $s\leqslant t$.

⑦ 设 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则每个向量再添加 m 个分量所得到的 $n+m$ 维向量组 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_s'$也线性无关.

(3) 判别

① n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关(或无关)的充分必要条件是，齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 有非零解(或仅有零解).

② n 维列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关(或无关)的充分必要条件是，矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$的秩$r(A)<s$ (或 $=s$).

(三) 向量组的秩

1. 极大无关组

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个部分组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$满足条件：①线性无关；②向量组中的任一个向量均可由它线性表示，则称部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是此向量组的一个极大无关组.

注　向量组的极大无关组不唯一，但极大无关组所含向量个数唯一确定.

2. 向量组的秩

(1) 定义

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关组所含向量的个数，称为这个向量组的秩，记作$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

(2) 性质

如果向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，且 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=p$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$，则$p\leqslant r$.

3. 向量组等价

(1) 定义

设有两个向量组：(Ⅰ) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$；(Ⅱ) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$. 如果向量组(Ⅰ)的每个向量都可以由向量组(Ⅱ)线性表示，称向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示. 如果向量组(Ⅰ)和(Ⅱ)可以互相线性表示，则称向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

(2) 性质

① 反身性：$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$与$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$等价.

② 对称性：若$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$与$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$等价，则$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$与$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$等价.

③ 传递性：若$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$与$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$等价，$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$与$\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p\}$等价，则$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$与$\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p\}$等价.

④ 任一向量组和它的极大无关组等价. 向量组的任意两个极大无关组等价.

⑤ 如果$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$与$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$等价，则$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$.

4. 向量组的秩与矩阵秩的关系

矩阵 A 的行向量组的秩等于矩阵 A 的列向量组的秩，均等于矩阵 A 的秩，即 $r(A)=A$ 的行秩 $=A$ 的列秩.

5. 求向量组的秩和极大无关组的常用方法

(1) 利用矩阵的初等变换. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为 n 维列向量组，记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，$B=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm T}\\ \alpha_2^{\mathrm T}\\ \vdots\\ \alpha_s^{\mathrm T}\end{pmatrix}$. 对 A 施行初等行变换，或者对 B 作初等列变换将其化为阶梯形矩阵. 由于初等行(或列)变换不改变矩阵列(或行)的线性关系，从而容易求出向量组的秩和极大无关组.

(2) 利用矩阵的秩和子式. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为 n 维列向量组. 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$. 如果经过计算，得出 $r(A)=r$，则向量组的秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$. 如果 A 中一个 r 阶子式 $D_r\neq 0$. 则 D_r 所含的部分向量组是一个极大无关组.

(3) 利用线性相关和线性无关的定义. 这种方法适用于抽象的向量组.

6. 判定向量 β 是否可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示的常用方法

(1) 解线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$. 根据方程组有唯一解、无穷多组解或无解. 判定向量 β 由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示法唯一、不唯一或不能表示.

(2) 利用向量组的秩. 计算 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 和 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$. 如果 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示. 如果 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\neq r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$. 则 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示.

7. 判定向量组线性相关性的常用的方法

(1) 利用向量组线性相关性的定义判定. 基本思路是. 由向量组线性相关性定义出发、经过恒等变形，最终归结为判定一个齐次线性方程组是否存在非零解. 这是判定向量组线性相关性的最基本的方法. 对于分量已知的具体向量组适用，对于抽象向量组也适用.

(2) 利用矩阵的秩判定. 向量组的秩和矩阵的秩之间存在密切的联系，判定向量组的线性相关性，经常转化为讨论矩阵秩的问题. 对于 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，令矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$. 当 $r(A)<s$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关；当 $r(A)=s$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

(3) 利用行列式判定. 对于 n 个 n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，令矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 当 $|A|=0$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关；当 $|A|\neq 0$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

(4) 利用向量组线性相关性的有关性质. 由于线性相关和线性无关是两个相互对立的概念，反证法也是判定向量组线性相关性的常用方法. 在反证的推理过程中，注意利用线性相关性的有关性质.

·例 题 详 解·

例 2.3.1 设向量组 $\alpha_1=(a,0,c)$，$\alpha_2=(b,c,0)$，$\alpha_3=(0,a,b)$ 线性无关. 则 a、b、c 必满足关系式______.

[答案] $abc\neq 0$.

[提示] 本题主要考查向量组线性无关的判定方法. 注意到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关当且仅当 $|\alpha_1^{\mathrm T}\ \ \alpha_2^{\mathrm T}\ \ \alpha_3^{\mathrm T}|\neq 0$. 故求行列式即可.

[解] 令
$$A=(\alpha_1^{\mathrm T},\alpha_2^{\mathrm T},\alpha_3^{\mathrm T})=\begin{pmatrix}a&b&0\\0&c&a\\c&0&b\end{pmatrix}.$$
则
$$|A|=\begin{vmatrix}a&b&0\\0&c&a\\c&0&b\end{vmatrix}=2abc,$$

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关当且仅当$|A|\neq 0$，即$abc\neq 0$．故应填$abc\neq 0$．

例 2.3.2　设行向量组$(2,1,1,1)$，$(2,1,a,a)$，$(3,2,1,a)$，$(4,3,2,1)$线性相关，且$a\neq 1$，则$a=$________．

[答案]　$\frac{1}{2}$．

[提示]　本题主要考查向量组的线性相关性与矩阵的秩之间的关系，用初等行变换求矩阵的秩的方法．

[解]　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

对A作初等行变换，化为阶梯形矩阵，得

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-1\\0&0&1&2-2a\\0&0&0&(a-1)(2a-1)\end{pmatrix}.$$

由于向量组$(2,1,1,1)$，$(2,1,a,a)$，$(3,2,1,a)$，$(4,3,2,1)$线性相关，故$r(A)<4$．于是$(a-1)(2a-1)=0$．由于$a\neq 1$，从而$a=\frac{1}{2}$．

[典型错误]　填1或$\frac{1}{2}$，导致失分．主要原因是没有注意到"$a\neq 1$"这一条件．建议考生在答题前，要审清题意，看清题目条件．

例 2.3.3　设3阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，3维列向量$\alpha=(a,1,1)^T$．已知$A\alpha$与$\alpha$线性相关，则$a=$________．

[答案]　-1．

[提示]　本题主要考查向量组线性相关的概念．利用$A\alpha$与α线性相关当且仅当$A\alpha$与α的对应分量成比例，可以求出a的值．

[解]　注意到

$$A\alpha=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}.$$

由于$A\alpha$与α线性相关，因此$A\alpha$与α对应分量成比例．又$\alpha\neq 0$，$A\alpha\neq 0$，故存在不等于零的数k，使得

$$A\alpha=k\alpha,$$

即

$$\begin{pmatrix}(1-k)a\\2a+3-k\\3a+4-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

解得$a=-1$，$k=1$．故填-1．

例 2.3.4　已知向量组$\alpha_1=(1,2,-1,1)$，$\alpha_2=(2,0,t,0)$，$\alpha_3=(0,-4,5,-2)$的秩为2，则$t=$______．

[答案]　3．

[提示] 本题主要考查向量组的秩与该向量组构成的矩阵的秩之间的关系．记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$，由 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，知 $r(A)=2$，即矩阵 A 的任一 3 阶子式为零，于是可以求得 t．

[解] 记矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&0&t&0\\0&-4&5&-2\end{pmatrix}.$$

由 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，知 $r(A)=2$，即矩阵 A 的任一 3 阶子式为零，故

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&0&t\\0&-4&5\end{vmatrix}=0,$$

解得 $t=3$．

例 2.3.5 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)$，$\alpha_2=(2,3,4,5)$，$\alpha_3=(3,4,5,6)$，$\alpha_4=(4,5,6,7)$，则该向量组的秩是________．

[答案] 2.

[提示] 本题主要考查向量组秩的概念与求法．令矩阵 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)$，于是 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$．利用初等行变换求出矩阵 A 的秩即可．

[解] 令 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)$，并对 A 施以初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-2&-4&-6\\0&-3&-6&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故 $r(A)=2$，即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$．

例 2.3.6 设有向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(0,3,1,2)$，$\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,-2,2,0)$，$\alpha_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的极大线性无关组是(　　)．

(A) α_1，α_2，α_3　(B) α_1，α_2，α_4　(C) α_1，α_2，α_5　(D) α_1，α_2，α_4，α_5

[答案] (B)．

[提示] 本题主要考查向量组的极大无关组的概念及求法．令矩阵 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)$，对矩阵 A 作初等行变换化为阶梯形矩阵 $(\beta_1^T,\beta_2^T,\beta_3^T,\beta_4^T,\beta_5^T)$，使得 β_1，β_2，β_3，β_4，β_5 的线性关系容易观察出，那么向量组 α_1，α_2，α_3，α_4，α_5 与向量组 β_1，β_2，β_3，β_4，β_5 有相同的线性关系．即存在数 k_1，k_2，k_3，k_4，k_5，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4+k_5\alpha_5=0$ 当且仅当 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4+k_5\beta_5=0$．于是由 β_1，β_2，β_3，β_4，β_5 的极大无关组可得到 α_1，α_2，α_3，α_4，α_5 的极大无关组．

[解] 令 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)$．对 A 作初等行变换，将其化为阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&1&1&-2&1\\0&3&3&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1^T,\beta_2^T,\beta_3^T,\beta_4^T,\beta_5^T).$$

容易观察出 β_1，β_2，β_4 是 β_1，β_2，β_3，β_4，β_5 的一个极大无关组．所以 α_1，α_2，α_4 是 α_1，α_2，α_3，α_4，α_5 的一个极大无关组．

例 2.3.7　设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=0$，则(　　)．

(A) A 中必有两行(列)的元素对应成比例

(B) A 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合

(C) A 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合

(D) A 中至少有一行(列)的元素全为 0

[答案]　(C)．

[提示]　本题主要考查矩阵的秩与矩阵的行向量组(或列向量组)的秩之间的关系，行列式的性质，向量组的线性表示等．可用排除法解此题．

[解]　由 $|A|=0$ 知，A 的 n 个行向量必线性相关，因此必有一行向量是其余行向量的线性组合．故选(C)．

选项(A)，(B)，(D)都是 $|A|=0$ 的充分条件，而不是必要条件，因此被排除．例如取矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\2&3&-1\end{pmatrix},$$

那么

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&1&1\\2&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-1&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=0,$$

故选项(A)，(B)，(D)都不成立．

例 2.3.8　设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $r(A)=m<n$，E_m 为 m 阶单位矩阵，下述结论中正确的是(　　)．

(A) A 的任意 m 个列向量必线性无关

(B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零

(C) 若矩阵 B 满足 $BA=O$，则 $B=O$

(D) A 通过初等行变换，必可以化为 (E_m,O) 的形式

[答案]　(C)．

[提示]　本题主要考查矩阵的秩，向量组的相关性以及矩阵的初等行变换等．

[解]　应选(C)．原因如下：

由 $r(A)=m$，存在 n 阶可逆矩阵 P，使

$$AP=(A_1,A_2),$$

其中 A_1 是 m 阶可逆矩阵．于是由 $BA=O$，有 $BAP=O$，即

$$B(A_1,A_2)=(BA_1,BA_2)=O,$$

即 $BA_1=O$，两边右乘 A_1^{-1}，得 $B=O$．

(A)，(B)，(D)三个选项都不正确，原因如下：令

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

A 的第一列与第三列线性相关，故(A)不正确；A 的二阶子式 $\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}=0$，故(B)不正确；又注意到对 A 进行初等行变换，不能化为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$，故(D)不正确．

[典型错误]　选(D)，其原因是没有仔细审题，把“初等行变换”看作是“初等变换”．

例 2.3.9　若向量组 α，β，γ 线性无关；α，β，δ 线性相关，则(　　)．

(A) α 必可由 β，γ，δ 线性表示

(B) β 必不可由 α，γ，δ 线性表示

(C) δ 必可由 α，β，γ 线性表示

(D) δ 必不可由 α，β，γ 线性表示

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查向量组的线性相关性和线性表示等概念.

[解] 向量组 α，β，γ 线性无关，故 α，β 线性无关．又 α，β，δ 线性相关，知 δ 可由 α，β 线性表示，所以 δ 也可由 α，β，γ 线性表示，故选项(C)正确，(D)不正确.

选项(A)、(B)均不正确．例如，令

$$\alpha=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \beta=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \gamma=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\ \delta=(0,2,0)^{\mathrm{T}},$$

易知 α，β，γ 线性无关，α，β，δ 线性相关．但 α 不能由 β，γ，δ 线性表示．而 β 可由 α，γ，δ 线性表示.

例 2.3.10 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，但不能由向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示，记向量组(Ⅱ)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$，则(　　).

(A) α_m 不能由(Ⅰ)线性表示，也不能由(Ⅱ)线性表示

(B) α_m 不能由(Ⅰ)线性表示，但可由(Ⅱ)线性表示

(C) α_m 可由(Ⅰ)线性表示，也可由(Ⅱ)线性表示

(D) α_m 可由(Ⅰ)线性表示，但不可由(Ⅱ)线性表示

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查向量组线性表示的理论知识.

[解] 若向量 α_m 可由(Ⅰ)线性表示，则向量 β 可由(Ⅰ)线性表示，与题设矛盾．故 α_m 不能由(Ⅰ)线性表示，排除选项(C)与(D).

向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，故存在数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m.$$

又 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示，所以 $k_m\neq0$，从而

$$\alpha_m=\frac{1}{k_m}\beta-\frac{k_1}{k_m}\alpha_1-\frac{k_2}{k_m}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1},$$

即 α_m 可由(Ⅱ)线性表示．故选项(B)正确.

例 2.3.11 设 n 维列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ $(m<n)$线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件为(　　).

(A) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表示

(B) 向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示

(C) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 等价

(D) 矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$与矩阵 $B=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$等价

[答案] (D).

[提示] 本题主要考查向量组的线性表示问题和向量组、矩阵的等价概念．也考查向量组的秩、矩阵的秩的概念.

[解] 由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表示，知 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\leqslant r(\beta_1,\cdots,\beta_m)\leqslant m$．又 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，有 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=m$，故 $r(\beta_1,\cdots,\beta_m)=m$，即 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关，所以(A)是 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分条件．但(A)不是必要条件．事实上，$\beta_1,\cdots,\beta_m$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可能是两组无关系的向量组．例如，设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

易知α_1,α_2线性无关，β_1,β_2也线性无关，但α_1,α_2不能由β_1,β_2线性表示，β_1,β_2也不能由α_1,α_2线性表示，故排除选项(A)．此例也说明(B)不是$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关的必要条件．而向量组$\beta_1,\cdots,\beta_m$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性表示，不能得到$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关，故(B)也不是$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关的充分条件．排除选项(B)．若选项(C)正确，可得选项(A)，(B)均是$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关的必要条件，矛盾．故否定选项(C)．

综上所述，选项(D)正确．事实上选项(D)等价于$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=r(\beta_1,\cdots,\beta_m)$．而$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=m$，于是选项(D)等价于$r(\beta_1,\cdots,\beta_m)=m$，即$\beta_1,\cdots,\beta_m$线性无关．

[典型错误]　有相当多的考生选(C)，误认为两向量组等价的充分必要条件为向量组的秩相等．

例 2.3.12　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均为$n$维列向量，$A$是$m\times n$矩阵．下列选项正确的是(　　)．

(A) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

(C) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

(D) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

[答案]　(A)．

[提示]　本题考查向量组线性相关、线性无关的概念．

[解]　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

从而

$$\begin{aligned}&k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_sA\alpha_s\\&=A(k_1\alpha_1)+A(k_2\alpha_2)+\cdots+A(k_s\alpha_s)\\&=A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)\\&=A\,0\\&=0,\end{aligned}$$

故$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关，选项(A)正确，(B)不正确．

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关．若$m=n$且$A=E$，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关，排除选项(C)．

若$A=O$，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关，排除选项(D)．

[典型错误]

① 选(C)．其原因是，当$A=O$时，$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关，从而选(C)．出现这样的错误是不应该的，要注意到A是任一$m\times n$矩阵，利用特殊的矩阵A得到的结果，不具有一般性，只能用来排除一个选项，而不能肯定一个选项是正确的．

② 选(D)．其原因是当$m=n$且$A=E$时，由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，可得$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关．

例 2.3.13　设向量组Ⅰ：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则(　　)．

(A) 当$r<s$时，向量组Ⅱ必线性相关

(B) 当$r>s$时，向量组Ⅱ必线性相关

(C) 当$r<s$时，向量组Ⅰ必线性相关

(D) 当$r>s$时，向量组Ⅰ必线性相关

[答案]　(D)．

[提示]　本题主要考查两向量组线性表示与它们的秩的关系以及向量组的秩必定不大于该向量组中的向量个数这个知识点．

[解]　令向量组Ⅰ，Ⅱ分别为

$$\text{Ⅰ}:(1,0,0),\ (0,1,0);$$
$$\text{Ⅱ}:(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1).$$

显然向量组Ⅰ可由Ⅱ线性表示，且此时$r=2<s=3$，但向量组Ⅰ，Ⅱ均线性无关，故排除选项(A)，(C)．

令向量组Ⅰ，Ⅱ分别为

$$\text{Ⅰ}:(1,0,0),\ (2,0,0);$$

Ⅱ：$(1,0,0)$.

易知向量组Ⅰ可由Ⅱ线性表示，且此时 $r=2>s=1$，但向量组Ⅱ线性无关，否定了选项(B).

故选项(D)正确.

事实上，由Ⅰ可由Ⅱ线性表示，有 $r(\mathrm{I})\leqslant r(\mathrm{II})\leqslant s$. 若 $r>s$，则有

$$r(\mathrm{I})\leqslant s<r,$$

故此时向量组Ⅰ必线性相关.

例 2.3.14 设向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，向量 β_1 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，而向量 β_2 不能由向量组 α_1，α_2，α_3 线性表示，则对于任意常数 k，必有(　　).

(A) α_1，α_2，α_3，$k\beta_1+\beta_2$ 线性无关　　(B) α_1，α_2，α_3，$k\beta_1+\beta_2$ 线性相关

(C) α_1，α_2，α_3，$\beta_1+k\beta_2$ 线性无关　　(D) α_1，α_2，α_3，$\beta_1+k\beta_2$ 线性相关

[答案] (A).

[提示] 本题主要考查向量组的线性无关、线性相关和线性表示等概念. 由题设条件知，α_1，α_2，α_3，β_1 线性相关，α_1，α_2，α_3，β_2 线性无关. 再考虑 k 可取任意常数，便可根据 k 的不同取值排除错误选项.

[解] 取 $k=0$ 时，(B)和(C)都错. 而取 $k\neq0$ 时，(D)亦错. 不妨取 $k=1$，若 α_1，α_2，α_3，$\beta_1+\beta_2$ 线性相关，则由于 α_1，α_2，α_3 线性无关，$\beta_1+\beta_2$ 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；又 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，所以 β_2 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，与题设矛盾. 所以(A)是正确的. 事实上，假设存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$，使得

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4(k\beta_1+\beta_2)=0.$$

若 $\lambda_4=0$，则由 α_1，α_2，α_3 线性无关，必有 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，矛盾. 故 $\lambda_4\neq0$，此时 $k\beta_1+\beta_2$ 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示. 由 β_1 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，知 β_2 也可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，与题设矛盾. 故 α_1，α_2，α_3，$k\beta_1+\beta_2$ 是线性无关的.

[典型错误] 由于选项中的向量组含有任意常数 k，部分考生无从下手解题. 事实上，若对特殊的数某个命题不成立，就可以排除该选项.

例 2.3.15 设向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，则下列向量组中，线性无关的是(　　).

(A) $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_1$　　(B) $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

(C) $\alpha_1+2\alpha_2$，$2\alpha_2+3\alpha_3$，$3\alpha_3+\alpha_1$　　(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3$，$3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$

[答案] (C).

[提示] 本题主要考查向量组的线性无关、线性相关的概念与判定. 判断向量组是否线性相关(或无关)，通常的方法是，若能直接观察出某一向量可由另外一些向量线性表示，则这组向量线性相关；若无法观察出，则应利用线性相关(或无关)的定义来判定.

[解] 对于选项(A)，由于 $\alpha_3-\alpha_1=(\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_1+\alpha_2)$，故(A)中的向量线性相关.

对于选项(B)，由于 $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=(\alpha_1+\alpha_2)+(\alpha_2+\alpha_3)$，故(B)中的向量线性相关.

对于选项(C)，若令

$$l_1(\alpha_1+2\alpha_2)+l_2(2\alpha_2+3\alpha_3)+l_3(3\alpha_3+\alpha_1)=0.$$

即

$$(l_1+l_3)\alpha_1+(2l_1+2l_2)\alpha_2+(3l_2+3l_3)\alpha_3=0.$$

因为 α_1，α_2，α_3 是线性无关的，故

$$\begin{cases}l_1+l_3=0,\\2l_1+2l_2=0,\\3l_2+3l_3=0.\end{cases}$$

因上述齐次线性方程组的系数矩阵的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{vmatrix}=12\neq0,$$

故该齐次线性方程组只有零解，即 $l_1=l_2=l_3=0$. 故 $\alpha_1+2\alpha_2$，$2\alpha_2+3\alpha_3$，$3\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关，即选项(C)正确.

对于选项(D)，令

$$l_1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+l_2(2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3)+l_3(3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3)=0\ ,$$

即

$$(l_1+2l_2+3l_3)\alpha_1+(l_1-3l_2+5l_3)\alpha_2+(l_1+22l_2-5l_3)\alpha_3=0\ .$$

因为 α_1，α_2，α_3 线性无关，有

$$\begin{cases} l_1+2l_2+3l_3=0, \\ l_1-3l_2+5l_3=0, \\ l_1+22l_2-5l_3=0, \end{cases}$$

该齐次线性方程组的系数矩阵的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 22 & -5 \end{vmatrix}=0,$$

故该齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，即向量组

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ 2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,\ 3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$$

是线性相关的，于是排除选项(D).

例 2.3.16 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维向量，下列结论不正确的是(　　).

(A) 若对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关

(B) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则对于一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查考生对向量组的线性无关、线性相关的概念及有关定理的掌握程度.

[解] 根据向量组线性无关的定义可知(A)的结论是正确的；根据向量组的相关性与其秩的关系知(C)是正确的；由向量组中的部分组线性相关则整体相关的结论可知(D)是正确的；若存在一组不全为零的数 k_1，$k_2,\cdots,k_s$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，显然(B)的结论是不正确的.

[典型错误] 选(D)，其原因是把“必要条件”与“充分条件”混淆了.

例 2.3.17 设 α_1、α_2、$\cdots$，α_m 均为 n 维向量，那么，下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则 α_1，α_2，$\cdots$，α_m 线性相关

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

(D) 若 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关

[答案] (B).

[提示] 本题主要考查向量组线性相关、线性无关的概念.

[解] 选项(A)没有指明 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零，故排除选项(A)；选项(C)中的“对任意”改为“存在”，并去掉“都”，才正确；选项(D)中的条件相当于“$0=0$”，等价于无任何条件. 排除(D).

选项(B)正确. 事实上，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则存在一组不全为零的数 $l_1,l_2,\cdots,l_m$，使得

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m=0\ ,$$

这与(B)的假设矛盾.

[典型错误] 选(A)，其原因是没有正确理解向量组线性相关的概念.

例 2.3.18 设 4 维向量组 $\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(2,2+a,2,2)^T$，$\alpha_3=(3,3,3+a,3)^T$，$\alpha_4=(4,4,4,4+a)^T$，问 a 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关？当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

[提示] 本题主要考查向量组的线性相关性与极大线性无关组的求法，同时也考查行列式的计算与矩阵的初等变换等知识点. 熟知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关当且仅当$|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4|=0$，通过求解该方程得到 a 的值. 又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关当且仅当矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的秩小于 4，对该矩阵作初等行变换可求得 a 的值. 故本题有如下两种解法.

[解法 1] 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，则

$$|A|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(a+10)a^3,$$

于是当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

当 $a=0$ 时，α_1 为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\alpha_2=2\alpha_1$，$\alpha_3=3\alpha_1$，$\alpha_4=4\alpha_1$.

当 $a=-10$ 时，对 A 施以初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\10&-10&0&0\\10&0&-10&0\\10&0&0&-10\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4).$$

由于β_2,β_3,β_4 为 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\beta_1=-\beta_2-\beta_3-\beta_4$，故$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$.

[解法 2] 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，对 A 施以初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\-a&a&0&0\\-a&0&a&0\\-a&0&0&a\end{pmatrix}=B.$$

当 $a=0$ 时，A 的秩为 1，因而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，此时α_1 为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\alpha_2=2\alpha_1$，$\alpha_3=3\alpha_1$，$\alpha_4=4\alpha_1$.

当 $a\neq0$ 时，再对 B 施以初等行变换，有

$$B\to\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+10&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}=C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4).$$

如果 $a\neq-10$，C 的秩为 4，从而 A 的秩为 4，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

如果 $a=-10$，C 的秩为 3，从而 A 的秩为 3，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

由于$\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 为 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\gamma_1=-\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4$，于是$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$.

[典型错误]

① 计算行列式出错，导致 a 的值求错，建议考生不仅要提高逻辑思维能力，而且也要培养计算技能.

② 采用解法 2 的考生，往往丢掉 $a=-10$ 这一情况，原因是通过观察得 $a=0$，而不是严格的推导.

③ 由于计算错误，当 $a=-10$ 时，将其余向量用极大线性无关组线性表示时出错.

例 2.3.19 已知 $\alpha_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}$，问：

（Ⅰ）a，b 取何值时，β 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示？

（Ⅱ）a，b 取何值时，β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示？并写出此表示式.

[提示] 本题主要考查向量组线性表示的概念以及如何判断一个非齐次线性方程组是否有解，如果有解如何用初等变换求解和分情况讨论的能力. 可将 β 能否由向量组 α_1，α_2，α_3 线性表示的问题转换为非齐次线性方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=\beta$ 有解、无解的问题.

[解] 记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$. 对 A 施以初等行变换，得

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{pmatrix},$$

所以，有：

（Ⅰ）当 $b\neq 2$ 时，线性方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=\beta$ 无解，此时 β 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示.

（Ⅱ）当 $b=2$，$a\neq 1$ 时，线性方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=\beta$ 有唯一解：

$$x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(-1,2,0)^{\mathrm{T}},$$

于是 β 可由 α_1，α_2，α_3 唯一表示为 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$.

当 $b=2$，$a=1$ 时，线性方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=\beta$ 有无穷多个解：

$$x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=k(-2,1,1)^{\mathrm{T}}+(-1,2,0)^{\mathrm{T}},$$

其中 k 为任意常数，这时 β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，其表示式为

$$\beta=-(2k+1)\alpha_1+(k+2)\alpha_2+k\alpha_3.$$

[典型错误]

① 多数考生讨论 a，b 取值时不完整，比如有的考生仅讨论 $b\neq 2$ 和 $b=2$ 这两种情况，没有讨论 a 的取值情况.

② 部分考生对矩阵 A 也作初等列变换，这是不允许的.

例 2.3.20 设 $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,2,3)$，$\alpha_3=(1,3,t)$，试问：

（Ⅰ）当 t 为何值时，向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关？

（Ⅱ）当 t 为何值时，向量组 α_1，α_2，α_3 线性相关？

（Ⅲ）当向量组 α_1，α_2，α_3 线性相关时，将 α_3 表示为 α_1 和 α_2 的线性组合.

[提示] 本题主要考查向量组线性相关与线性无关的判定，向量组的线性表示，齐次线性方程组是否有非零解的判定等知识点. 将向量组 α_1，α_2，α_3 线性相关、线性无关的问题转化为齐次线性方程组

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$$

是否有非零解的问题.

[解] 设有一组数 k_1，k_2，k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0,$$

即

$$k_1(1,1,1)+k_2(1,2,3)+k_3(1,3,t)=(0,0,0),$$

由此，得线性方程组

$$\begin{cases}k_1+k_2-k_3=0,\\k_1+2k_2+3k_3=0,\\k_1+3k_2+tk_3=0,\end{cases}$$

其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5.$$

（Ⅰ）当 $t\neq5$，即 $D\neq0$ 时．方程组仅有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，故向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关．

（Ⅱ）当 $t=5$，即 $D=0$ 时．方程组有非零解，即存在不全为零的常数 k_1，k_2，k_3，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，故向量组 α_1，α_2，α_3 线性相关．

（Ⅲ）当 $t=5$ 时．α_1，α_2，α_3 线性相关，并且显然有 α_1，α_2 线性无关．故 α_3 可由 α_1，α_2 线性表示．对方程组的系数矩阵作初等行变换，得

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

其同解方程组为

$$\begin{cases}k_1-k_3=0,\\k_2+2k_3=0.\end{cases}$$

令 $k_3=1$，得 $k_1=1$，$k_2=-2$，即有

$$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0\ .$$

故

$$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2.$$

［典型错误］ 不少考生会判断 t 为何值时，向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关、线性相关，但对将 α_3 表示为 α_1，α_2 的线性组合则无法入手．

例 2.3.21 设向量组 $\alpha_1=(a,2,10)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(-2,1,5)^{\mathrm T}$，$\alpha_3=(-1,1,4)^{\mathrm T}$，$\beta=(1,b,c)^{\mathrm T}$．试问：当 a，b，c 满足什么条件时，

（Ⅰ）β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表出，且表示唯一？

（Ⅱ）β 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表出？

（Ⅲ）β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表出，但表示不唯一？并求出一般表达式．

［提示］ 本题主要考查向量组的线性表示，非齐次线性方程组是否有解的判定及求解的问题．将 β 可否由 α_1，α_2，α_3 线性表出的问题转化为线性方程组 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta$ 解的存在性的问题．

［解］ 设有一组数 k_1，k_2，k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta,\tag{*}$$

该方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}a&-2&-1\\2&1&1\\10&5&4\end{vmatrix}=-a-4.$$

（Ⅰ）当 $a\neq-4$ 时，$|A|\neq0$，方程组有唯一解，故 β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表出，且表示法唯一．

（Ⅱ）当 $a=-4$ 时，对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-4&-2&-1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&0&-b-1\\0&0&1&2b+1\\0&0&0&3b-c-1\end{pmatrix}.$$

若 $3b-c\neq1$，则 $r(A)\neq r(\overline{A})$，方程组无解，即 β 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表出．

（Ⅲ）当 $a=-4$，且 $3b-c=1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，方程组有无穷多组解，β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表出．但表示法不唯一．

此时方程组（*）的解为

$$k_1=t,\ k_2=-2t-b-1,\ k_3=2b+1,$$

其中 t 为任意常数. 因此

$$\beta = t\alpha_1 - (2t+b+1)\alpha_2 + (2b+1)\alpha_3.$$

[典型错误] 有的考生对线性方程组 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \beta$ 的增广矩阵也作初等列变换，导致丢分.

例 2.3.22 设 $\alpha_1 = (1,2,0)^T$，$\alpha_2 = (1,a+2,-3a)^T$，$\alpha_3 = (-1,-b-2,a+2b)^T$，$\beta = (1,3,-3)^T$，试讨论当 a，b 为何值时，

(Ⅰ) β 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示；

(Ⅱ) β 可由 α_1，α_2，α_3 唯一地线性表示，并求出表示式；

(Ⅲ) β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

[提示] 本题主要考查考生是否掌握向量由向量组线性表示这一概念，还考查如何判断一个非齐次线性方程组是否有解，如果有解如何用初等变换求解和分情况讨论的能力. 将 β 可否由 α_1，α_2，α_3 线性表示的问题转化为线性方程组

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \beta$$

是否有解的问题即可.

[解] 假设存在数 k_1，k_2，k_3，使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \beta. \qquad (*)$$

记 $A = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. 对矩阵 (A,β) 施以初等行变换，得

$$(A,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 当 $a=0$ 时，有

$$(A,\beta) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

于是 $r(A) \neq r(A,\beta)$，故方程组 $(*)$ 无解，即 β 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示.

(Ⅱ) 当 $a \neq 0$ 且 $a \neq b$ 时，$r(A) = r(A,\beta) = 3$，于是方程组 $(*)$ 有唯一解

$$k_1 = 1 - \frac{1}{a},\ k_2 = \frac{1}{a},\ k_3 = 0,$$

故 β 可由 α_1，α_2，α_3 唯一地线性表示，其表示式为

$$\beta = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2.$$

(Ⅲ) 当 $a = b \neq 0$ 时，有

$$(A,\beta) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

从而 $r(A) = r(A,\beta) = 2$，于是方程组 $(*)$ 有无穷多解，其全部解为

$$k_1 = 1 - \frac{1}{a},\ k_2 = \frac{1}{a} + k,\ k_3 = k.$$

其中 k 为任意常数. 故 β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，但表示式不唯一，其表示式为

$$\beta = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\alpha_1 + \left(\frac{1}{a} + k\right)\alpha_2 + k\alpha_3.$$

[典型错误] 多数考生讨论 a，b 取值时不合理或者不完整. 比如有的考生仅讨论 $a \neq b$ 和 $a = b$ 这两种情况，导致失分. 有的考生分如下三种情况：①$a=0$；②$a=b$；③$a \neq b$，这也不合理.

例 2.3.23 设向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,3)^T$，$\alpha_2 = (-1,-3,5,1)^T$，$\alpha_3 = (3,2,-1,p+2)^T$，$\alpha_4 = (-2,-6,$

$10,p)^T$.

（Ⅰ）p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出；

（Ⅱ）p 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大无关组．

［提示］ 本题主要考查向量组线性相关、线性无关和极大无关组的概念与求法，同时还考查向量组的线性表示及秩的概念．本题的实质是讨论线性方程组解的情况．问题（Ⅰ）是讨论非齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\alpha$ 在 p 为何值时有唯一解；问题（Ⅱ）则是问齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$ 在 p 为何值时有非零解，并求系数矩阵的秩等．因此，可用一般的方法求解．

［解］ 对矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)$ 作初等行变换，有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p&10\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&p-9&p-2&-8\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）当 $p\neq2$ 时，向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 线性无关．此时，

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha)\to\begin{pmatrix}1&-1&3&0&\dfrac{2p-6}{p-2}\\0&-2&-1&0&\dfrac{-7p+10}{p-2}\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&\dfrac{3p-4}{p-2}\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&\dfrac{1-p}{p-2}\end{pmatrix}.$$

于是

$$\alpha=2\alpha_1+\frac{3p-4}{p-2}\alpha_2+\alpha_3+\frac{1-p}{p-2}\alpha_4.$$

（Ⅱ）当 $p=2$ 时，向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 线性相关．此时，向量组的秩为 3．α_1，α_2，α_3（或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$）为其一个极大线性无关组．

［典型错误］ 不少考生会用行列式 $|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4|$ 是否为零来判定向量组的线性相关性，但对用 α_1，α_2，α_3，α_4 将 α 线性表出则无从入手，这表明他们尚未把所学内容融会贯通．

例 2.3.24 已知向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 具有相同的秩，且 β_3 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，求 a，b 的值．

［提示］ 本题主要考查向量组的线性表示及秩的概念．向量组 α_1，α_2，α_3 是不含参数的，所以它的秩能求出，从而可以决定 β_1，β_2，β_3 的线性相关性，由此可导出 a 与 b 的一个关系式．再根据条件 β_3 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，便能求出 a，b 的值．

［解］ 向量 α_1 和 α_2 线性无关，且 $\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$，所以向量组 α_1，α_2，α_3 线性相关，且秩为 2，α_1，α_2 是它的一个极大线性无关组．

由于向量组 β_1、β_2，β_3 与 α_1，α_2，α_3 具有相同的秩，故 β_1、β_2、β_3 线性相关，从而

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

由此解得 $a=3b$．

又 β_3 可由 α_1、α_2，α_3 线性表示，从而可由 α_1，α_2 线性表示，所以 α_1，α_2，β_3 线性相关．于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

解之得 $2b-10=0$．于是得 $a=15$，$b=5$．

［典型错误］ 有相当一部分考生只得到 $a=3b$，但不会利用 β_3 是 α_1，α_2，α_3 的一个线性组合这一条件推出 a 与 b 的另一关系式．

例 2.3.25 确定常数 a，使向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^{\mathrm T}$、$\alpha_2=(1,a,1)^{\mathrm T}$，$\alpha_3=(a,1,1)^{\mathrm T}$ 可由向量组 $\beta_1=(1,1,a)^{\mathrm T}$，$\beta_2=(-2,a,4)^{\mathrm T}$，$\beta_3=(-2,a,a)^{\mathrm T}$ 线性表示，但向量组 β_1，β_2，β_3 不能由向量组 α_1，α_2，α_3 线性表示．

［提示］ 本题主要考查向量组的线性表示问题．只需讨论 a 为何值时、线性方程组

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\alpha_i\quad(i=1,2,3)$$

均有解，且存在一个数 j（$1\leqslant j\leqslant 3$），使得线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_j$$

无解．故只需对矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$进行初等行变换，就可以判断 a 的取值．

［解］ 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，对矩阵$(A,B)$施行初等行变换，有

$$(A,B)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a & 4 & a \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 0 & 4+2a & 3a \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & 0 & 3a+6 & 4a+2 \end{pmatrix},$$

由于 β_1，β_2，β_3 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示，故 $r(A)<3$．因此 $a=1$ 或 $a=-2$．

当 $a=1$ 时，

$$(A,B)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

考虑线性方程组 $Ax=\beta_2$．由于 $r(A)=1$，$r(A,\beta_2)=2$，故方程组 $Ax=\beta_2$ 无解，所以 β_2 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示．另一方面，由于 $|B|=-9\neq 0$，故 $Bx=\alpha_i$（$i=1,2,3$）有唯一解，即 α_1，α_2，α_3 可由 β_1，β_2、β_3 线性表示．所以 $a=1$ 符合题意．

当 $a=-2$ 时，对矩阵(B,α_2)施行初等行变换，有

$$(B,\alpha_2)=\begin{pmatrix}1&-2&-2&1\\1&-2&-2&-2\\-2&4&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&-2&1\\0&0&0&-3\\0&0&-6&3\end{pmatrix}.$$

考虑线性方程组 $Bx=\alpha_2$. 由于 $r(B)=2$、$r(B,\alpha_2)=3$，故方程组 $Bx=\alpha_2$ 无解，所以 α_2 不能由向量组 β_1，β_2，β_3 线性表示.

综上所述，$a=1$ 符合题意.

[典型错误]

① 有的考生无法入手. 其原因是没有掌握好向量组线性表示的问题.

② 得到 $a=1$ 或 -2，没有验证 $a=1$ 满足条件，而 $a=-2$ 不符合题意.

例 2.3.26 设有向量组(Ⅰ)$\alpha_1=(1,0,2)^T$，$\alpha_2=(1,1,3)^T$，$\alpha_3=(1,-1,a+2)^T$和向量组(Ⅱ)$\beta_1=(1,2,a+3)^T$，$\beta_2=(2,1,a+6)^T$，$\beta_3=(2,1,a+4)^T$. 试问：当 a 为何值时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价？当 a 为何值时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价？

[提示] 本题主要考查向量组等价的概念，矩阵的秩与线性方程组是否有解的判定. 如果两个向量组可以相互线性表示，则称这两个向量组等价，故只需讨论 a 为何值时. 线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_i$ $(i=1,2,3)$有解，且线性方程组 $y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3=\alpha_i$ $(i=1,2,3)$有解. 这只需对矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$进行初等行变换，就可判断 a 的取值.

[解] 对矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$作初等行变换，有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&1\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{pmatrix}.$$

(1) 当 $a\neq-1$ 时，行列式 $|\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3|=a+1\neq0$，且 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，故线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_i$ $(i=1,2,3)$均有唯一解. 所以，β_1，β_2，β_3 可由向量组(Ⅰ)线性表示.

同样，行列式 $|\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3|=6\neq0$，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，故 α_1、α_2，α_3 可由向量组(Ⅱ)线性表示. 因此，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

(2) 当 $a=-1$ 时，有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1&1&1\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&0&-2&0&-2\end{pmatrix}.$$

由于 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\neq r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)$，线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_1$ 无解，故向量 β_1 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示. 因此，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

[典型错误] 相当一部分考生认为向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价当且仅当 r(Ⅰ)$=r$(Ⅱ)，这是错误的. 虽然也可以利用这一错误的结论求出正确的结果，但会严重丢分.

例 2.3.27 已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 x，使得向量组 x，Ax，A^2x 线性无关，且满足

$$A^3x=3Ax-2A^2x.$$

(Ⅰ) 记 $P=(x,Ax,A^2x)$，求 3 阶矩阵 B，使 $A=PBP^{-1}$；

(Ⅱ) 计算行列式 $|A+E|$.

[提示] 本题主要考查矩阵的运算，向量组的线性无关性及相似矩阵与行列式的性质等.

[解] (Ⅰ) 令 $P=(x,Ax,A^2x)$，则由 $A^3x=3Ax-2A^2x$，有

$$\begin{aligned}AP&=(Ax,A^2x,A^3x)\\&=(Ax,A^2x,3Ax-2A^2x)\\&=(x,Ax,A^2x)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}\\&=P\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因 x，Ax，A^2x 线性无关，故 P 可逆，且

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）由 $A=PBP^{-1}$，有 $A+E=P(B+E)P^{-1}$，从而

$$\begin{aligned}|A+E|&=|P(B+E)P^{-1}|\\&=|P|\cdot|B+E|\cdot|P^{-1}|\\&=|B+E|\\&=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}\\&=-4.\end{aligned}$$

[典型错误]

① 由条件 $A^3x=3Ax-2A^2x$，得 $A(A-E)(A+3E)x=0$，认为 $A(A-E)(A+3E)=O$，再认为有 $A=O$ 或 $A=-3E$. 将数字运算规律搬到矩阵运算中来运用.

② 看到 $A=PBP^{-1}$，就误认为 B 一定是对角矩阵.

例 2.3.28 已知向量组 α_1，α_2，…，α_s $(s\geqslant 2)$线性无关. 设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$. …，$\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s$，$\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$，试讨论向量组 β_1，β_2，…，β_s 的线性相关性.

[提示] 本题主要考查向量组的线性相关、线性无关的概念与判定，齐次线性方程组是否有非零解的判定以及行列式的求法.

[解] 设有一组数 k_1，k_2，…，k_s，使得

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0\ , \tag{*}$$

即 $$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+k_{s-1}(\alpha_{s-1}+\alpha_s)+k_s(\alpha_s+\alpha_1)=0\ ,$$

于是 $$(k_1+k_s)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_{s-1}+k_s)\alpha_s=0\ .$$

由于向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性无关，故有齐次线性方程组

$$\begin{cases}k_1+k_s=0,\\k_1+k_2=0,\\\quad\cdots\cdots\\k_{s-1}+k_s=0,\end{cases}$$

其系数行列式

$$D_s=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{s+1}=\begin{cases}2,&\text{若 } s \text{ 为奇数}.\\0,&\text{若 } s \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

当 s 为奇数时，$D_s=2\neq 0$，方程组仅有零解，即 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$，故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关；

当 s 为偶数时，$D_s=0$，方程组有非零解，即存在一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使(*)式成立，故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关.

[典型错误]

① 本题是要求判断 s 个抽象向量的线性关系，部分考生答得不好.

② 求 D_s 时出错，所以建议考生不要忽略行列式的基本计算.

例 2.3.29 试证明：n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$D=\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix}\neq 0,$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm T}$ 表示列向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的转置，$i=1,2,\cdots,n$.

[提示] 本题主要考查向量组的秩与矩阵的秩之间的关系，矩阵的运算和行列式的性质等. 令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，容易观察出 $D=|\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}|$，将 $D\neq 0$ 转化为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 即可.

[证] 令矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 另一方面，由于

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T} \end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n \end{pmatrix},$$

上式两边同时取行列式，有

$$D=|\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm T}|\cdot|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2,$$

从而 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 与 $D\neq 0$ 等价. 由此得出，$D\neq 0$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件.

[典型错误] 多数考生无从下手解题，其原因是不会把 $D\neq 0$ 转化为 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A}|\neq 0$，即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$. 所以考生不仅要有扎实的基本功，而且会观察问题，并把问题简单化.

四、线性方程组

·考试内容与要求·

考试内容

线性方程组的克莱姆(Cramer)法则　线性方程组有解和无解的判定　齐次线性方程组的基础解系和通解　非齐次线性方程组的解与相应的齐次线性方程组(导出组)的解之间的关系　非齐次线性方程组的通解

考试要求

1. 会用克莱姆法则解线性方程组.
2. 掌握非齐次线性方程组有解和无解的判定方法.
3. 理解齐次线性方程组的基础解系的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.
4. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.
5. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

·考试内容解析·

(一) 线性方程组的基本概念